

# Estimateurs du minimum de la distance de Hellinger des processus linéaires à longue mémoire

Armel Landry Bitty, Ouagnina Hili

► **To cite this version:**

Armel Landry Bitty, Ouagnina Hili. Estimateurs du minimum de la distance de Hellinger des processus linéaires à longue mémoire. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. 2009. <inria-00386720>

**HAL Id: inria-00386720**

**<https://hal.inria.fr/inria-00386720>**

Submitted on 22 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Estimateurs du Minimum de Distance d'Hellinger des processus linéaires à Longue Mémoire

Armel Landry BITTY\* and Ouagnina HILI†

\* : *Laboratoire de Mathématiques de l'Université d'Abobo – Adjamé et  
Département de Mathématiques et Informatique del'Institut National  
Polytechnique Félix houphouët Boigny de Yamoussoukro, 01 BP 8458  
Abidjan 01, Côte d'Ivoire (IvoryCoast). E – mail : allbye1@yahoo.fr*

† : *Département de Mathématiques et Informatique del'Institut National  
Polytechnique Félix houphouët Boigny de Yamoussoukro, BP 1911  
Yamoussoukro, Côte d'Ivoire (IvoryCoast). E – mail : o\_hili@yahoo.fr*

**Résumé.** On considère le processus linéaire  $(X_t, t \in \mathbb{Z})$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , défini de la manière suivante:  $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} a_i(\theta)\varepsilon_{t-i}$  où  $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variable aléatoire dans  $\mathbb{R}$ , indépendants et identiquement distribués, et où  $\theta \in \Theta$  avec  $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ .  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est supposé un processus linéaire, gaussien et à longue mémoire. On se propose, dans cette note, d'estimer le paramètre  $\theta$  par la méthode du Minimum de Distance d'Hellinger. On établit, sous certaines conditions, des théorèmes limites de l'estimateur ainsi obtenu.

### Hellinger Distance Estimates of Linear Long Memory Processes

**Abstract.** In the present paper, a framework for parametric estimation in linear time series is developed. Strong consistency and some asymptotic properties of minimum Hellinger distance estimates for a determined class of linear models are investigated. The main interest for these estimates is motivated by their robustness under perturbations as it has been emphasized in Beran (1977). The second part of the paper is devoted to the study of the asymptotic distribution of kernel densities which ensure the existence and the optimal properties of the estimates.

**1. Introduction** Nous considérons un processus gaussien  $(X_t)_{1 \leq t \leq n}$ , centré et à longue mémoire de densité  $f(\cdot, \theta)$ . Ici,  $\theta$  est supposé appartenir à un sous-ensemble compact  $\Theta$  de  $\mathbb{R}^q$ . Le but de cette note est d'estimer le paramètre vectoriel  $\theta$  basé sur un nombre fini d'observations  $X_1, \dots, X_n$  et d'étudier ses propriétés asymptotiques sous certaines conditions. Par ailleurs, dans cette classe d'estimation, Beran(1977, 1978, 1981) et Hili(1995, 1999, 2008) ont utilisé le Minimum de Distance de Hellinger. Cette méthode a été introduite pour la première fois par Beran (1977) dans le cas des observations indépendantes. Ensuite Hili l'a développé en 1995, 1999 et en 2008 dans le cas des processus fortement mélangés et des processus bilinéaires. Dans notre cas,

nous nous intéressons aux processus linéaires à mémoire longue. Nous constituons un estimateur  $\hat{\theta}_n$  du paramètre  $\theta$ . La distance de Hellinger se définit comme suit  $\|\hat{f}_n^{1/2}(\cdot) - f(\cdot, \theta)^{1/2}\|$  où  $\|\cdot\|$  est la norme  $L_2$  et  $\hat{f}_n$  est un estimateur non paramétrique de la densité de  $X_t$ . Nous définissons alors  $\hat{\theta}_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} (\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x, \theta)|^2 dx)^{1/2}$  avec  $x \in \mathbb{R}$ . Dans le paragraphe 2, on définit les notations et les hypothèses utiles. Le paragraphe 3, qui constitue l'essentiel de cette note, concerne les théorèmes-limites (convergence presque sûre et propriétés asymptotiques) de l'estimateur.

## 2. Théorèmes-Limites

**Théorème 1: convergence presque sûre:** - *Supposons que de  $(A_1)$  à  $(A_4)$  sont vérifiées. Si  $f(x, \theta)$  est continue sur un support compact et si pour tout  $x$ ,  $f(x, \theta)$  est continue au point  $\theta$ , pour toute suite  $(b_n)$  telle que  $b_n \rightarrow 0$ ,  $(nb_n)^l \rightarrow \infty$  et  $b_n = n^\alpha L(n) = o(n^{\alpha/l})$  pour tout  $3 \leq l \leq 5$ ,  $-1 < \alpha < -1/4$  et  $L(n)$  une fonction à variation lente à l'infini. Si  $\theta$  est à l'intérieur de  $\Theta$ , alors:  $\hat{\theta}_n = T(\hat{f}_n) \rightarrow \theta = T(f_\theta)$ , p.s. quand  $n \rightarrow \infty$ .*

**Indication de preuve:** Du lemme 3  $\text{Sup}_{x \in \mathbb{R}} |\hat{f}_n(x) - f(x, \theta)| \rightarrow 0$  a.s. when  $n \rightarrow \infty$ . Alors  $\text{Prob} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{f}_n^{1/2}(x) = f^{1/2}(x, \theta) \text{ for all } x \right\} = 1$ . Ainsi,  $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x, \theta) dx = 1$ , alors  $H_2(\hat{f}_n(x), f(x, \theta)) = \left\{ \int_{\mathbb{R}} [\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x, \theta)]^2 dx \right\}^{1/2} \rightarrow 0$  a.s. when  $n \rightarrow \infty$ .  $T(\hat{f}_n(\cdot)) = \hat{\theta}_n$  et  $T(f(\cdot, \theta)) = \theta$ , du lemme 1 on a le resultat  $\diamond$

**Theorem 2: distribution asymptotique :** - *Supposons que  $(A_1)$ – $(A_5)$ , et le lemme 3 sont vérifiés. Si (i)  $\int_{\mathbb{R}} \ddot{g}(x, \theta) g(x, \theta) dx$  est une matrice  $(q \times q)$ –matrice non singulière, (ii)  $W(\cdot, \theta)$  admet un support compact alors, la distribution asymptotique de  $J_n[\hat{\theta}_n - \theta]$  converge vers une loi normale ou vers un processus .*

**Indication de preuve:** Du lemme 2, on a:  $[\hat{\theta}_n - \theta] = \int_{\mathbb{R}} W(x, \theta) [\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x, \theta)] dx + v_n \int_{\mathbb{R}} \dot{R}(x, \theta) [\hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x, \theta)] dx$ , où  $v_n \rightarrow_p 0$ . Pour  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ , nous avons l'égalité algébrique :

$$a^{1/2} - b^{1/2} = 2^{-1} b^{-1/2} (a - b) - [2b^{1/2} (a^{1/2} + b^{1/2})^2]^{-1} (a - b)^2$$

Les théorèmes 1 et 2 utilisent les lemmes ci-après.

**Lemme 1:** - *Supposons que  $(A_3)$  est vérifiée. Si  $f(\cdot, \theta)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , alors (i) Pour tout  $g \in \mathfrak{F}$ ,  $B(g) \neq \emptyset$ . (ii) Si  $B(g)$  est réduit à un seul élément, alors  $T$  est continue sur  $g$  dans la topologie de Hellinger. (iii)  $T(f(\cdot, \theta)) = \theta$  uniquement sur  $\Theta$ .*

**Indication de preuve:** Voir le lemme 3.1 dans Hili (1995)◇

**Lemme 2:** - Supposons que  $R_\theta = f^{1/2}(\cdot, \theta)$  satisfait les hypothèses  $(A_1) - (A_4)$ . Alors,  $\{\hat{f}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\cdot, \theta)$  dans la topologie de Hellinger.  $T(\hat{f}_n(\cdot)) = T(f(\cdot, \theta)) + \int_{\mathbb{R}} \rho(x, \theta) \left[ \hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x, \theta) \right] dx + v_n \int_{\mathbb{R}} \dot{R}_{T(f(\cdot, \theta))}(x) \left[ \hat{f}_n^{1/2}(x) - f^{1/2}(x, \theta) \right] dx$  où  $\rho(x, \theta) = - \left[ \int_{\mathbb{R}} \ddot{R}_{T(f(\cdot, \theta))}(x) f^{1/2}(x, \theta) dx \right]^{-1} \dot{R}_{T(f(\cdot, \theta))}(x)$  avec  $v_n$  une matrice  $(q \times q)$  dont ses composantes convergent vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Indication de preuve:** Voir théorème 2 dans Beran (1977)◇

**Lemme 3:** - Sous l'hypothèse  $(A_4)$ , si la densité  $f(\cdot, \theta)$  des observations satisfait les hypothèses  $(A_1) - (A_3)$ , alors  $\hat{f}_n(\cdot)$  converge vers  $f(\cdot, \theta)$  dans la topologie de Hellinger, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Indication de preuve:** Nous avons  $\left| \hat{f}_n(x) - f(x, \theta) \right| = \left| \hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x)) + E(\hat{f}_n(x)) - f(x, \theta) \right|$  ainsi,  $\left| \hat{f}_n(x) - f(x, \theta) \right| \leq \left| \hat{f}_n(x) - E(\hat{f}_n(x)) \right| + \left| E(\hat{f}_n(x)) - f(x, \theta) \right|$ . Pour la preuve du second terme de l'inégalité de droite, nous utiliserons Ould (2001), et Wu, W.B. and Mielniczuk, J. (2002) pour le premier terme◇

## Références Bibliographiques

- Beran, R.** (1977): Minimum Hellinger distance estimates for parametric models. Ann. Stat. 5, 445 – 463.
- Beran, R.** (1978): An efficient and robust adaptive estimator of location. Ann. Stat. 6, 292 – 313.
- Beran, R.** (1981): Efficient robust estimation for parametric models. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 55, 91 – 109.
- Hili, O.** (1995): On the estimation of nonlinear time series models. Stochastics and Stochastics Reports 52, 207 – 226.
- Hili, O.** (1999): On the estimation of  $\beta - ARCH$  models. statist. Proba. Let. 45, 285 – 293.
- Hili, O.** (2008): Hellinger distance estimation of general bilinear time series models. Statist. Methodol, vol 5, 119 – 128.
- Ould Haye, M.** (2001): *Théorèmes limites pour les processus à longue mémoire saisonnière. Thèse*, Num. 3085.
- Wu, W.B. and Mielniczuk, J.** (2002): Kernel density estimation for linear processes. The Annal. of Statist. 30, 1441 – 1459.