Sur la dimension de Hausdorff d'ensembles exceptionnels obtenus à partir d'un processus de Wiener multivarié indexé par une classe de fonctions

Claire Coiffard

Sur la dimension de Hausdorff d'ensembles exceptionnels obtenus à partir d'un processus de Wiener multivarié indexé par une classe de fonctions

Claire Coiffard

Laboratoire de Statistique Théorique et Appliquée, Université Paris VI, 175 rue du Chevaleret, 75013 PARIS

Résumé

Nous étudions les oscillations du processus de Wiener indexé par une classe de fonctions, dans le cas multivarié. Nous obtenons un ensemble de points exceptionnels, dont nous calculons la dimension de Hausdorff. Ceci donne une extension de résultats obtenus pour des processus de Wiener standards, dans le cas univarié ou bivarié.

Mots clés : Fractales aléatoires, Dimension de Hausdorff, Processus de Wiener

We study oscillations of a Wiener process indexed by a class of functions, in a multivariate framework. We consider a set of exceptional points, and we obtain its Hausdorff dimension. This is an extension of results obtained for standard Wiener process, in the univariate or bivariate case.

Keywords : Random fractals, Hausdorff dimension, Wiener process

Introduction

Orey et Taylor (1974) ont étudié les oscillations locales du processus de Wiener $\{W(t) : t \in [0,1]\}$. Ils considèrent l'ensemble

$$E_\Lambda = \big\{t \in [0,1] : \limsup_{h \downarrow 0} (2h \log(1/h))^{-1/2}(W(t+h) - W(t)) \geq \Lambda\big\}.$$

Ils montrent alors, avec probabilité 1, que E_Λ est une fractale aléatoire de dimension de Hausdorff $\dim E_\Lambda = 1 - \Lambda^2$. Deheuvels et Mason (1995) ont obtenu une version fonctionnelle, et Dindar (2001) a étudié le processus de Wiener bivarié. Notre but est d'étendre ces résultats au cas d'un processus de Wiener multivarié indexé par une classe de fonctions. Soit $\mathcal{F}$ une classe de fonctions bornées sur $I^d = [0,1]^d$. Notons $\|f\|$ la norme-sup de la fonction $f \in \mathcal{F}$. Nous supposons que la classe $\mathcal{F}$ vérifie les conditions :

F.i $\mathcal{F}$ est une famille de fonctions de Vapnik-Červonenkis,

F.ii $\mathcal{F}$ est une classe ponctuellement mesurable.

Pour la définition d'une classe de Vapnik-Červonenkis, et d'une famille de fonctions de Vapnik-Červonenkis, nous renvoyons à la page 141 de Van der Vaart et Wellner (1996). Le processus de Wiener multivarié, au point $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^d$, indexé par $f \in \mathcal{F}$ est défini par

$$W(h, \mathbf{z}; f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{u}) dW(\mathbf{z} + h^{1/d}\mathbf{u}). \tag{1}$$

Nous posons

$$\Theta_{h,\mathbf{z}}(f) = \frac{W(h, \mathbf{z}; f)}{\sqrt{2h \log(1/h)}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{u}) dW(\mathbf{z} + h^{1/d}\mathbf{u})}{\sqrt{2h \log(1/h)}}. \tag{2}$$

Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{F}$. Nous définissons le produit scalaire sur $\mathcal{F}$ par $\langle f_1, f_2 \rangle_{L_2} := \int_{I^d} f_1(\mathbf{u}) f_2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$. Soit $G_2(\mathcal{F})$ le sous-espace de Hilbert de $L_2(I^d)$ induit par $\mathcal{F}$. Pour $\varphi \in G_2(\mathcal{F})$, nous notons Θ_φ la fonctionnelle $\Theta_\varphi(f) = \int_{I^d} f(\mathbf{u})\varphi(\mathbf{u}) d\mathbf{u}$. Pour tout $\Lambda \in [0, 1]$, posons

$$\mathcal{H}_\Lambda = \big\{\Theta_\varphi(f), f \in \mathcal{F} \text{ avec } \int_{I^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \leq \Lambda^2\big\}. \tag{3}$$

Dans la suite, $l_\infty(\mathcal{F})$ représente la classe des fonctions bornées sur $\mathcal{F}$, munie de la norme-sup $\|\cdot\|_\mathcal{F}$. Pour tout $\varphi \in G_2(\mathcal{F})$, considérons l'ensemble de points défini par

$$L(\Theta_\varphi) = \big\{\mathbf{z} \in I^d : \liminf_{h \downarrow 0} \|\Theta_{h^d,\mathbf{z}}(\cdot) - \Theta_\varphi(\cdot)\|_\mathcal{F} = 0\big\}. \tag{4}$$

Enfin, posons pour $\Lambda \geq 0$

$$L_\Lambda = \bigcup \big\{L(\Theta_\varphi), \Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1, \varphi \in G_2(\mathcal{F}), \int_{I^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \geq \Lambda^2\big\}. \tag{5}$$

Nous montrons alors le théorème suivant, où pour tout ensemble A, $\dim A$ désigne la dimension de Hausdorff de A. (Voir Falconer (1985), pour des précisions concernant la dimension et la mesure de Hausdorff).

Théorème 1. *Supposons que $\mathcal{F}$ satisfasse les conditions Fi-Fii, et soit $\varphi \in G_2(\mathcal{F})$ telle que*

$$\int_{I^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \leq 1.$$

Alors, pour tout $\Lambda \in [0, 1]$, les ensembles $L(\Theta_\varphi)$ et L_Λ sont presque sûrement denses dans I^d et

$$\dim L(\Theta_\varphi) = d\Big(1 - \int_{I^d} \varphi^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u}\Big) \text{ et } \dim L_\Lambda = d(1 - \Lambda^2). \tag{6}$$

La preuve du **Théorème** 1 est inspirée de l'article de Deheuvels et Mason (1995). Elle se décompose en deux étapes. Dans la première, nous montrons que pour tout $0 \leq \Lambda \leq 1$,

$$\dim L_\Lambda \leq d(1-\Lambda^2). \tag{7}$$

Pour cela, nous exhibons un recouvrement de L_Λ dont la dimension de Hausdorff $d(1-\Lambda^2)$ est facilement calculable. La deuxième étape s'avère plus difficile. Nous montrons ici que pour tout $\Theta_\varphi \in \mathcal{H}_1$ et $\varphi \in G_2(\mathcal{F})$,

$$\dim L(\Theta_\varphi) \geq d\Big(1 - \int_{I^d} \varphi^2(\mathbf{u})d\mathbf{u}\Big). \tag{8}$$

Un outil fondamental dans cette démonstration est le lemme suivant obtenu par Deheuvels et Mason (1995).

Lemme 2. *Soit* $A \in [0,1]^d$ *tel que* $A = \bigcap_{m=1}^\infty E_m$, *où* $E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots$ *est une suite décroissante pour l'inclusion, de la forme* $E_m = \bigcup_{k=1}^{M_m} J_{m,k}$ *où* $\{J_{m,k} : 1 \leq k \leq M_m\}$ *est une collection de pavés disjoints de* $\mathbb{R}^d$*, tels que*

$$\lim_{m\to\infty}\left[\max_{1\leq k\leq M_m} |J_{m,k}|\right] = 0 \ et \ \lim_{m\to\infty} M_m = \infty. \tag{9}$$

Supposons maintenant qu'il existe deux constantes $\Delta > 0$ *et* $\delta > 0$ *telles que, pour tout pavé* $J \subseteq [0,1]^d$*, tel que* $|J| \leq \Delta$*, il existe une constante* $m(J)$ *telle que, pour tout* $m \geq m(J)$,

$$M_m(J) := \#\{J_{m,k} \subseteq J : 1 \leq k \leq M_m\} \leq \delta |J|^c M_m, \tag{10}$$

alors, on a $s^c - mes(A) > 0$.

Pour démontrer (8), il suffit donc de construire un ensemble de A inclus dans $L(\Theta_\varphi)$ qui vérifie les conditions du lemme ci-dessus, pour $c = d(1-\Lambda^2-\eta)$ avec $\eta > 0$ suffisamment petit.

Bibliographie

[1] Deheuvels, P. et Mason, D.M. (1995) On the fractal nature of empirical increments., Ann. Probab. 23 (1995) 355–387.
[2] Dindar Z. (2001) On the Hausdorff dimension of the set generated by exceptional oscillations of a two-parameter Wiener process. J. Multivariate Anal. 79 52–70.
[3] Falconer K.J. (1985) The Geometry of Fractal Sets. Cambridge University Press, Cambridge.
[4] Orey, S. et Taylor S.J. (1974) How often on a Brownian path does the law of the iterated logarithm fail? Proc. London Math. Soc. 28 174–192.
[5] van der Vaart, A.W. et Wellner A.J. (1996) Weak convergence and Empirical Processes. Springer, New-York.