

# The local asymptotic normality of first order spatial bilinear model

Soumia Kharfouchi

► To cite this version:

Soumia Kharfouchi. The local asymptotic normality of first order spatial bilinear model. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. inria-00386672

**HAL Id: inria-00386672**

**<https://hal.inria.fr/inria-00386672>**

Submitted on 22 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La normalité asymptotique locale du modèle bilinéaire spatial du premier ordre

Soumia kharfouchi

*Département de Mathématiques,*

*Université Mentouri, Constantine, Algérie.*

*s\_kharfouchi@yahoo.fr*

**Abstract.** This paper is devoted to the Local Asymptotic Normality (LAN) of the log-likelihood ratio for a first order spatial bilinear model. We will establish a general result which covers a large class of spatial discrete ordered models including the spatial bilinear model of first order specified by

$$X_{i,j} = aX_{i,j-1} + bX_{i-1,j} - abX_{i-1,j-1} + aX_{i,j-1}e_{i,j-1} - abX_{i-1,j-1}e_{i-1,j-1} + e_{i,j},$$

where  $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$  is a white noise process in the sense that they are uncorrelated with constant first two moments 0 and  $\sigma^2$  respectively.

**KeyWords:** Spatial bilinear model; Local asymptotic normality; Maximum likelihood estimation.

**Résumé.** Cette note traite le problème de la Normalité Asymptotique Locale (LAN) du rapport du log de vraisemblance pour le modèle bilinéaire spatial du premier ordre. On établit d'abord un résultat général qui couvre une large classe de modèles spatiaux ordonnés y compris le modèle bilinéaire spatial du premier ordre défini par

$$X_{i,j} = aX_{i,j-1} + bX_{i-1,j} - abX_{i-1,j-1} + aX_{i,j-1}e_{i,j-1} - abX_{i-1,j-1}e_{i-1,j-1} + e_{i,j},$$

où  $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$  est un champ de bruit blanc avec comme deux premiers moments 0 et  $\sigma^2$  respectivement.

**Mots Clés.** Modèle Bilineaire Spatial; Normalité Asymptotique Locale; Estimation par la méthode du Maximum de Vraisemblance.

## 1 INTRODUCTION

En pratique, de très nombreuses situations sont naturellement modélisées par une famille de variables aléatoires  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}^d}$  comme en météorologie, océanographie, géologie, biologie et agriculture. Ainsi, l'intérêt pour les modèles spatiaux s'est largement accru au cours de ces dernières années, notamment ceux présentant un champ de déplacement bilinéaire. Les exemples sont très variés citons en un dans le domaine de l'imagerie médicale. Il a été fortement

prouvé que l'élasticité des tissus biologiques est une donnée pertinente pour localiser et caractériser les tumeurs. De plus l'élasticité est naturellement liée au mouvement local des tissus. Une étude récente d'analyse du mouvement dans les tissus mous a conduit à choisir un modèle bilinéaire du champ de déplacement. Ce modèle prend en compte les changements simultanés de forme et de surface des structures locales et nécessite l'estimation d'un certain nombre de paramètres. Nous espérons qu'un modèle bilinéaire spatial peut être la solution idéale permettant d'extraire des paramètres de mouvement spatio-temporels à partir d'images échographiques d'un milieu élastique lorsqu'il est soumis à une compression axiale. Les processus ARMA spatiaux ont été abondamment traité par plusieurs chercheurs dont Guyon (1982) et Tjostheim (1978) et (1983), mais il reste beaucoup à faire pour les processus bilinéaires spatiaux, nous proposons dans ce travail l'étude de la normalité asymptotique locale du rapport du log de vraisemblance du modèle bilinéaire spatial du premier ordre défini par

$$X_{i,j} = aX_{i,j-1} + bX_{i-1,j} - abX_{i-1,j-1} + aX_{i,j-1}e_{i,j-1} - abX_{i-1,j-1}e_{i-1,j-1} + e_{i,j}, \quad (1.1)$$

où  $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$  est un bruit blanc gaussien, i.e., champ de carré intégrable stationnaire gaussien vérifiant pour tout  $s, t \in \mathbb{Z}^2$ ,  $E(e_t) = 0$ ,  $E(e_t e_s) = 0$  si  $t \neq s$  et  $E(e_t^2) = \sigma^2$ . Notons que nous devons préciser la notion de passé et de future que nous considérons pour notre modèle et ceci en précisant l'ordre considéré sur  $\mathbb{Z}^2$ , c'est l'ordre lexicographique qui est l'ordre total défini pour deux points  $s = (s_1, s_2)$  et  $t = (t_1, t_2)$  de  $\mathbb{Z}^2$  par  $s \prec t$  ( $s$  précède  $t$ ) si et seulement si  $[(s_1 < t_1)$  ou  $(s_1 = t_1$  et  $s_2 < t_2)]$ . cet ordre nous permettra de munir  $\mathbb{Z}^2$  de la "topologie de l'ordre" associée à l'ordre lexicographique engendrée par les ensembles  $S \langle A, \infty \rangle$  et  $S [\infty, B)$  avec  $A$  parcourant  $\mathbb{Z}^2$  où pour  $B$  élément de  $\mathbb{Z}^2$  tel que  $A \preceq B$  et  $A \neq B$  on définit les ensembles,  $S [A, B] = \{x \in \mathbb{Z}^2 / A \preceq x \preceq B\}$ ,  $S \langle \infty, B \rangle = \{x \in \mathbb{Z}^2 / x \preceq B\}$ ,  $S [A, \infty \rangle = \{x \in \mathbb{Z}^2 / A \preceq x\}$  et  $S [A, B[ = \{x \in \mathbb{Z}^2 / A \preceq x \preceq B\} \setminus \{B\}$ .

On commence dans la section 2 par établir un résultat général qui donne la normalité asymptotique locale (LAN) pour un modèle spatial discret ordonné. Puis dans la section 3, on utilise le résultat de la section 2 pour établir la propriété LAN pour le modèle bilinéaire spatial (1.1)

## 2 La normalité asymptotique locale d'un modèle spatial discret ordonné

Cette section traite le problème de la propriété LAN. Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}_+^2}$  un modèle spatial discret et ordonné défini sur un espace de probabilité  $(\Omega, F, P_\theta)$  où  $\Omega$  et  $F$  sont respectivement l'espace d'échantillonnage et la  $\sigma$ -algèbre correspondant à  $X = \{X_i, i \in \mathbb{Z}_+^2\}$  et  $P_\theta$  est une mesure de probabilité indexée par un paramètre inconnu  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ . Soit  $(\Omega_{\mathbf{n}}, F_{\mathbf{n}}, P_{\mathbf{n},\theta})$  la restriction de  $(\Omega, F, P_\theta)$  au vecteur d'échantillonnage  $X(\mathbf{n}) = \{X_i, i \in S[\mathbf{0}, \mathbf{n}]\}$ , pour  $\mathbf{n} = (n, n)$  on peut écrire  $X(\mathbf{n}) = \{X_{i_0}, \dots, X_{i_r}\}$  où  $r = (n+1)^2$  et  $i_0 \prec i_1 \prec \dots \prec i_r$ . Soit  $\theta_{\mathbf{n}} = \theta + hr^{-\frac{1}{2}}$ , où  $h$  est un  $(k \times 1)$  vecteur de nombres réels. Considérons le rapport du log de vraisemblance

$$\Lambda_n(\theta) = \log \{f_{n,\theta_{\mathbf{n}}}/f_{n,\theta}\},$$

où  $f_{\mathbf{n},\theta}$  est le densité correspondant à  $P_{\mathbf{n},\theta}$  relativement à une certaine mesure  $\mu_{\mathbf{n}}$ . Ce même rapport peut être obtenu à partir de la vraisemblance conditionnelle en définissant les densités conditionnelles

$$f_{i_m,\theta}(x_{i_m}/x_s, s \prec i_m) = \{f_{i_m,\theta}/f_{i_{m-1},\theta}\}, \text{ pour tout } 1 \leq m \leq r,$$

et notons

$$g_{n,k}(\theta) = \{f_{k,\theta_n}(x_k/x_s, s \prec k)\} \{f_{k,\theta}(x_k/x_s, s \prec k)\}.$$

Nous avons alors

$$\Lambda_n(\theta) = \sum_{k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{n}]} \log g_{n,k}(\theta).$$

Considérons maintenant les conditions de régularités suivantes. les conditions 1 et 2 concernent  $\theta$  et  $g_{n,k}$ , la condition 3 indique que  $Z_{nk}$  sont des différences de martingales de moyennes nulles pour tout  $\mathbf{n}$  relativement à l'ordre lexicographique défini par Huang (1992), les conditions 4 et 5 nous permettent d'appliquer le théorème central limite pour des différences de martingales de Huang.

$$(C 1) \max_{k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{n}]} |g_{nk}(\theta) - 1| = o_p(1);$$

$$(C 2) \sum_{k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{n}]} (g_{nk}(\theta) - 1)^2 = \tau^2(\theta) + o_p(1), \text{ où } \tau^2(\theta) \text{ est non-aléatoire et}$$

positif:

(C 3) Il existe une suite de variables aléatoires  $\{Z_{nk}(\theta)\}$ ,  $k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{n}]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , tel que

$$\sum_{k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{n}]} (g_{nk}(\theta) - 1) = \sum_{k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{n}]} Z_{nk}(\theta) + o_p(1), \text{ et } E(Z_{nk}(\theta) / Z_{ns}(\theta)), k \prec s) = 0 \text{ p.s.}$$

pour tout  $k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{n}]$ , et  $n \geq 1$ ;

$$(C 4) \frac{1}{n^2} \sum_{k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{n}]} E Z_{nk}^2(\theta) \xrightarrow{P} \tau^2(\theta) \text{ quand } n \rightarrow \infty;$$

$$(C 5) \sup E |Z_{nk}(\theta)|^2 1_{\{|Z_{nk}(\theta)| > C\}} \rightarrow 0 \text{ quand } C \rightarrow \infty$$

**Theorem 1** (*Local Asymptotic Normality*)

(i) Sous (C.1) et (C.2) nous avons  $\Lambda_n(\theta) = V_n(\theta) - \frac{1}{2}\tau^2 + o_p(1)$ , où  $V_n(\theta) = \sum_{k \in S[\mathbf{1}, \mathbf{n}]} (g_{nk}(\theta) - 1)$ .

(ii) Sous (C.3) à (C.5),  $V_n(\theta) \xrightarrow{d} N(0, \tau^2(\theta))$ ,

(iii) Sous (C.1) à (C.5),  $\Lambda_n(\theta) \xrightarrow{d} N(-\frac{1}{2}\tau^2(\theta), \tau^2(\theta))$ . toutes les limites sont sous la probabilité  $P_{n,\theta}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

### 3 La normalité asymptotique locale du modèle bilinéaire spatial du premier ordre

Pour appliquer le théorème 1 au modèle (1.1), on doit d'abord préciser  $\theta$ ,  $g_{nk}$  ensuite vérifier les conditions (C.1) à (C.5) de la section 2. Nous verrons qu'il est nécessaire de supposer que le modèle (1.1) admet des moments d'ordres quatre, pour cela  $a$  et  $b$  doivent satisfaire la condition

$$a^4 + 6a^4\sigma^2 + a^4\sigma^4 < 1, \quad (3.1)$$

On supposera aussi que (1.1) satisfait la condition d'inversibilité

$$|a - ab| \sqrt{\text{Var}\{X(\mathbf{t})\}} < 1 \quad (3.2)$$

La densité de  $X_t$  étant inconnue, grace à l'invertibilité du modèle on peut exprimer  $e_t$  comme fonction de  $(X_{t-i})_{i \in S[0, \infty]}$ , comme  $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}^2}$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma^2$ , on peut déduire la densité  $f_{n,\theta}(X(n) = \{X_i, i \in S[\mathbf{0}, \mathbf{n}]\})$  qui est l'image de  $e(n) = \{e_i, i \in S[\mathbf{0}, \mathbf{n}]\}$  par une fonction bijective avec un jacobien égal à 1).

Signalons d'abord qu'ici  $\theta = (a, b)'$ ,  $h = (h_1, h_2)'$  et  $\theta_n = \left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}, b + h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right)$ .  
 Pour  $k = (k_1, k_2)$  nous avons

$$(X_k / \{X_s = x_s, s \prec k\}, \theta) \sim N(F, \sigma^2) \text{ et } (X_k / \{X_s = x_s, s \prec k\}, \theta_n) \sim N(F_n, \sigma^2)$$

où  $F = ax_{k_1, k_2-1} + bx_{k_1-1, k_2} - abx_{k_1-1, k_2-1} + ax_{k_1, k_2-1}e_{k_1, k_2-1} - abx_{k_1-1, k_2-1}e_{k_1-1, k_2-1}$ ,  
 et

$$F_n = \left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1, k_2-1} + \left(b + h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1-1, k_2} - \left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}\right) \left(b + h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1-1, k_2-1} + \\
\left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1, k_2-1} e_{k_1, k_2-1} - \left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}\right) \left(b + h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1-1, k_2-1} e_{k_1-1, k_2-1}.$$

Après quelques calculs, nous avons

$$g_{nk} = \exp(H_{nk}), \text{ où } H_{nk} = r^{-\frac{1}{2}} \sigma^{-2} e_k B_k - (2r\sigma^2)^{-1} B_k^2, .$$

avec  $B_k = h_1 x_{k_1, k_2-1} + h_2 x_{k_1-1, k_2} - \left(ah_2 + bh_1 + h_1 h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1-1, k_2-1} + \\
h_1 x_{k_1, k_2-1} e_{i, j-1} - \left(ah_2 + bh_1 + h_1 h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1-1, k_2-1} e_{k_1-1, k_2-1}$ . On suppose que  $X_{i_0}$  est fixé à  $x_{i_0}$  et  $e_{i_0} = 0$ . Il reste maintenant à vérifier les (C.1) à (C.5) pour obtenir la propriété LAN pour le modèle 1.1.

**Theorem 2** *Pour le modèle (1.1) et sous les conditions (3.1) et (3.2), le rapport du lo de vraisemblance est asymptotiquement normal localement dans le sens du Théorème 1.*

## References

- Andel, J. (1989) : On nonlinear models for btime series. *Statistics* 20, 4, 615-632.
- Choi, B. S. (1992). *ARMA models Identification*. Springer, New York.
- D. Guégan, Different representations for bilinear models, *J. Time Series Anal.* 8 (4) (1987) 389-408.
- Guyon, X. (1982) Parameter estimation for a stationary process on a d-dimensional lattice. *Biometrika* **69**, 95-105.

- Liu and Brockwell, P. J. (1988) On the general bilinear time series model.  
*J. Time Ser. Anal.* 10(4), 341-55
- Tjostheim, D. (1978). Statistical spatial series modelling I. *Adv. App. Prob.* Vol. **10**, 130-154.
- Tjostheim, D. (1983). Statistical spatial series modelling II. *Adv. App. Prob.* Vol. **15**, 562-584
- T. Subba Rao, The bispectral analysis of non linear stationary time series with reference to bilinear time series models, in: D.R. Brillinger, P.R. Krishnaiah (Eds.), in: *Handbook of Statistics*, vol.3, 1983, pp. 293-319.