Un modèle de dégradation basé sur un processus gamma et le mouvement brownien

Laurent Bordes, Christian Paroissin, Ali Salami

▶ **To cite this version:**

Laurent Bordes, Christian Paroissin, Ali Salami. Un modèle de dégradation basé sur un processus gamma et le mouvement brownien. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. inria-00386711

HAL Id: inria-00386711

https://hal.inria.fr/inria-00386711

Submitted on 22 May 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle de dégradation basé sur un processus gamma et le mouvement brownien

L. Bordes[1], C. Paroissin[2] & A. Salami[3]

[1] *Université de Pau et des Pays de l'Adour, Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - UMR CNRS 5142, Avenue de l'Université, 64013 Pau cedex, France, laurent.bordes@univ-pau.fr*
[2] *Université de Pau et des Pays de l'Adour, Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - UMR CNRS 5142, Avenue de l'Université, 64013 Pau cedex, France, cparoiss@univ-pau.fr*
[3] *Université de Pau et des Pays de l'Adour, Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - UMR CNRS 5142, Avenue de l'Université, 64013 Pau cedex, France, ali.salami@univ-pau.fr*

Mots-clés : Qualité - fiabilité.

Résumé : Une nouvelle approche est proposée pour décrire la dégradation d'un système. Cette approche consiste à considérer la dégradation $(D_t)_{t\geq 0}$ comme la somme d'un processus gamma $(Y_t)_{t\geq 0}$ et d'un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$, indépendant de $(Y_t)_{t\geq 0}$, multiplié par une constante $\tau \in \mathbb{R}$. On suppose que le processus gamma $(Y_t)_{t\geq 0}$ est stationnaire. Pour n trajectoires indépendantes observées à des instants $t_j = jT/N$ pour $j \in \{1, \dots, N\}$, on estime les paramètres du modèle de dégradation par la méthode des moments. Ensuite, on étudie le comportement asymptotique des estimateurs.

Abstract : A new approach is proposed to describe the degradation of a system. This approach is to consider the degradation $(D_t)_{t\geq 0}$ as the sum of a gamma process $(Y_t)_{t\geq 0}$ and a Brownian motion $(B_t)_{t\geq 0}$ independent of $(Y_t)_{t\geq 0}$, multiplied by a constant $\tau \in \mathbb{R}$. We assume that the gamma process $(Y_t)_{t\geq 0}$ is stationary. For n independent trajectories observed at instants $t_j = jT/N$ for $j \in \{1, \dots, N\}$, we estimate the parameters of the degradation model by the method of moments. Then, we study the asymptotic behaviour of the estimators.

1 Introduction et modèle

Pour certains types de modèles de dégradation, le processus caractérisé par des accroissements non négatifs et indépendants est approprié. L'un de ces processus est le processus gamma. Un processus gamma implique que l'état d'un système à travers le temps ne s'améliore pas, et donc ce système ne peut pas revenir à son état initial. Ce processus est fréquemment proposé dans la littérature [8] non seulement parce que les calculs sont souvent explicites mais aussi parce que ce processus modélise bien la variabilité temporelle de la détérioration et permet de déterminer des politiques de maintenance optimales.

Depuis les travaux d'Abdel-Hameed [1], plusieurs auteurs ont proposé le processus gamma comme processus de dégradation [3 − 6]. Par ailleurs, Barker [2] modélise la dégradation d'un système par une fonctionnelle d'un mouvement brownien multidimensionnel. Ce processus n'est plus monotone, mais permet de prendre en considération de petites réparations au cours du temps.

Aussi, nous proposons un modèle de dégradation $D = (D_t)_{t \geq 0}$ qui combine ces deux approches de la manière suivante :

$$\forall t \geq 0\,,\; D_t = Y_t + \tau B_t$$

où $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus gamma de paramètres $\xi \in \mathbb{R}_+$ et η (une fonction strictement croissante) et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. Ce modèle est défini pour $\tau \in \mathbb{R}$ et les deux processus sont indépendants. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\tau \geq 0$ car τB_t et $-\tau B_t$ ont la même loi pour tout $t \geq 0$.

2 Estimation des paramètres

On suppose qu'on observe $D^{(1)}, \ldots, D^{(n)}$ n processus de dégradation indépendants et identiquement distribués à des instants équirépartis $t_j = jT/N$ pour $j \in \{1, \ldots, N\}$. Les paramètres du modèle sont estimés par la méthode des moments. Quelques propriétés asymptotiques sont ensuite étudiées.

2.1 Méthode des moments

En utilisant les trois premiers moments, on va déterminer les estimateurs des paramètres par la méthode des moments. Pour tout $j \in \{1, \ldots, N\}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note par $m^{(k)}$ le moment non centré d'ordre k des accroissements $D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)}$ (comme le processus de dégradation est à accroissements stationnaires et comme $t_j = jT/N$, ces accroissements ne dépendent ni de i ni de j). Les trois premiers moments sont égaux à :

$$\begin{aligned}
m^{(1)} &= \frac{\alpha T}{N\xi}, \\
m^{(2)} &= \frac{m^{(1)}}{\xi} + \left(m^{(1)}\right)^2 + \frac{\tau^2 T}{N}, \\
m^{(3)} &= m^{(1)} \left[\frac{2}{\xi^2} - 2\left(m^{(1)}\right)^2 + 3m^{(2)}\right].
\end{aligned}$$

Soit $\hat{m}$ l'estimateur empirique des trois premiers moments. L'estimateur $\hat{\theta} = \left(\hat{\xi}, \hat{\alpha}, \hat{\tau}^2\right) =$

$g(\hat{m})$ par la méthode des moments de $\theta = (\xi, \alpha, \tau^2)$ est défini par :

$$\begin{aligned}
\hat{\xi} &= \sqrt{\frac{2\hat{m}^{(1)}}{\hat{m}^{(3)} + 2\left(\hat{m}^{(1)}\right)^3 - 3\hat{m}^{(1)}\hat{m}^{(2)}}}\,, \\
\hat{\alpha} &= \frac{N\hat{\xi}\hat{m}^{(1)}}{T} = \frac{N\hat{m}^{(1)}}{T}\sqrt{\frac{2\hat{m}^{(1)}}{\hat{m}^{(3)} + 2\left(\hat{m}^{(1)}\right)^3 - 3\hat{m}^{(1)}\hat{m}^{(2)}}}\,, \\
\hat{\tau}^2 &= \frac{N\left[\hat{m}^{(2)} - \hat{m}^{(1)}/\hat{\xi} - \left(\hat{m}^{(1)}\right)^2\right]}{T} \\
&= \frac{N}{T}\left[\hat{m}^{(2)} - \frac{\sqrt{\hat{m}^{(1)}\left(\hat{m}^{(3)} + 2(\hat{m}^{(1)})^3 - 3\hat{m}^{(1)}\hat{m}^{(2)}\right)}}{\sqrt{2}} - \left(\hat{m}^{(1)}\right)^2\right].
\end{aligned}$$

On note que si $n = 1$, alors on observe une trajectoire à plusieurs instants tandis que si $N = 1$, alors on observe n trajectoires au même instant T.

2.2 Propriétés de l'estimateur

On commence par montrer l'identifiabilité de θ et la consistance de l'estimateur $\hat{\theta}$. Comme les accroissements $D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)}$ sont indépendants et identiquement distribués, $\hat{m}$ converge presque sûrement vers m quand n tend vers l'infini. Comme la fonction g est continue, on obtient par des méthodes classiques (voir [7]) que :

$$\hat{\theta} = g(\hat{m}) \xrightarrow[n\to\infty]{ps} g\left(m(\theta)\right) = \theta.$$

On montre ensuite la normalité asymptotique de l'estimateur. En appliquant la δ-méthode (voir à nouveau [7]), on montre la proposition suivante.

Proposition 1 *Pour tout $\theta \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+$, on a à N fixé :*

$$\sqrt{nN}\left(\hat{\theta} - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N\left(0, G\Sigma G^T\right),$$

où $\Sigma = (\sigma_{kl})_{1\leq k\leq l\leq 3}$ est la matrice de variance-covariance des accroissements $D_{t_j}^{(i)} - D_{t_{j-1}}^{(i)}$ telle que :

$$\forall 1 \leq k \leq l \leq 3,\ \sigma_{kl} = m^{(k+l)} - m^{(k)}m^{(l)}$$

et où G est la matrice des dérivées partielles de θ par rapport aux $m^{(i)}$ pour $i \in \{1, \ldots, 3\}$.

D'autres régimes asymptotiques seront étudiés, en particulier le cas où n est fixé et N tend vers l'infini ainsi que le cas où n et N tendent vers l'infini tous les deux (dans ce cas, il peut y avoir dépendance entre N et n).

Bibliographie

[1] M. Abdel-Hameed (1975). A gamma wear process. *IEEE Trans. Reliab.*, Vol. 24(2), 152-153.

[2] Barker C. (2006) *Maintenance Policies to Guarantee Optimal Performance of Stochastically Deteriorating Multi-Component Systems*. Centre for Risk Management, Reliability and Maintenance. School of Enginerring and Mathematical Sciences. City University, London.

[3] Crowder M., Lawless J. (2007). On a scheme for a predictive maintenance. *European journal of Operational Research*, Vol. 176, 1713-1722.

[4] Lawless J., Crowder M. (2004). Covariates and Random Effects in a Gamma Process Model with Application to Degradation and Failure. *Lifetime Data Analysis*, Vol. 10, 213-227.

[5] Park C., Padget W.J. (2005). Accelerated Degradation Models for Failure Based on Geometric Brownian Motion and Gamma Processes. *Lifetime Data Analysis*, Vol. 11, 511-527.

[6] Singpurwalla N.D. (1997). *Gamma processes and their generalizations : An overview Engineering Probabilistic Design and Maintenance for Flood Protection*, Kluwer Acd. Publishers, 67-73.

[7] van der Vaart A.W. (1998) *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press.

[8] van Noortwijk J.M. et al. (2007). Gamma processes and peaks-over-threshold distributions for time-dependent reliability, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 92, 1651-1658.