Estimation du coefficient de covariation symétrique signé et du gap pour une modélisation alpha-stable

Bernédy Kodia, Bernard Garel

Estimation du Coefficient de covariation symétrique signé et du Gap pour une modélisation alpha-stable.

Bernédy KODIA & Bernard GAREL

Institut de Mathématiques de Toulouse, UPS et INP-ENSEEIHT.
E-mails : garel@enseeiht.fr, bernedy.kodia@enseeiht.fr.

Résumé

Le coefficient de covariation symétrique signé est une nouvelle mesure de dépendance entre variables aléatoires α-stables symétriques. Ce coefficient satisfait la plupart des propriétés du coefficient de corrélation classique. Nous en proposons un estimateur basé sur les moments fractionnaires d'ordre inférieur. Dans le cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens, ce coefficient coïncide avec le paramètre d'association proposé par Press et la version généralisée de ce paramètre appelée gap et proposée par Paulauskas. Nous proposons également un estimateur du gap basé sur l'estimation de la mesure spectrale du vecteur aléatoire symétrique α-stable. Une comparaison des résultats obtenus à partir de ces estimateurs est faite dans le cas sous-gaussien.

Abstract

The signed symmetric covariation coefficient is a new dependence measure between symmetric α-stable random variables. This coefficient satisfies most properties of the classical Pearson coefficient. We propose an estimator of this coefficient based on fractional lower-order moments. In the case of sub-Gaussian random vectors, this coefficient coincide with the association parameter proposed by Press and the generalized version of this coefficient called gap and proposed by Paulauskas. We also propose a gap estimator based on the estimation of the spectral measure of the symmetric α-stable random vector. A comparison based on the results obtained from these estimators is done in case of sub-Gaussian random vectors.

1 Introduction

De nombreux problèmes physiques et financiers présentent une très grande variabilité et les distributions α-stables sont souvent utilisées pour leur modélisation. Ces lois ont été introduites par Paul Lévy en 1924. Elles prennent en compte l'asymétrie et les queues lourdes et sont les seules lois limites de sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. Les plus connues : les lois de Gauss, de Cauchy et de Lévy, sont les seules qui ont une densité de probabilité pouvant s'écrire de manière explicite. Pour les autres, on ne dispose que de leur fonction caractéristique. Les variables aléatoires stables non-gaussiennes ne possèdent pas de moments de second ordre. Comme conséquence immédiate, le concept de matrice de corrélation n'est pas défini.

Dans cet article nous utilisons un nouveau coefficient de dépendance, basé sur la covariation, appelé coefficient de covariation symétrique signé. Ce coefficient possède la plupart des propriétés d'un coefficient de corrélation classique et dans le cas des vecteurs aléatoires α-stables sous-gaussiens, coïncide avec le paramètre d'association proposé par Press (1972) et la version généralisée de ce paramètre appelée gap (Generalized Association Parameter) proposée par Paulauskas (1976). Pour estimer cette quantité, nous utilisons les moments fractionnaires d'ordre inférieur. Nous proposons également un estimateur du gap basé sur une estimation de la mesure spectrale du vecteur.

La Section 2 consiste en quelques rappels de base sur les vecteurs aléatoires stables et les coefficients de dépendance. Dans la Section 3 nous introduisons le coefficient de covariation symétrique signé, présentons ses propriétés immédiates et montrons son égalité au gap dans le cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens. La Section 4 est consacrée à l'estimation de ces coefficients.

2 Quelques rappels sur les vecteurs α-stables et coefficients de dépendance

Nous reprenons ici les notations de Samorodnitsky et Taqqu (1994) et notons $S_\alpha(\gamma, \beta, \delta)$ une loi α-stable, où $0 < \alpha \leq 2, \gamma \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1$ et δ un réel. Si la loi est symétrique, elle est notée simplement $S\alpha S(\gamma)$. Soit $0 < \alpha < 2$. Le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ est dit stable dans $\mathbb{R}^2$ si et seulement si il existe une mesure finie $\mathbf{\Gamma}$ sur le cercle unité $S_2 = \{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{s}\| = 1\}$ et un vecteur $\boldsymbol{\delta}$ tels que pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2$:

$$\phi_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = E \exp\left(i\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\right) = \exp\left(-I_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta})\right), \tag{1}$$

où la fonction exposant est donnée par

$$I_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = \int_{S_2} \psi_\alpha(\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle)\mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s}) + i(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})$$

avec

$$\psi_\alpha(u) = \begin{cases} |u|^\alpha[1 - i\text{sign}(u)\tan\frac{\pi\alpha}{2}] & \text{si} \quad \alpha \neq 1, \\ |u|[1 + i\frac{2}{\pi}\text{sign}(u)\ln|u|] & \text{si} \quad \alpha = 1. \end{cases} \tag{2}$$

Ici $\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$. Le paramètre α est appelé exposant caractéristique ou index de stabilité et le paramètre $\boldsymbol{\delta}$ est un vecteur de position. La mesure $\mathbf{\Gamma}$ est appelée mesure spectrale du vecteur aléatoire α-stable $\mathbf{X}$ et le couple $(\mathbf{\Gamma}, \boldsymbol{\delta})$ est unique. Le vecteur est symétrique si et seulement si $\boldsymbol{\delta} = 0$ et $\mathbf{\Gamma}$ est une mesure symétrique sur S_2. Dans ce cas, sa fonction caractéristique est donnée par

$$E\exp\{i\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{X}\rangle\} = \exp\left\{-\int_{S_2} |\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}\rangle|^\alpha \mathbf{\Gamma}(d\mathbf{s})\right\}. \tag{3}$$

La mesure spectrale porte l'information essentielle sur le vecteur, en particulier sur la structure de dépendance entre ses composantes. Il s'ensuit que toutes les mesures de dépendance s'expriment en fonction de cette dernière. Le lemme suivant établit un résultat important que nous utiliserons par la suite dans l'estimation du coefficient de covaration symétrique signé.

Lemme 2.1 *Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Alors pour tout $1 \leq p < \alpha$,*

$$\frac{EX_1X_2^{<p-1>}}{E|X_2|^p} = \frac{[X_1, X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}, \tag{4}$$

où $a^{<p>} = \text{sign}(a)|a|^p$ est appelée puissance signée, $[X_1, X_2]_\alpha$ désigne la covariation de X_1 sur X_2, mesure de dépendance introduite par Miller (1978). La norme $\|\cdot\|_\alpha$ est la norme de covariation. Paulauskas (1976) a introduit un concept de dépendance, le gap, plus général que le paramètre d'association proposé par Press (1972), et applicable à tout vecteur symétrique α-stable dans $\mathbb{R}^2$. Celui-ci se définit de la manière suivante.

Soit (X_1, X_2) un vecteur $S\alpha S$, $0 < \alpha \leq 2$ et $\mathbf{\Gamma}$ sa mesure spectrale sur le cercle unité S_2. Soit (U_1, U_2) un vecteur aléatoire sur S_2 de distribution de probabilité $\widetilde{\mathbf{\Gamma}} = \mathbf{\Gamma}/\mathbf{\Gamma}(S_2)$. Puisque $\mathbf{\Gamma}$ est symétrique, on a $EU_1 = EU_2 = 0$. Le paramètre d'association généralisé de (X_1, X_2) est défini par :

$$\widetilde{\rho} = \frac{EU_1U_2}{(EU_1^2EU_2^2)^{1/2}}. \tag{5}$$

Pour un vecteur stable de fonction caractéristique (3) le gap $\widetilde{\rho}$ a les propriétés suivantes pour tout $0 < \alpha \leq 2$: (i) on a toujours $-1 \leq \widetilde{\rho} \leq 1$ et si une distribution correspond à un vecteur aléatoire dont les composantes sont indépendantes, alors $\widetilde{\rho} = 0$. (ii) Si $|\widetilde{\rho}| = 1$ alors la distribution est concentrée sur une droite. (iii) Pour $\alpha = 2$, $\widetilde{\rho}$ coïncide avec le coefficient de corrélation d'un vecteur aléatoire gaussien. (iv) $\widetilde{\rho}$ est indépendant de α et ne dépend que de la mesure spectrale $\mathbf{\Gamma}$. (v) Si une fonction caractéristique est donnée par

$$\varphi(\mathbf{t}) = \exp\left\{-C(\gamma_1^2t_1^2 + 2r\gamma_1\gamma_2t_1t_2 + \gamma_2^2t_2^2)^{\alpha/2}\right\}, \tag{6}$$

où C est une constante appropriée, alors r est le gap.

3 Coefficient de covariation symétrique signé et propriétés

Définition 3.1 *Soit (X_1, X_2) un vecteur aléatoire $S\alpha S$ avec $\alpha > 1$. Le coefficient de covariation symétrique signé entre X_1 et X_2, introduit par Garel et Kodia (2009), est la quantité :*

$$\text{scov}(X_1, X_2) = \kappa_{(X_1,X_2)} \left| \frac{[X_1, X_2]_\alpha [X_2, X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha \|X_2\|_\alpha^\alpha} \right|^{\frac{1}{2}}, \tag{7}$$

où

$$\kappa_{(X_1,X_2)} = \begin{cases} \text{sign}([X_1, X_2]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| \geq \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|, \\ \\ \text{sign}([X_2, X_1]_\alpha) & \text{si} \quad \left|\frac{[X_1,X_2]_\alpha}{\|X_2\|_\alpha^\alpha}\right| < \left|\frac{[X_2,X_1]_\alpha}{\|X_1\|_\alpha^\alpha}\right|. \end{cases} \tag{8}$$

Il vérifie : (i) $-1 \leq \text{scov}(X_1, X_2) \leq 1$ et si X_1, X_2 sont indépendantes, alors $\text{scov}(X_1, X_2) = 0$. (ii) Pour tout $a \neq 0$, $|\text{scov}(X, aX)| = 1$. (iii) Pour $\alpha = 2$, $\text{scov}(X_1, X_2)$ coïncide avec le coefficient de corrélation habituel. (iv) Soient a et b deux réels non nuls, alors $\text{scov}(aX_1, bX_2) = \pm\ \text{scov}_\alpha(X_1, X_2)$.

3.1 Cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens

Soient $0 < \alpha < 2$, G_1, G_2 des variables conjointement normales de moyenne nulle et A une variable aléatoire positive, indépendante de (G_1, G_2), telle que $A \sim S_{\alpha/2}\big(\big(\cos\frac{\pi\alpha}{4}\big)^{2/\alpha}, 1, 0)$.

Alors $\mathbf{X} = A^{1/2}\mathbf{G} = (A^{1/2}G_1, A^{1/2}G_2)$ est un vecteur aléatoire α-stable appelé sous-gaussien de vecteur gaussien sous-jacent $\mathbf{G} = (G_1, G_2)$. La fonction caractéristique de $\mathbf{X}$ est donnée par :

$$E \exp\Big\{ i \sum_{k=1}^{2} \theta_k X_k \Big\} = \exp\Big\{ -\Big| \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \theta_i \theta_j R_{ij} \Big|^{\alpha/2} \Big\}, \tag{9}$$

où les $R_{ij} = EG_iG_j$, $i, j = 1, 2$ sont les covariances du vecteur gaussien sous-jacent $\mathbf{G}$ (Samorodnitsky et Taqqu, 1994 page 78).

Proposition 3.2 *Soient* $1 < \alpha < 2$ *et* $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2)$ *vecteur sous gaussien de fonction caractéristique (9), alors le coefficient de covariation symétrique signé et le gap entre les composantes de* $\boldsymbol{X}$ *coïncident avec le coefficient de corrélation entre les composantes du vecteur gaussien sous-jacent. Dans ce cas,* $\mathrm{scov}(X_1, X_2) = 1 \Leftrightarrow$ *la distribution de* $\boldsymbol{X}$ *est concentrée sur une ligne.*

4 Estimation du coefficient de covariation symétrique signé et du gap

L'estimateur que nous proposons ici pour le coefficient de covariation symétrique signé est

$$\widehat{\mathrm{scov}}(X_1, X_2) = \widehat{\kappa}_{(X_1,X_2)} \frac{\Big| \Big(\sum_{i=1}^{n} X_{1i} \, \mathrm{sign}(X_{2i}) \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} X_{2i} \, \mathrm{sign}(X_{1i}) \Big) \Big|^{1/2}}{\Big[\Big(\sum_{i=1}^{n} |X_{1i}| \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} |X_{2i}| \Big) \Big]^{1/2}} \tag{10}$$

où les couples $(X_{11}, X_{21}), ..., (X_{1n}, X_{2n})$ sont des observations de (X_1, X_2) indépendantes. Comme conséquence de la loi forte des grands nombres, cet estimateur converge presque sûrement vers le coefficient de covariation symétrique signé quand $n \to \infty$. Cet estimateur présente l'avantage de ne dépendre, ni d'une estimation de α ni de celle de la mesure spectrale du vecteur (X_1, X_2). Dans un contexte sous-gaussien, il s'agit aussi d'un estimateur du gap. Toutefois ce n'est pas le cas en général. Aussi proposons-nous un estimateur du gap basé sur l'estimation de la mesure spectrale du vecteur (X_1, X_2).
Lorsque la mesure spectrale d'un vecteur est continue, Byczkowski et Nolan (1993) montrent que celle-ci peut être approchée par une approximation discrète du type

$$\boldsymbol{\Gamma}(\cdot) = \sum_{j=1}^{k} \sigma_j \delta_{\mathbf{s}_j(\cdot)}, \tag{11}$$

où les σ_j sont des poids, les $\delta_{\mathbf{s}_j}$ sont des Dirac aux points $\mathbf{s}_j \in S_2, j = 1, ..., k$. Ainsi, estimer la mesure spectrale revient à estimer des poids en des points bien précis. Dans ce cas le choix approprié du nombre k et la manière de les caractériser pour qu'ils puissent parcourir uniformément le cercle unité est essentielle pour l'estimation de cette mesure spectrale. Puisque nous travaillons en dimension 2 nous avons pris $\mathbf{s}_j = (\cos(2\pi(j-1)/k), \sin(2\pi(j-1)/k)) \in S_2$.

Nolan et *al.* (2001) traitent en détails le calcul des poids σ_j dans un cas général pour un nombre donné de points. En tenant compte de (1) et de (11) on peut écrire $I_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{k} \psi_\alpha(\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{s}_j \rangle)\sigma_j$. Soient $\boldsymbol{\theta}_1, ..., \boldsymbol{\theta}_k \in \mathbb{R}^2$, on définit la matrice carrée Ψ d'ordre $k \times k$ par :

$$\Psi = \Psi_\alpha(\boldsymbol{\theta}_1, ..., \boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_k) = \begin{pmatrix} \psi_\alpha(\langle \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{s}_1 \rangle) & \cdots & \psi_\alpha(\langle \boldsymbol{\theta}_1, \mathbf{s}_k \rangle) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi_\alpha(\langle \boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{s}_1 \rangle) & \cdots & \psi_\alpha(\langle \boldsymbol{\theta}_k, \mathbf{s}_k \rangle) \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_k)'$ et $\vec{I} = (I_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}_1), ..., I_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}_k))'$, on peut écrire

$$\vec{I} = \Psi \vec{\sigma}. \tag{12}$$

Si $\boldsymbol{\theta}_1, ..., \boldsymbol{\theta}_k$ sont choisis de façon que Ψ soit inversible, on a alors

$$\vec{\sigma} = \Psi^{-1} \vec{I}. \tag{13}$$

Ainsi le principe de l'estimation de la mesure spectrale est le suivant : sur une grille, par exemple $\boldsymbol{\theta}_j = \boldsymbol{s}_j$, on détermine Ψ que l'on inverse. Puis en utilisant l'égalité (13) on obtient les $\sigma_j, j = 1, ..., k$.
Nous utilisons ici la méthode dite de projection. Soient $\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}, ..., \mathbf{X}^{(n)}$, n réalisations du vecteur aléatoire symétrique α-stable $\mathbf{X}$ avec $\alpha > 1$. Fixons une grille $\boldsymbol{\theta}_1, ..., \boldsymbol{\theta}_k$ sur S_2, où chaque $\boldsymbol{\theta}_k$ est une direction sur laquelle on projette les n réalisations de $\mathbf{X}$. De cette manière, nous définissons pour chaque $\boldsymbol{\theta}_j$ l'ensemble de données unidimensionnelles symétriques α-stables $\langle \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{X}^{(1)} \rangle, ..., \langle \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{X}^{(n)} \rangle$. Nous définissons $\widehat{I}_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}_j) = [\widehat{\gamma}(\boldsymbol{\theta}_j)]^{\widehat{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_j)}, j = 1, ..., k$, où $\widehat{\gamma}(\boldsymbol{\theta}_j)$ et $\widehat{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_j)$ sont les estimations respectives de l'index de stabilité et du paramètre d'échelle des données $\langle \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{X}^{(1)} \rangle, ..., \langle \boldsymbol{\theta}_j, \mathbf{X}^{(n)} \rangle$. Ces estimations sont obtenues en utilisant la méthode des quantiles de McCulloch pour l'estimation des paramètres d'une variable α-stable. Puisque le α doit être commun pour toutes les directions, nous définissons un α moyen par $\widehat{\alpha} = (1/k) \sum_{j=1}^{k} \widehat{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_j)$. Nous avons alors $\widehat{I}_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\theta}_j) = [\widehat{\gamma}(\boldsymbol{\theta}_j)]^{\widehat{\alpha}}, j = 1, ..., k$. Nous sommes dans un cas symétrique, de (2) on a simplement $\psi_\alpha(u) = |u|^\alpha$. Ainsi chaque élément de la matrice $\widehat{\Psi}$ est obtenu par $\widehat{\psi}_\alpha(\langle \boldsymbol{\theta}_i, \mathbf{s}_j \rangle) = |\theta_{i1} s_{j1} + \theta_{i2} s_{j2}|^{\widehat{\alpha}}, \quad i, j = 1, ..., k$. Malheureusement, dans la pratique la matrice $\widehat{\Psi}$ est mal-conditionnée. Pour contourner le problème d'inversion de cette matrice, McCulloch (2000) suggère de redéfinir le système (12) comme un problème d'optimisation du type de moindres carrés avec contraintes non négatives :

$$\begin{array}{c} \text{minimiser} \quad \|\vec{\widehat{I}} - \widehat{\Psi}\vec{\widehat{\sigma}}\|^2 \quad . \\ \text{sous } \vec{\widehat{\sigma}} \geq 0 \end{array}$$

La solution de ce problème est le vecteur $\vec{\widehat{\sigma}}$ des poids associé aux points $\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_k$ sur lesquels l'approximation (11) est définie. En tenant compte de la construction du gap dans (5), nous proposons pour celui-ci l'estimateur suivant, applicable dans un cas symétrique α-stable :

$$\widehat{\rho}_{(X_1,X_2)} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\widehat{\sigma}_j}{(\sum_{j=1}^{k}\widehat{\sigma}_j)} \cos\Big(\frac{2\pi(j-1)}{k}\Big) \sin\Big(\frac{2\pi(j-1)}{k}\Big)}{\Big[\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\widehat{\sigma}_j}{(\sum_{j=1}^{k}\widehat{\sigma}_j)} \cos^2\Big(\frac{2\pi(j-1)}{k}\Big)\Big)\Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{\widehat{\sigma}_j}{(\sum_{j=1}^{k}\widehat{\sigma}_j)} \sin^2\Big(\frac{2\pi(j-1)}{k}\Big)\Big)\Big]^{1/2}}. \tag{14}$$

Le tableau qui suit nous permet de faire une comparaison des performances de ces deux estimateurs dans le cas des vecteurs aléatoires sous-gaussiens avec $\alpha > 1$. La proposition 3.2 donne l'égalité entre le coefficient de covariation symétrique signé et le gap. Alors (10) et (14) sont des estimateurs de la même quantité. Les données bivariées obtenues par simulation ont pour paramètres d'échelle respectifs $\gamma_1 = 2$ et $\gamma_2 = 10$. La taille de l'échantillon est $n = 500$, le nombre de points $k = 18$ et le nombre de réplications est 100. Les valeurs entre parenthèses sont les écarts arithmétiques moyens à la moyenne figurant au dessus.

Valeur exacte	-1.00	-0.80	-0.60	-0.40	-0.20	0.00	0.10	0.30	0.50	0.70	0.90
$\widehat{\text{scov}}$	-1.00 (0.00)	-0.80 (0.05)	-0.59 (0.06)	-0.39 (0.07)	-0.18 (0.11)	0.02 (0.10)	0.12 (0.09)	0.26 (0.10)	0.50 (0.08)	0.70 (0.05)	0.90 (0.03)
$\widehat{\rho}$	-0.91 (0.00)	-0.73 (0.08)	-0.53 (0.08)	-0.34 (0.08)	-0.18 (0.08)	-0.00 (0.07)	0.08 (0.08)	0.25 (0.07)	0.42 (0.08)	0.63 (0.08)	0.85 (0.08)

Bibliographie

[1] Byczkowski, T. et Nolan, J. P. (1993) Approximation of multidimensional Stable Densities. *Journal of Multivariate Analysis* **46**, 13-31.

[2] Garel, B. et Kodia, B. (2009) Signed symmetric covariation coefficient for alpha-stable dependence modeling. *C. R. Acad. Sci. Paris.* DOI 10.1016/j.crma.2009.01.013

[3] McCulloch, J. H. (2000) Estimation of the Bivariate Stable Spectral Representation by the Projection method.*Computational Economics* 16, 47-62.

[4] Miller, G. (1978) Properties of certain symmetric stable distributions. *Journal of Multivariate Analysis*, 8 (3) 346-360.

[5] Nolan, J. P., Panorska, A. K. et McCulloch, J. H. (2001) Estimation of Stable Spectral Measures. *Mathematical and Computer Modelling*, **34** 1113-1122.

[6] Paulauskas, V. J. (1976) Some remarks on Multivariate Stable Distributions. *Journal of Multivariate Analysis,* **6**, 356-368.

[7] Press, S. J. (1972) Multivariate stable distributions. *Journal of Multivariate Analysis,* **2**, 444-462.

[8] Samorodnitsky, G et Taqqu M. S. (1994) Stable non-Gaussian random processes. *Stochastic Modeling. Chapman & Hall, New York-London.*