Estimateurs du minimun de la distance de Hellinger des processus linéaires à longue mémoire

Armel Landry Bitty, Ouagnina Hili

Estimateurs du Minimum de Distance d'Hellinger des processus linéaires à Longue Mémoire

Armel Landry BITTY* and *Ouagnina HILI*†

$*$: *Laboratoire de Mathematiques de l'Université d'Abobo − Adjamé et Departement de Mathematiques et Informatique del'Institut National Polytechnique Félix houphouët Boigny de Yamoussoukro,* 01 *BP* 8458 *Abidjan* 01, *Côte d'Ivoire* (*IvoryCoast*). *E − mail* : *allbye1@yahoo.fr*

$\dagger$: *Departement de Mathematiques et Informatique del'Institut National Polytechnique Félix houphouët Boigny de Yamoussoukro,* *BP* 1911 *Yamoussoukro, Côte d'Ivoire* (*IvoryCoast*). *E − mail* : *o_hili@yahoo.fr*

Résumé. On considère le processus linéaire $(X_t,\ t \in \mathbb{Z})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, défini de la manière suivante: $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\theta)\varepsilon_{t-i}$ où $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variable aléatoire dans $\mathbb{R}$, indépendants et identiquement distribués, et où $\theta \in \Theta$ avec $\Theta \subset \mathbb{R}^q$. $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est supposé un processus linéaire, gaussien et à longue mémoire. On se propose, dans cette note, d'estimer le paramètre θ par la méthode du Minimum de Distance d'Hellinger. On établit, sous certaines conditions, des théorèmes limites de l'estimateur ainsi obtenu.

Hellinger Distance Estimates of Linear Long Memory Processes

Abstract. In the present paper, a framework for parametric estimation in linear time series is developed. Strong consistency and some asymptotic properties of minimum Hellinger distance estimates for a determined class of linear models are investigated. The main interest for these estimates is motivated by their robustness under perturbations as it has been emphasized in Beran (1977). The second part of the paper is devoted to the study of the asymptotic distribution of kernel densities which ensure the existence and the optimal properties of the estimates.

1. Introduction Nous considérons un processus gaussien $(X_t)_{1 \leq n}$, centré et à longue mémoire de densité $f(.,\theta)$. Ici, θ est supposé appartenir à un sous-ensemble compact Θ de $\mathbb{R}^q$. Le but de cette note est d'estimer le paramètre vectoriel θ basé sur un nombre fini d'observations $X_1, ..., X_n$ et d'étudier ses propriétés asymptotiques sous certaines conditions. Par ailleurs, dans cette classe d'estimation, Beran(1977, 1978, 1981) et Hili(1995, 1999, 2008) ont utilisé le Minimum de Distance de Hellinger. Cette méthode a été introduite pour la première fois par Beran (1977) dans le cas des observations indépendantes. Ensuite Hili l'a dévéloppé en 1995, 1999 et en 2008 dans le cas des processus fortement mélangeants et des processus bilinéaires. Dans notre cas, nous nous intéréssons aux processus linéaires à mémoire longue. Nous constuisons un estimateur $\hat{\theta}_n$ du paramètre θ. La distance de Hellinger se définie comme suit $||\hat{f}_n^{1/2}(.) - f(.,\theta)^{1/2}||$ où $||.||$ est la norme L_2 et $\hat{f}_n$ est un estimateur non paramétrique de la densité de X_t. Nous définissons alors $\hat{\theta}_n = \arg\min_{\theta \in \Theta}(\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x,\theta)|^2 dx)^{1/2}$ avec $x \in \mathbb{R}$. Dans le paragraphe 2, on définit les notations et les hypothèses utiles. Le paragraphe 3, qui constitue l'essentiel de cette note, concerne les théorèmes-limites (convergence presque sûre et propriétés asymptotiques) de l'estimateur.

2. Théorèmes-Limites

Théorème 1: convergence presque sûre: - *Supposons que de (A_1) à (A_4) sont vérifiées. Si $f(x,\theta)$ est continue sur un support compact et si pour tout x, $f(x,\theta)$ est continue au point θ, pour toute suite (b_n) telle que $b_n \to 0$, $(nb_n)^l \to \infty$ et $b_n = n^{\alpha}L(n) = o(n^{\alpha/l})$ pour tout $3 \leq l \leq 5$, $-1 < \alpha < -1/4$ et L(n) une fonction à variation lente à l'infini. Si θ est à l'intérieur de Θ, alors: $\hat{\theta}_n = T(\hat{f}_n) \to \theta = T(f_\theta)$, p.s. quand $n \to \infty$.*

Indication de preuve: Du lemme 3 $Sup_{x \in \mathbb{R}} \left|\hat{f}_n(x) - f(x,\theta)\right| \to 0$ *a.s. when* $n \to \infty$. Alors $Prob\left\{\lim_{n\to\infty} \hat{f}_n^{1/2}(x) = f^{1/2}(x,\theta) \;\; for \;\; all \;\; x\right\} = 1$. Ainsi, $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f(x,\theta)dx = 1$, alors $H_2\left(\hat{f}_n(x), f(x,\theta)\right) = \left\{\int_{\mathbb{R}} \left[\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x,\theta)\right]^2 dx\right\}^{1/2} \to 0$ *a.s. when* $n \to \infty$. $T(\hat{f}_n(.)) = \hat{\theta}_n$ et $T(f(.,\theta)) = \theta$, du lemme 1 on a le resultat $\diamondsuit$

Theorem 2: distribution asymptotique : - *Supposons que $(A_1)-(A_5)$, et le lemme 3 sont vérifiés. Si (i) $\int_{\mathbb{R}} \ddot{g}(x,\theta)g(x,\theta)dx$ est une matrice $(q\times q)-$matrix non singulière, (ii) $W(.,\theta)$ admet un support compact alors, la distribution asymptotique de $J_n[\hat{\theta}_n - \theta]$ converge vers une loi normale ou vers un processus .*

Indication de preuve: Du lemme 2, on a: $[\hat{\theta}_n - \theta] = \int_{\mathbb{R}} W(x,\theta)\left[\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x,\theta)\right] dx + v_n \int_{\mathbb{R}} \dot{R}(x,\theta)\left[\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x,\theta)\right] dx$, où $v_n \to_p 0$. Pour $a \geq 0$, $b > 0$, nous avons l'égalité algébrique :

$$a^{1/2} - b^{1/2} = 2^{-1}b^{-1/2}(a-b) - \left[2b^{1/2}(a^{1/2}+b^{1/2})^2\right]^{-1}(a-b)^2$$

Les théorèmes 1 et 2 utilisent les lemmes ci-après.

Lemme 1: - *Supposons que (A_3) est vérifiée. Si $f(.,\theta)$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors (i) Pour tout $g \in, \mathfrak{F}$, $B(g) \neq \emptyset$. (ii) Si $B(g)$ est reduit à un seul élément, alors T est continue sur g dans la topologie de Hellinger. (iii) $T(f(.,\theta)) = \theta$ uniquement sur Θ.*

Indication de preuve: Voir le lemme 3.1 dans Hili (1995)$\diamondsuit$

Lemme 2: - *Supposons que* $R_\theta = f^{1/2}(.,\theta)$ *satisfait les hypothèses* $(A_1) - (A_4)$. *Alors,* $\{\hat{f}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(.,\theta)$ *dans la topologie de Hellinger.* $T(\hat{f}_n(.)) = T(f(.,\theta)) + \int_{\mathbb{R}} \rho(x,\theta)\left[\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x,\theta)\right]dx + v_n \int_{\mathbb{R}} \dot{R}_{T(f(.,\theta))}(x)\left[\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x,\theta)\right]dx$ *où* $\rho(x,\theta) = -\left[\int_{\mathbb{R}} \ddot{R}_{T(f(.,\theta))}(x) f^{1/2}(x,\theta)dx\right]^{-1} \dot{R}_{T(f(.,\theta))}(x)$ *avec* v_n *une matrice* $(q\times q)$ *dont ses composantes converge vers zéro quand* $n \to \infty$.

Indication de preuve: Voir théorème 2 dans Beran (1977)$\diamondsuit$

Lemme 3: - *Sous l'hypothèse* (A_4), *si la densité* $f(.,\theta)$ *des observations satisfait les hypothèses* $(A_1) - (A_3)$, *alors* $\hat{f}_n(.)$ *converge vers* $f(.,\theta)$ *dans la topologie de Hellinger, pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

Indication de preuve: Nous avons $\left|\hat{f}_n(x) - f(x,\theta)\right| = \left|\hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x)) + E(\hat{f}_n(x)) - f(x,\theta)\right|$ ainsi, $\left|\hat{f}_n(x) - f(x,\theta)\right| \le \left|\hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x))\right| + \left|E(\hat{f}_n(x)) - f(x,\theta)\right|$. Pour la preuve du second terme de l'inégalité de droite, nous utiliserons Ould (2001) , et Wu, W.B. and Mielnicsuk, J. (2002) pour le premier terme$\diamondsuit$

Références Bibliographiques

Beran, R. (1977): Minimum Hellinger distance estimates for parametric models. Ann. Stat. 5, $445 - 463$.

Beran, R. (1978): An efficient and robust adaptive estimator of location. Ann. Stat. 6, $292 - 313$.

Beran, R (1981): Efficient robust estimation for parametric models. Z. Walrsch. Verw. Gebiete 55, $91 - 109$.

Hili, O. (1995): On the estimation of nonlinear time series models. stochastics and Stochastics Reports 52, $207 - 226$.

Hili, O. (1999): On the estimation of $\beta - ARCH$ models. statist. Proba. Let. 45, $285 - 293$.

Hili, O. (2008): Hellinger distance estimation of general bilinear time series models. Statist. Methodol, vol 5, $119 - 128$.

Ould Haye, M. (2001): $Theor\grave{e}mes$ limites pour les processus à longue $m\acute{e}moire$ $saisonni\grave{e}re$. $Th\grave{e}se$, Num. 3085.

Wu, W.B. and Mielnicsuk, J. (2002): Kernel density estimation for linear processes. The Annal. of Statist. 30, $1441 - 1459$.