



## Une classe particulière de plans $n$ -aires

Zoubida Gheribi-Aoulmi, Moussedek Bousseboua

► **To cite this version:**

Zoubida Gheribi-Aoulmi, Moussedek Bousseboua. Une classe particulière de plans  $n$ -aires. 41èmes Journées de Statistique, SFdS, Bordeaux, 2009, Bordeaux, France, France. 2009. <inria-00386751>

**HAL Id: inria-00386751**

**<https://hal.inria.fr/inria-00386751>**

Submitted on 22 May 2009

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNE CLASSE PARTICULIERE DE PLANS N-AIRES

Zoubida Gheribi-Aoulmi & Moussedek Bousseboua

Université Mentouri de Constantine  
Département de Mathématiques, Labo:M.A.M  
ALGERIE

**Résumé** : Une méthode de construction des plans  $n$ -aires est décrite dans (6). Cette méthode est récursive et est basée sur l'analogie entre un système de blocs incomplets équilibrés binaires ( $\mathcal{B.I.E.B}$ ) et un système de sous-variétés linéaires de même dimension d'une géométrie projective de dimension finie, définie sur un corps de Galois. Dans la présente communication, nous nous intéressons à une méthode dérivée appliquée aux plans  $n$ -aires caractérisés par le fait que chaque traitement répété  $r$  fois, apparaisse 0, 1,  $q_1, \dots, q_s$  ou  $n - 1$  fois dans chaque bloc,  $q_1, \dots, q_s$  étant des entiers tels que  $1 < q_1 < \dots < q_s$ ; ceci donnerait donc à l'utilisateur une souplesse dans le choix du nombre d'apparition des traitements dans les blocs contrairement aux plans  $n$ -aires habituels qui sont largement décrits dans la littérature (cf par exemple: 1, ..., 5, 7, 8, ..., 14). Par ailleurs, ces plans  $n$ -aires sont équilibrés et leurs paramètres sont entièrement déterminés. De ces derniers, une autre sous classe de plans  $n$ -aires est déduite et est caractérisée par une réduction appréciable du nombre de blocs

**Mots clés** : Blocs incomplets équilibrés binaires, plans  $n$ -aires, géométrie projective finie, sous-variété linéaire finie.

**Abstract** An  $n$ -ary block design construction method is described in (6). This method is recursive and is based on the analogy between a balanced incomplete binary block design ( $\mathcal{B.I.E.B}$ ) and the set of all distinct linear sub-varieties of the same dimension extracted from a finite projective geometry by using a Galois fields. In this communication, we describe a derived method applied to  $n$ -ary block designs characterized by the fact that each treatment repeated  $r$  times, occurs 0, 1,  $q_1, \dots, q_s$  or  $n - 1$  times in each block ; the integers  $q_1, \dots, q_s$  are such that  $1 < q_1 < \dots < q_s$  ; which gives the user flexibility in choosing the number of treatments appearing in the blocks in contrast to other  $n$ -ary designs described in the literature (see for example 1, ..., 5, 7, 8, ..., 14). Moreover, these  $n$ -ary designs are balanced and have well defined parameters. Another sub-class of  $n$ -ary designs can be deducted and is characterized by a relative reduction in block number.

**Keywords** : Balanced incomplete binary blocks,  $n$ -ary designs, finite projective geometry, finite linear sub-variety.

**Définition** : Un plan en blocs  $n$ -aires est un plan consistant en un arrangement de  $\nu$  traitements dans  $b$  blocs de taille  $k$ , chaque traitement étant répété  $r$  fois et a lieu  $0, 1, 2, \dots$  ou  $n - 1$  fois dans chaque bloc.

Le plan est dit équilibré si le produit de deux lignes de la matrice d'incidence du plan  $N = (n_{ij})_{(v,b)}$  est de la forme :  $(\mu - \lambda) \cdot \delta_{il} + \lambda$ , où  $\mu = \sum_{j=1}^b n_{ij}^2$  et  $\lambda = \sum_{j=1}^b n_{ij} \cdot n_{lj}$  sont indépendantes des lignes  $i$  et  $l$  ( $i \neq l$ ),  $\delta_{il}$  le symbole de Kronecker et  $n_{ij}$  le nombre de répétitions du  $i^{\text{ème}}$  traitement dans le  $j^{\text{ème}}$  bloc.

Dans la suite de l'exposé, on note ces plans par  $\mathcal{P}_n \left( \nu, b^{(n)}, k^{(n)}, r^{(n)}, \mu^{(n)}, \lambda^{(n)} \right)$

### Description de la méthode de construction :

La méthode consiste en un schéma récursif issu d'une géométrie projective  $\mathcal{V}_m$  de dimension  $m$  de laquelle on extrait l'ensemble de toutes les sous-variétés linéaires distinctes de dimension  $m_1$  ( $m_1 < m$ ), auquel correspond un système de  $\mathcal{BIEB}$  dit de génération d'ordre 1 et que l'on convient de noter par  $\{\mathcal{V}(i_1) : 1 \leq i_1 \leq b_1\}$ . Ensuite, considérant chaque sous variété  $\mathcal{V}(i_1)$  de ce système, comme étant une géométrie projective de dimension  $m_1$ , on construit toutes les sous-variétés linéaires distinctes  $\{\mathcal{V}(i_1, i_2) : 1 \leq i_2 \leq b_2\}$  de même dimension  $m_2$  ( $m_2 < m_1$ ), contenues dans la sous-variété  $\mathcal{V}(i_1)$ . Ce système est identifié à un  $\mathcal{BIEB}$  dit de génération d'ordre 2. A l'issue de cette première opération, si on procède à la juxtaposition de toutes les sous-variétés emboîtées  $\mathcal{V}(i_1)$  et  $\mathcal{V}(i_1, i_2)$ , on obtient un système de blocs ternaires  $\{\mathcal{V}(i_1) \vee \mathcal{V}(i_1, i_2) : 1 \leq i_2 \leq b_2 \text{ et } 1 \leq i_1 \leq b_1\}$ , où  $\mathcal{V}(i_1) \vee \mathcal{V}(i_1, i_2)$  est la juxtaposition de la sous-variété  $\mathcal{V}(i_1, i_2)$  avec son ascendant  $\mathcal{V}(i_1)$ . De la même manière, un plan  $n$ -aires équilibré est obtenu en répétant cette opération "d'extraction"  $(n - 1)$ -fois et en procédant ensuite à la juxtaposition de chaque bloc final  $\mathcal{V}(i_1, \dots, i_{n-1})$  à tous les blocs souches d'où il dérive  $\{\mathcal{V}(i_1, \dots, i_j) : 1 \leq j \leq n - 2\}$ .

Les paramètres de ce plan sont entièrement déterminés et leurs expressions sont données par le théorème suivant:

**Théorème** : Les plans  $\mathcal{P}_n \left( \nu, b^{(n)}, k^{(n)}, r^{(n)}, \mu^{(n)}, \lambda^{(n)} \right)$  sont des plans  $n$ -aires équilibrés

et on a :

$$b^{(n)} = \prod_{j=1}^{n-1} b_j, \quad k^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-1} k_j,$$

$$r^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} j \cdot (b_{j+1} - r_{j+1}) \times \left[ \prod_{l=j+2}^{n-1} b_l \right] \times \left[ \prod_{l=1}^j r_l \right],$$

$$\mu^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \cdot (b_{j+1} - r_{j+1}) \times \left[ \prod_{l=j+2}^{n-1} b_l \right] \times \left[ \prod_{l=1}^j r_l \right],$$

$$\lambda^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-2} 2j \cdot [r_{j+1} - \lambda_{j+1}] \cdot \prod_{l=1}^j \lambda_l \times \sum_{i=j+1}^{n-1} i \cdot (b_{i+1} - r_{i+1}) \cdot \prod_{l=j+2}^i r_l \cdot \prod_{l=i+2}^{n-1} b_l$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \cdot [b_{j+1} - 2r_{j+1} + \lambda_{j+1}] \cdot \prod_{l=1}^j \lambda_l \cdot \prod_{l=j+2}^{n-1} b_l$$

avec  $\prod_{l=j+2}^i r_l = 1$  si  $j+1 \geq i$ ,  $\prod_{l=q}^{n-1} b_l = 1$  si  $q \geq n$ ,  $b_n - r_n = 1$  et  $b_n - 2r_n + \lambda_n = 1$  et où  $r_j$  (resp.  $\lambda_j$ ) le nombre de répétitions d'un traitement (resp. le nombre d'occurrences d'un couple de traitements) dans un  $\mathcal{BI}\mathcal{E}\mathcal{B}$  de génération  $j$ .

### Exemple :

Dans une  $\mathcal{PG}(3, 2)$  il y a 15 sous-variétés distinctes de dimension 2. Chaque sous-variété correspond à un bloc entièrement déterminé par une des équations :  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \pmod{2}$ , les  $a_i \in \mathcal{GF}(2)$  (le corps de Galois de paramètre 2), et chaque point  $p$  est défini par ses 4 composantes  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Le système de  $\mathcal{BI}\mathcal{E}\mathcal{B}$  résultant a pour paramètres :  $v = b_1 = 15, r_1 = k_1 = 7$  et  $\lambda_1 = 3$ . Et chaque bloc est identifié à une de ses sous-variétés. De nouveau, chaque bloc considéré comme une sous-variété linéaire de dimension 2, fournit à son tour un système de  $\mathcal{BI}\mathcal{E}\mathcal{B}(7, 7, 3, 3, 1)$  de la génération d'ordre 2, entièrement déterminé par le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \pmod{2} \\ \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 = 0 \pmod{2} \end{cases}, \text{ où les coefficients } a_i \text{ et } \alpha_i \in \mathcal{GF}(2).$$

En juxtaposant chaque bloc  $b_j$  à chacun de ses descendants  $b_{j,l}$   $l = \overline{1,7}$  et  $j = \overline{1,15}$ , on obtient le plan ternaire  $\mathcal{P}_3$  caractérisé par les paramètres  $\nu = 15, b^{(3)} = 105, r^{(3)} = 70, k^{(3)} = 10$  et  $\lambda^{(3)} = 42$ . La matrice  $N \cdot {}^tN$  a pour coefficients  $\mu = 112$  sur la diagonale et  $\lambda = 42$  ailleurs.

### Construction d'une classe de plans $n$ -aires particuliers

En général, le dispositif  $\mathcal{P}_n$  pour  $m$  grand, comporte un nombre important de blocs. Cependant, il est possible de réduire le nombre de blocs, en imposant par exemple à chaque traitement d'apparaître 0, 1,  $q_1, \dots, q_s$  ou  $n-1$  fois, et où les  $(q_i)$  sont strictement croissants. Ceci revient en fait, à extraire des plans  $n$ -aires équilibrés particuliers du plan  $\mathcal{P}_n$ .

**Proposition** : Pour toute suite  $\{q_1, \dots, q_s\}$  d'entiers tels que  $1 = q_0 < q_1 < \dots < q_s < n - 1$ , il existe un plan  $\mathcal{Q}_n$   $n$ -aires équilibré et dans lequel chaque traitement apparaît soit 0, 1,  $q_1, \dots, q_s$  ou  $n - 1$  fois, entièrement déterminé par les paramètres  $(\nu, b^{(n)}, r^{(n)}, k^{(n)}, \lambda^{(n)})$  où  $k^{(n)}$  est le même que ci-dessus et

$$\begin{aligned}
b^{(n)} &= (b_1 - r_1) \cdot \prod_{j=2}^{n-1} b_j + \sum_{l=0}^s \prod_{j=1}^{q_l} r_l \cdot (b_{q_l+1} - r_{q_l+1}) \cdot \prod_{j=q_l+2}^{n-1} b_j + \prod_{j=1}^{n-1} r_j, \\
r^{(n)} &= \sum_{l=0}^s q_l \prod_{j=1}^{q_l} r_l \cdot (b_{q_l+1} - r_{q_l+1}) \cdot \prod_{j=q_l+2}^{n-1} b_j + (n-1) \prod_{j=1}^{n-1} r_j \\
\mu^{(n)} &= \sum_{l=0}^s q_l^2 \prod_{j=1}^{q_l} r_l \cdot (b_{q_l+1} - r_{q_l+1}) \cdot \prod_{j=q_l+2}^{n-1} b_j + (n-1)^2 \prod_{j=1}^{n-1} r_j \\
\lambda^{(n)} &= \sum_{\tau=0}^s q_\tau^2 \prod_{j=1}^{q_\tau} \lambda_j \cdot (b_{q_\tau+1} - 2r_{q_\tau+1} + \lambda_{q_\tau+1}) \cdot \prod_{j=q_\tau+2}^{n-1} b_j \\
&+ 2 \sum_{\tau=0}^s q_\tau \cdot q_{\tau'} \cdot \prod_{j=1}^{q_\tau} \lambda_j \cdot (r_{q_\tau+1} - \lambda_{q_\tau+1}) \cdot \prod_{j=q_\tau+2}^{q_{\tau'}} r_j \cdot (b_{q_{\tau'}+1} - r_{q_{\tau'}+1}) \cdot \prod_{j=q_{\tau'}+2}^{n-1} b_j \\
&+ 2(n-1) \sum_{\tau=0}^s q_\tau \prod_{j=1}^{q_\tau} \lambda_j \cdot (r_{q_\tau+1} - \lambda_{q_\tau+1}) \cdot \prod_{j=q_\tau+2}^{n-1} r_j + (n-1)^2 \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j.
\end{aligned}$$

Un plan  $n$ -aires particulier issu du précédent est le plan  $n$ -aires dans lequel chaque traitement apparaît soit au plus une fois, soit  $(n - 1)$  fois, ce qui correspond à une suite  $(q_1, \dots, q_s)$  telle que  $q_1 = \dots = q_s = 0$ .

**Corollaire** : Il existe un plan  $\mathcal{R}_n$   $n$ -aires équilibré dans lequel chaque traitement apparaît au plus 1 fois ou  $n - 1$  fois exactement. Ce plan est entièrement déterminé par les paramètres  $(\nu, b^{(n)}, r^{(n)}, k^{(n)}, \lambda^{(n)})$  où  $k^{(n)}$  est le même que ci-dessus et

$$\begin{aligned}
b^{(n)} &= (b_1 - r_1) \cdot \prod_{j=2}^{n-1} b_j + r_1 (b_2 - r_2) \cdot \prod_{j=3}^{n-1} b_j + \prod_{j=1}^{n-1} r_j, \\
r^{(n)} &= r_1 (b_2 - r_2) \cdot \prod_{j=3}^{n-1} b_j + (n-1) \cdot \prod_{j=1}^{n-1} r_j, \\
\mu^{(n)} &= r_1 (b_2 - r_2) \cdot \prod_{j=3}^{n-1} b_j + (n-1)^2 \cdot \prod_{j=1}^{n-1} r_j, \\
\lambda^{(n)} &= \lambda_1 (b_2 - 2r_2 + \lambda_2) \cdot \prod_{j=3}^{n-1} b_j + 2(n-1) \cdot \lambda_1 (r_2 - \lambda_2) \prod_{j=3}^{n-1} r_j + (n-1)^2 \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j
\end{aligned}$$

Le nombre de blocs dans le dispositif  $\mathcal{R}_n$  est relativement plus petit que celui du dispositif  $\mathcal{Q}_n$ .

## Bibliographie

- [1] Agarwal, S.C and Das, M.N. (1987) A note on construction and application of balanced n-ary designs. *Sankhya Ser B*, 49,192-196.
- [2]Billington E.J. and Robinson P.J. (1983) A list of balanced ternary designs with R ■ 15, and some necessary existence conditions, *Ars Combin.*16, 235-258.
- [3]Billington E.J. (1984) Balanced n-ary designs: a combinatorial survey and some new results, *Ars Combin.*17A, 37-72.
- [4]Bryant,D.E and Khodkar,A. (1997) A census of (9;1;3;2) balanced ternary designs, *J.Combin.Math.Combin.Comput.*23, 153.160.
- [5]Dey, A. (1970) Construction of balanced n-ary block designs, *Ann. Inst. Statist. Math.*,22 ,389-393.
- [6]Gheribi-Aoulmi Z. and Bousseboua M. (2005) Recursive methods for construction of balanced n-ary block design, *Serdica Math.J.* 31, 189-200.
- [7]Khodkar,A.(1992) Constructions of some balanced ternary designs from one factorization, *Utilitas math.*,42, 213-217.
- [8]Kunkle and D.G.Sarvate. (1995) On ternary designs with a specified number of blocks with repeated elements, *Ars Combin.*, 40 ,129-142.
- [9]Morgan E.J. (1977) Construction of balanced n-ary design, *Utilitas Math.*11, 3-31.
- [10]Murty, J.S. and Das, M. N. (1968) Construction of balanced n-ary block designs and their uses, *Jour. Ind. Statist. Assoc.*, 5.
- [11]Ryoh Fuji Hara, Shinji Kuriki, Ying Miao and Satoshi Shinohara (2002) Balanced nested designs and balanced n-ary designs, *J.S.P.I* ; Vol 106, Issues 1-2, 57-67.
- [12]Saha, G. M. (1975) On construction of balanced ternary designs, *Sankhyä*, B, 37, 220-227.
- [13]Sinha K. (1992) A construction of balanced ternary designs, *Ars Combin.*33, 276-278.
- [14]Tocher, K.D. (1952) The design and analysis of block experiments. *J.Roy.Stat.Soc.Ser B*, 45-100.