Influence de la variabilité du taux de défaillance sur la fonction de survie du modèle exponentiel

Lambert Pierrat, Gérard d'Aubigny

INFLUENCE DE LA VARIABILITÉ DU TAUX DE DÉFAILLANCE SUR LA FONCTION DE SURVIE DU MODÈLE EXPONENTIEL

Lambert PIERRAT(*) (**) & Gérard d'AUBIGNY (*)

(*)Laboratoire Jean Kuntzmann, Département Statistique
LJK - MS^3 - CNRS UMR 5224, Grenoble,
e-mail : Gerard.d-Aubigny@upmf-grenoble.fr

(**) LJ-Consulting, Saint Martin d'Hères,
e-mail : e_zainescu@yahoo.com

Résumé: On suppose souvent que les composants électroniques ont un taux de défaillance constant durant la partie utile de leur cycle de vie. En réalité, dans une population de composants, le taux de défaillance est une variable aléatoire, traduisant les variabilités technologique et fonctionnelle. Nous montrons que l'utilisation d'une loi *a priori* normale débouche sur une loi de survie temporellement bornée, ce qui est un résultat incompatible avec la réalité physique. On peut éliminer cette anomalie en considérant une loi normale tronquée à l'origine, mais ceci conduit à une loi de survie dont la forme est compliquée. Nous nous plaçons dans un contexte Bayésien, pour montrer que le choix d'une loi *a priori* gamma, conjuguée naturelle de la loi exponentielle, est préférable. Ceci permet en particulier de tenir compte facilement de la variabilité et d'obtenir une loi de survie simple et facilement interprétable.

Abstract: One often assumes that electronic components have a constant failure rate during the useful part of their life cycle. In fact, on a population of such components, the failure rate defines a random variable resulting from technological and functional variability sources. We show that the use of an *a priori* normal distribution leads to a time limited survival function, while this result is inconsistent with the physical reality. One can eliminate this anomaly by considering a normal distribution, truncated at zero, but this one leads to a complicated form of the survival function. In a Bayesian context, it is preferable to choose an *a priori* gamma distribution, which is a natural conjugate of the exponential one. Then, it becomes easy to take into account the physical variability and to obtain a simple and interpretable survival function.

1 Introduction et Objectifs

La plupart des dispositifs techniques (composants ou systèmes) est caractérisée par un taux de défaillance quasi-constant durant la partie utile de leur cycle de vie. Le modèle de fiabilité correspondant est fondé sur la loi exponentielle, qui traduit l'absence de mémoire d'un processus d'événements aléatoires. A la dispersion intrinsèque de ce modèle, s'ajoutent généralement d'autres sources de variabilité liées aux imperfections technologiques ou à la variabilité des contraintes d'environnement. Si l'on tient compte de la variabilité du taux de défaillance, la fonction de survie résultante est celle que l'on peut observer, nécessairement différente de la fonction de survie théorique. L'introduction d'une telle variabilité dans le modèle peut faire l'objet de diverses approches, dont l'une, assez habituelle, consiste à utiliser une loi normale. Un tel choix pourrait se justifier par des considérations d'entropie, dès lors que l'information disponible se réduit à une moyenne et à une variance. Malheureusement, ceci débouche sur une fonction de survie dont la forme n'est pas compatible avec le comportement physique attendu. En effet, la prévision de durée de vie est limitée temporellement, en raison inverse de la variance qui caractérise le taux de défaillance. On montre que ce résultat apparemment paradoxal peut être corrigé en introduisant une troncature adéquate de la loi normale, ceci afin d'éliminer les valeurs négatives du taux de défaillance. En fait, un résultat plus simple et plus facilement interprétable peut être obtenu en considérant que le taux de défaillance est une variable aléatoire distribuée suivant une loi *a priori* conjuguée de la loi exponentielle. Une comparaison objective entre une telle loi et la loi normale montre que si aucune d'entre elles ne peut satisfaire toutes les conditions requises, la loi conjuguée est celle qui respecte le mieux les contraintes imposées par la pratique. Ces considérations tendent à justifier le recours à une approche Bayésienne, pour autant que la loi *a priori* soit compatible avec la réalité du problème. Dans l'article, on formule les trois fonctions de survie en question et on en donne une expression analytique exacte.

2 Dispersion caractérisée par une loi de Gauss

Les circuits électroniques sont généralement constitués d'un grand nombre de composants et une borne supérieure de leur probabilité de défaillance est définie par celle d'un système série équivalent. Chaque composant est caractérisé par un taux de défaillance constant , lequel peut être déterminé en utilisant les guides en vigueur, tels que par exemple DGA (2004). En fait, l'hypothèse habituelle d'un taux constant (distribution exponentielle) peut se justifier par le fait que, même s'il est en réalité temporellement variable, la distribution correspondante (Weibull par exemple) reste mal connue. Dans ces conditions, on peut considérer un taux constant affecté d'une incertitude et la problématique consiste à propager ces incertitudes à travers la fonction de structure Lindqvist (1993). Si l'on se ramène à la fonction de survie relative à un composant, celle-ci s'écrit comme le complément de la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ, soit:

$$S(t, \lambda) = e^{-\lambda t}$$

Lorsqu'on prend en compte la variabilité du paramètre de la loi exponentielle, on obtient l'espérance de la loi de survie sous la forme générale:

$$\mathbb{E}(S(t, \lambda)) = \int_{\Lambda} e^{-\lambda t} f(\lambda) d\lambda \tag{1}$$

où l'intégrale est définie sur le domaine Λ de définition de la densité de probabilité $f(\lambda)$. Le choix de cette loi du paramtre dépend de diverses considérations, mais essentiellement du niveau d'information disponible et de la simplicité des résultats. Une information minimale correspondant à la connaissance d'une valeur moyenne μ et d'un écart-type associé σ, conduit naturellement à retenir une loi de Gauss $LG(\mu, \sigma^2)$, sur la base d'un critère d'entropie:

L'intégrale (1) ci-dessus, calculée entre $-\infty$ et $+\infty$, possède une solution explicite simple qui peut être comparée à la solution déterministe de base, non perturbée:

$$\mathbb{E}(S(t, \mu, \sigma^2)) = \exp\left\{\mu \ t[1 - (\sigma\sqrt{\frac{t}{2\mu}})^2]\right\}$$

On constate que l'existence de cette fonction de survie dépend de l'argument de l'exponentielle, dont le signe doit être négatif , d'où la condition:

$$0 \leq t < \frac{\sqrt{2\mu}}{\sigma}$$

qui correspond à une limitation temporelle de la fonction de survie inversement proportionnelle à la variance ou au carré du coefficient de variation de la loi normale. Cette solution, considérée par Fankhauser (2001), est incompatible avec le processus d'extinction illimité qu'on peut attendre de la fonction de survie.

3 Prise en compte d'une loi de Gauss tronquée

Cette anomalie résulte évidemment, ainsi qu'on va le montrer, du support illimité de la loi normale. Afin de rétablir une solution acceptable, il est possible d'éliminer les valeurs négatives de la variable en introduisant une troncature de la loi normale. L'intégrale correspondante, soit:

$$\mathbb{E}(S(t, \mu, \sigma^2)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \exp -\left\{\lambda \ t + [\lambda - \frac{\mu}{\sqrt{2}\sigma}]\right\} \, d\lambda$$

possède une solution explicite qui s'écrit :

$$\mathbb{E}(S(t,\mu,\sigma^2)) = \frac{1}{2}\exp\big\{-\mu\ t + \frac{\sigma t}{\sqrt{2}}\big\}.\big\{1 - \mathrm{erf}(\sigma t - \frac{\mu}{\sqrt{2}})\big\}$$

a l'aide de la fonction d'erreur $\mathrm{erf}(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int_0^x \exp(-t^2)dt$. Cette fonction de survie n'est plus limitée temporellement, puisque sa limite quand $t \to \infty$ est:

$$\mathbb{E}(S(\infty,\mu,\sigma^2)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{\exp(-\mu\ t)}{t}$$

Ainsi, l'anomalie précédente disparaît, mais au prix d'une solution plus compliquée incluant la présence de la fonction intégrale d'erreur.

4 Introduction d'une loi tronquée

Dans un contexte Bayésien, l'introduction d'une loi *a priori* conjuguée naturelle de la loi de survie conduit à une solution appartenant à la même famille, *cf.* Raiffa and Schlaifer (1961). Dans le cas de la loi exponentielle, la loi *a priori* conjuguée naturelle est la loi gamma:

$$f(\lambda,\eta,\beta) = \frac{1}{\eta\ \Gamma(\beta)}(\frac{\lambda}{\eta})^{\beta-1}\ \exp(-\frac{\lambda}{\eta}) \tag{2}$$

dont l'espérance mathématique et le coefficient de variation s'identifient respectivement à $\beta\eta$ et $1/\sqrt{\beta}$. Cette loi présente plusieurs avantages par rapport à une loi normale tronquée. En particulier:

- elle est définie sur le support physique $]0,+\infty[$;
- elle possède une asymétrie positive qui correspond à l'existence probable de valeurs élevées;
- elle conduit à la solution explicite très simple suivante: $\mathbb{E}(S(t,\eta,\beta)) = (1+\eta t)^{-\beta}$. Si l'on fait tendre le coefficient de variation vers 0 (donc β vers $+\infty$, tout en maintenant constant le produit $\lambda = \beta\eta$, cette solution tend vers l'exponentielle décroissante qui correspond à un taux de défaillance déterministe.

Par ailleurs, on notera que cette approche permet de justifier le fait qu'une population de composants caractérisés par des taux de défaillance statistiquement dispersés, présente un taux de défaillance décroissant tel que:

$$h(t,\eta,\beta)) = \beta\eta(1+\eta t)^{-1}.$$

Ce paradoxe apparent a été levé par Barlow (1985). Cet auteur a en effet montré dans un contexte Bayésien, qu'un taux de défaillance décroissant n'implique pas nécessairement le choix d'une distribution *a priori* ayant un taux de défaillance décroissant.

5 Conclusion

Dans le cas de composants caractérisés par des taux de défaillance constants, on peut adopter un modèle équivalent de composant unique ayant un taux de défaillance aléatoire. Le choix de la distribution correspondante doit à la fois ,être réaliste et conduire à une solution suffisamment simple. De ce point de vue, une distribution *a priori* normale est irréaliste parce qu'elle introduit une limitation temporelle de la fonction de survie. Cette anomalie peut être éliminée par une troncature de la loi normale, mais la solution résultante est inutilement compliquée. Par contre, dans le contexte Bayésien, une distribution *a priori* gamma, conjuguée naturelle de la loi exponentielle, est un choix réaliste.

Bibliographie

[1] Barlow R.E. , (1985), A Bayes explanation of an apparent failure rate paradox, *IEEE Transactions on Reliability*, R-34, V2, 107-108.

[2] Fankhauser H.R., (2001), Confidence margins and limiting consequences of uncertainty, *ESREL'2001*, 165-172.

[3] DGA, (2004), *Guide FIDES: Méthodologie de fiabilité pour les systmes électroniques.*

[4] Lindqvist B., (1993), Methods for evaluating the uncertainty of system reliability estimate, *ESREL'93*, 911-921.

[5] Raiffa H. and Schlaifer R. , (1961), *Applied Statistical Decision Theory*, Harvard University, Boston.