The local asymptotic normality of first order spatial bilinear model

Soumia Kharfouchi

La normalité asymptotique locale du modèle bilinéaire spatial du premier ordre

Soumia kharfouchi
Département de Mathématiques,
Université Mentouri,Constantine, Algérie.
s_ kharfouchi@yahoo.fr

Abstract. This paper is devoted to the Local Asymptotic Normality (LAN) of the log-likelihood ratio for a first order spatial bilinear model. We will establish a general result which covers a large class of spatial discreet ordered models including the spatial bilinear model of first order specified by

$$X_{i,j} = aX_{i,j-1} + bX_{i-1,j} - abX_{i-1,j-1} + aX_{i,j-1}e_{i,j-1} - abX_{i-1,j-1}e_{i-1,j-1} + e_{i,j},$$

where $(e_t)_{t\in\mathbb{Z}^2}$ is a wite noise process in the sense that they are uncorrelated with constant first two moments 0 and σ^2 respectively.

KeyWords: Spatial bilinear model; Local asymptotic normality; Maximum likelihood estimation.

Résumé. Cette note traite le problème de la Normalité Asymptotique Locale (LAN) du rapport du log de vraisenblance pour le modèle bilinéaire spatial du premier ordre. On établit d'abord un résultat général qui couvre une large classe de modèles spatiaux ordonnés y compris le modèle bilinéaire spatial du premier ordre défini par

$$X_{i,j} = aX_{i,j-1} + bX_{i-1,j} - abX_{i-1,j-1} + aX_{i,j-1}e_{i,j-1} - abX_{i-1,j-1}e_{i-1,j-1} + e_{i,j},$$

où $(e_t)_{t\in\mathbb{Z}^2}$ est un champ de bruit blanc avec comme deux premiers moments 0 et σ^2 respectivement.

Mots Clès. Modèle Bilinéaire Spatial; Normalité Asymptotique Locale; Estimation par la methode du Maximum de Vraisemblance.

1 INTRODUCTION

En pratique, de très nombreuses situations sont naturellement modélisées par une famille de variables aléatoires $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}^d}$ comme en météorologie, océanographie, géologie, biologie et agriculture. Ainsi, l'intérêt pour les modèles spatiaux s'est largement accru au cours de ces dernières années, notamment ceux présentant un champ de déplacement bilinéaire. Les exemples sont très variés citons en un dans le domaine de l'imagerie médicale. Il a été fortement prouvé que l'élasticité des tissus biologiques est une donnée pertinente pour localiser et caractériser les tumeurs. De plus l'élasticité est naturellement liée au mouvement local des tissus. Une étude récente d'analyse du mouvement dans les tissus mous a conduit à choisir un modèle bilinéaire du champ de déplacement. Ce modèle prend en compte les changements simultanés de forme et de surface des structures locales et nécessite l'estimation d'un certain nombre de paramètres. Nous éspérons qu'un modèle bilinéaire spatial peut être la solution idéale permettant d'extraire des paramètres de mouvement spatio-temporels à partir d'images échographiques d'un milieu élastique lorsqu'il est soumis à une compression axiale. Les processus ARMA spatiaux ont été abondamment traité par plusieurs chercheurs dont Guyon (1982) et Tjostheim (1978) et (1983), mais il reste beaucoup à faire pour les processus bilinéaires spatiaux, nous proposons dans ce travail l'étude de la normalité asymptotique locale du rapport du log de vraisemblance du modèle bilinéaire spatial du premier ordre défini par

$$X_{i,j} = aX_{i,j-1} + bX_{i-1,j} - abX_{i-1,j-1} + aX_{i,j-1}e_{i,j-1} - abX_{i-1,j-1}e_{i-1,j-1} + e_{i,j}, \tag{1.1}$$

où $(e_t)_{t\in\mathbb{Z}^2}$ est un bruit blanc gaussien, i.e., champ de carré integrable stationnaire gaussien vérifiant pour tout $s, t \in \mathbb{Z}^2$, $E(e_t) = 0$, $E(e_t e_s) = 0$ si $t \neq s$ et $E(e_t^2) = \sigma^2$. Notons que nous devons préciser la notion de passé et de future que nous considérons pour notre modèle et ceci en précisant l'ordre considéré sur $\mathbb{Z}^2$, c'est l'ordre léxicographique qui est l'ordre total défini pour deux points $s = (s_1, s_2)$ et $t = (t_1, t_2)$ de $\mathbb{Z}^2$ par $s \prec t$ (s précede t) si et seulement si $[(s_1 < t_1)$ ou $(s_1 = t_1$ et $s_2 < t_2)]$. cet ordre nous permettra de munir $\mathbb{Z}^2$ de la "topologie de l'ordre" associée à l'ordre lexicographique engendrée par les ensembles $S\langle A, \infty]$ et $S[\infty, B\rangle$ avec A parcourant $\mathbb{Z}^2$ où pour B élément de $\mathbb{Z}^2$ tel que $A \preceq B$ et $A \neq B$ on définit les ensembles, $S[A,B] = \{x \in \mathbb{Z}^2 / \ A \preceq x \preceq B\}$, $S\langle\infty, B] = \{x \in \mathbb{Z}^2 / \ x \preceq B\}$, $S[A, \infty\rangle = \{x \in \mathbb{Z}^2 / \ A \preceq x\}$ et $S[A, B[= \{x \in \mathbb{Z}^2 / \ A \preceq x \preceq B\} \diagdown \{B\}$.

On commence dans la section 2 par établir un résultat général qui donne la normalité asymptotique locale (LAN) pour un modèle spatial discret ordonné. Puis dans la section 3, on utilise le résultat de la section 2 pour établir la propriété LAN pour le modèle bilinéaire spatial (1.1)

2 La normalité asymptotique locale d'un modèle spatial discret ordonné

Cette section traite le problème de la propriété LAN. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}_+^2}$ un modèle spatial discret et ordonné défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$ où Ω et $\mathcal{F}$ sont respectivement l'espace d'echantillonnage et la σ-algèbre correspondant à $X = \left\{X_i,\ \ i \in \mathbb{Z}_+^2\right\}$ et P_θ est une mesure de probabilité indéxée par un paramètre inconnu $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$. Soit $(\Omega_{\mathbf{n}}, \mathcal{F}_{\mathbf{n}}, P_{\mathbf{n},\theta})$ la restriction de $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$ au vecteur d'echantillonnage $X(\mathbf{n}) = \{X_i,\ \ i \in S[\mathbf{0}, \mathbf{n}]\}$, pour $\mathbf{n} = (n, n)$ on peut écrire $X(\mathbf{n}) = \{X_{i_0}, \ldots, X_{i_r}\}$ où $r = (n+1)^2$ et $i_0 \prec i_1 \prec \ldots \prec i_r$. Soit $\theta_{\mathbf{n}} = \theta + hr^{-\frac{1}{2}}$, où h est un $(k \times 1)$ vecteur de nombres réels. Considérons le rapport du log de vraisemblance

$$\Lambda_n(\theta) = \log\{f_{n,\theta_{\mathbf{n}}}/f_{n,\theta}\},$$

où $f_{\mathbf{n},\theta}$ est le densité correspondant à $P_{\mathbf{n},\theta}$ relativement à une certaine mesure $\mu_{\mathbf{n}}$. Ce même rapport peut être obtenu à partir de la vraisemblance conditionnelle en définissant les densités conditionnelles

$$f_{i_m,\theta}(x_{i_m}/x_s,\ s \prec i_m) = \left\{f_{i_m,\theta}/f_{i_{m-1},\theta}\right\}, \text{ pour tout } 1 \leq m \leq r,$$

et notons

$$g_{n,k}(\theta) = \{f_{k,\theta_n}(x_k/x_s,\ s \prec k)\}\{f_{k,\theta}(x_k/x_s,\ s \prec k)\}.$$

Nous avons alors

$$\Lambda_n(\theta) = \sum_{k\in S[\mathbf{1},\mathbf{n}]} \log g_{n,k}(\theta).$$

Considerons maintnant les conditions de régularités suivantes. les conditions 1et 2 concernent θ et $g_{n,k}$, la condition 3 indique que Z_{nk} sont des différences de martinguales de moyennes nulles pour tout $\mathbf{n}$ relativement à l'ordre léxicographique defini par Huang (1992), les conditions 4 et 5 nous permettent d'appliquer le théorème central limite pour des différences de martinguales de Huang.

$(C\ 1)$ $\underset{k\in S[\mathbf{1},\mathbf{n}]}{max} |g_{nk}(\theta) - 1| = o_p(1)$;

$(C\ 2)$ $\sum_{k\in S[\mathbf{1},\mathbf{n}]} (g_{nk}(\theta) - 1)^2 = \tau^2(\theta) + o_p(1)$, où $\tau^2(\theta)$ est non-aléatoire et positif:

$(C\ 3)$Il existe une suite de variables aléatoires $\{Z_{nk}(\theta)\}$, $k \in S[\mathbf{1},\mathbf{n}]$, $n = 1, 2, \cdots$,tel que

$$\sum_{k\in S[\mathbf{1},\mathbf{n}]} (g_{nk}(\theta) - 1) = \sum_{k\in S[\mathbf{1},\mathbf{n}]} Z_{nk}(\theta) + o_p(1), \text{ et } E(Z_{nk}(\theta)/Z_{ns}(\theta), \ k \prec s) = 0 \ p.s.$$

pour tout $k \in S[\mathbf{1},\mathbf{n}]$, et $n \geq 1$;

$(C\ 4)\ \frac{1}{n^2}\sum_{k\in S[\mathbf{1},\mathbf{n}]} EZ_{nk}^2(\theta) \xrightarrow{P} \tau^2(\theta)$ quand $n \to \infty$;

$(C\ 5)\sup E|Z_{nk}(\theta)|^2 1_{\{|Z_{nk}(\theta)|>C\}} \to 0$ quand $C \to \infty$

Theorem 1 (*Local Asymptotic Normality*)

(i) Sous $(C.1)$ et $(C.2)$ nous avons $\Lambda_n(\theta) = V_n(\theta) - \frac{1}{2}\tau^2 + o_p(1)$, où $V_n(\theta) = \sum_{k\in S[\mathbf{1},\mathbf{n}]} (g_{nk}(\theta) - 1)$.

(ii) Sous $(C.3)$ à $(C.5)$, $V_n(\theta) \xrightarrow{d} N(0, \tau^2(\theta))$,

(iii) Sous $(C.1)$ à $(C.5)$, $\Lambda_n(\theta) \xrightarrow{d} N\left(-\frac{1}{2}\tau^2(\theta), \tau^2(\theta)\right)$. toutes les limites sont sous la probabilité $P_{n,\theta}$ quand $n \to \infty$.

3 La normalité asymptotique locale du modèle bilinéaire spatial du premier ordre

Pour appliquer le théorème 1 au modèle (1.1), on doit d'abord préciser θ, g_{nk} ensuite vérifier les conditions $(C.1)$ à $(C.5)$ de la section 2. Nous verrons qu'il est nécessaire de supposer que le modèle (1.1) admet des moments d'ordres quatre, pour cela a et b doivent satisfaire la condition

$$a^4 + 6a^4\sigma^2 + a^4\sigma^4 < 1, \tag{3.1}$$

On supposera aussi que (1.1) satisfait la condition d'inversibilité

$$|a - ab|\sqrt{Var\{X(\mathbf{t})\}} < 1 \tag{3.2}$$

La densité de X_t étant inconnue, grace à l'invertibilité du modèle on peut exprimer e_t comme fonction de $(X_{t-i})_{i\in S[0,\infty]}$, comme $(e_t)_{t\in\mathbb{Z}^2}$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de variance σ^2, on peut déduire la densité $f_{n,\theta}$ ($X(n) = \{X_i, \ \ i \in S[\mathbf{0},\mathbf{n}]\}$ qui est l'image de $e(n) = \{e_i, \ \ i \in S[\mathbf{0},\mathbf{n}]\}$ par une fonction bijective avec un jacobian égal à 1).

Signalons d'abord qu'ici $\theta = (a,b)'$, $h = (h_1, h_2)'$ et $\theta_n = \left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}, b + h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right)$. Pour $k = (k_1, k_2)$ nous avons

$$\left(X_k/_{\{X_s=x_s,\ s\prec k\},\theta}\right) \sim N\left(F, \sigma^2\right) \text{ et } \left(X_k/_{\{X_s=x_s,\ s\prec k\},\theta_n}\right) \sim N\left(F_n, \sigma^2\right)$$

où $F = ax_{k_1,k_2-1} + bx_{k_1-1,k_2} - abx_{k_1-1,k_2-1} + ax_{k_1,k_2-1}e_{k_1,k_2-1} - abx_{k_1-1,k_2-1}e_{k_1-1,k_2-1}$,
et
$F_n = \left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1,k_2-1} + \left(b + h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1-1,k_2} - \left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}\right)\left(b + h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1-1,k_2-1} + \left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1,k_2-1}e_{k_1,k_2-1} - \left(a + h_1 r^{-\frac{1}{2}}\right)\left(b + h_2 r^{-\frac{1}{2}}\right) x_{k_1-1,k_2-1}e_{k_1-1,k_2-1}$.

Après quelques calculs, nous avons

$$g_{nk} = \exp\left(H_{nk}\right), \text{ où } H_{nk} = r^{-\frac{1}{2}}\sigma^{-2}e_k B_k - \left(2r\sigma^2\right)^{-1} B_k^2, \ .$$

avec $B_k = h_1 x_{k_1,k_2-1} + h_2 x_{k_1-1,k_2} - \left(ah_2 + bh_1 + h_1 h_2 r^{\frac{-1}{2}}\right) x_{k_1-1,k_2-1} + h_1 x_{k_1,k_2-1}e_{i,j-1} - \left(ah_2 + bh_1 + h_1 h_2 r^{\frac{-1}{2}}\right) x_{k_1-1,k_2-1}e_{k_1-1,k_2-1}$. On suppose que X_{i_0} est fixé à x_{i_0} et $e_{i_0} = 0$. Il reste maintenant à vérifier les $(C.1)$ à $(C.5)$ pour obtenir la propriété LAN pour le modèle 1.1.

Theorem 2 *Pour le modèle* (1.1) *et sous les conditions* (3.1) *et* (3.2), *le rapport du lo de vraisemblanceest asymptotiquement normal localement dans le sens du Théorème 1.*

References

Andel, J. (1989) : On nonlinear models for btime series. Statistics 20, 4, 615-632.

Choi, B. S. (1992). ARMA models Identification. Springer, New York.

D. Guégan, Different representations for bilinear models, J. Time Series Anal. 8 (4) (1987) 389-408.

Guyon, X. (1982) Parameter estimation for a stationary process on a d-dimensional lattice. Biometrika **69**, 95-105.

Liu and Brockwell, P. J. (1988) On the general bilinear time series model. *J. Time Ser. Anal.* 10(4), 341-55

Tjostheim, D. (1978). Statistical spatial series modelling I. Adv. App. Prob. Vol. **10**, 130-154.

Tjostheim, D. (1983). Statistical spatial series modelling II. Adv. App. Prob. Vol. **15**, 562-584

T. Subba Rao, The bispectral analysis of non linear stationary time series with reference to bilinear time series models, in: D.R. Brillinger, P.R. Krishnaiah (Eds.), in: Handbook of Statistics, vol.3, 1983, pp. 293-319.