Loi du temps de franchissement d'un seuil par un processus gamma

Christian Paroissin, Ali Salami

Loi du temps de franchissement d'un seuil par un processus gamma

Ch. Paroissin[1] & A. Salami[2]

[1] *Université de Pau et des Pays de l'Adour, Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - UMR CNRS 5142, Avenue de l'Université, 64013 Pau cedex, France, cparoiss@univ-pau.fr*
[2] *Université de Pau et des Pays de l'Adour, Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications - UMR CNRS 5142, Avenue de l'Université, 64013 Pau cedex, France,ali.salami@univ-pau.fr*

Mots-clés : Fiabilité - qualité

Résumé. On considère le processus gamma comme modèle de dégradation. Le temps de franchissement d'un seuil déterministe ou aléatoire est étudié. Dans le premier cas, la loi est caractérisée de manière exacte. Dans le second cas, on propose d'approcher le cas général par celui où le seuil est aléatoires de la loi donnée par un mélange de lois d'Erlang.

Abstract. We consider the gamma process as a degradation model. The hitting time of a deterministic or random level is considered. In the first case, the distribution is given explicitely. In the second case, we propose to approximate the general case by considering mixtures of Erlang distributions.

1 Introduction et modèle

Le processus gamma est un des processus stochastiques les plus utilisés en fiabilité pour modéliser la dégradation d'un système. On rappelle la définition de ce processus [6]. Soit $\xi \in \mathbb{R}^+$ et $\eta = (\eta_t)_{t\geq 0}$ une fonction réelle strictement croissante et nulle en zéro. On dit que (D_t) est un processus gamma si et seulement si : (1) $D_0 = 0$; (2) ses accroissements sont indépendants ; (3) ses accroissements sont de loi gamma. Plus précisément, pour tout t et δ, $D_{t+\delta} - D_t$ est une variable aléatoire de loi gamma de paramètres $(\xi, \eta_{t+\delta} - \eta_t)$. Ceci implique que toutes les marginales de ce processus sont aussi de loi gamma : pour tout $t \geq 0$, la densité de D_t est :

$$f_{D_t}(x) = \frac{1}{\xi\Gamma(\eta_t)} \left(\frac{x}{\xi}\right)^{\eta_t - 1} e^{-x/\xi} 1_{\mathbb{R}^+}(x) \ ,$$

où $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma. Le cas où η est linéaire, $\eta_t = \alpha t$, est celui le plus souvent considéré dans la littérature. En effet, dans ce cas, le processus (D_t) est à accroissements stationnaires : pour tout t et δ, $D_{t+\delta} - D_t$ et D_δ ont même loi. Alors (D_t) est un processus de Lévy. Ce cas particulier permet d'effectuer de nombreux calculs. Quelques cas non-linéaires sont également considérés. Le plus fréquent des cas non-linéaires est celui où η est une fonction puissance, i.e. de la forme $\eta_t = \alpha t^\beta$. Pour ce modèle, β est souvent considéré comme connu lors de l'estimation des paramètres. Lawless and Crowder [4] ont par ailleurs considéré une autre cas non-linéaire en choisissant la courbe de Paris-Erdogan pour η_t modélisant la propagation d'une fissure.

2 Temps de franchissement

La panne d'un système est souvent considérée à travers le processus de dégradation. Dans ce cas, on suppose en général que le système est en panne dès que le niveau de dégradation dépasse un certain seuil. On considère ici deux cas : le premier où le seuil est déterministe et le second où le seuil est aléatoire.

3 Cas d'un seuil déterministe

Soit c une constante strictement positive au seuil critique de dégradation. On considère alors la variable aléatoire T_c définie par :

$$T_c = \inf\{t \geq 0\ ;\ D_t \geq c\}\ .$$

Puisque le processus (D_t) est à trajectoires croissantes, on a :

$$\forall t \geq 0\ , \quad \mathbb{P}[T_c > t] = \mathbb{P}[D_t < c]\ .$$

Le résultat ci-dessous généralise celui de Park et Padgett [5] :

Proposition 1 *Supposons que la fonction η est dérivable. Alors, la densité de T_c est :*

$$f_{T_c}(t) = \eta'_t \left(\Psi(\eta_t) - \log\left(\frac{c}{\xi}\right)\right)\left(1 - \frac{\Gamma(\eta_t, c/\xi)}{\Gamma(\eta_t)}\right) + \frac{\eta'_t}{\eta_t^2 \Gamma(\eta_t)}\left(\frac{c}{\xi}\right)^{\eta_t} {}_2F_2(\eta_t, \eta_t; \eta_t{+}1, \eta_t{+}1; -c/\xi)\ ,$$

où Ψ est la fonction digamma, $\Gamma(\cdot,\cdot)$ la fonction gamma incomplète supérieure et ${}_2F_2$ la fonction hypergéométrique généralisée d'ordre $(2, 2)$.

3.1 Cas d'un seuil aléatoire

Depuis l'article d'Abdel-Hameed [1], plusieurs auteurs ont considéré le problème du temps d'atteinte d'un seuil aléatoire C. Partant de la proposition précédente, il est facile de calculer la fonction de répartition de T_C lorsque C est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètres ρ :

Proposition 2 *La densité de T_C est :*

$$f_{T_C}(t) = \eta_t'(1+\rho\xi)^{-\eta_t}\log(1+\rho\xi) \ .$$

Ce résultat a été démontré par Frenk and Nicolai [3] par une autre technique. Les calculs ne sont pas aussi simples dans le cas général. Cependant il est possible d'approcher la loi de C par une loi de type phase, par exemple par un mélange de lois d'Erlang. On rappelle que l'ensemble des mélanges de lois d'Erlang est dense dans l'ensemble des lois à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ [2]. Il est alors facile de montrer la convergence en loi des temps de franchissement. On a le résultat suivant pour le mélange de lois d'Erlang :

Proposition 3 *Supposons que la loi de C est celle d'un mélange de lois d'Erlang de la forme :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \ , \quad f_C(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i \rho^{k_i} \frac{x^{k_i-1}}{(k_i-1)!} e^{-\rho x} \ ,$$

avec $(p_1,\ldots,p_n)$ tel que $p_1+\cdots+p_n = 1$ et $p_i > 0$, $\rho > 0$ et $k_1,\ldots,k_n > 0$. Alors la fonction de répartition de T_C est :

$$F_{T_C}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{k_i!}(\eta_t)_{k_i} \left(\frac{\rho\xi}{1+\rho\xi}\right)^{k_i} (1+\rho\xi)^{-\eta_t} {}_2F_1\left(1, \eta_t + k_i; k_i; \frac{\rho\xi}{1+\rho\xi}\right) \ .$$

Bibliographie

[1] Abdel-Hameed M. (1975). A gamma wear process. *IEEE Trans. Reliab.*, Vol. 24(2), 152-153.

[2] Cocozza-Thivent C. (1997). *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Springer.

[3] Frenk J.B., Nicolai R.P. (2007). Approximating the randomized hitting time distribution of a non-stationary gamma process. ERIM Report Series Reference No. ERS-2007-031-LIS.

[3] Lawless J., Crowder M. (2004). Covariates and Random Effects in a Gamma Process Model with Application to Degradation and Failure. *Lifetime Data Analysis*, Vol. 10, 213–227.

[4] Park C., Padget W.J. (2005). Accelerated Degradation Models for Failure Based on Geometric Brownian Motion and Gamma Processes. *Lifetime Data Analysis*, Vol. 11, 511–527.

[5] van Noortwijk J.M. et al, (2007). Gamma processes and peaks-over-threshold distributions for time-dependent reliability, *Reliability Engineering and System Safety*, Vol. 92, 1651–1658.