Une classe particulière de plans n-aires

Zoubida Gheribi-Aoulmi, Moussedek Bousseboua

Une classe particuliere de plans n-aires

Zoubida Gheribi-Aoulmi & Moussedek Bousseboua

Université Mentouri de Constantine
Département de Mathématiques, Labo:M.A.M
ALGERIE

Résumé : Une méthode de construction des plans n-aires est décrite dans (6). Cette méthode est récursive et est basée sur l'analogie entre un système de blocs incomplets équilibrés binaires ($\mathcal{B}.\mathcal{I}.\mathcal{E}.\mathcal{B}$) et un système de sous-variétés linéaires de même dimension d'une géométrie projective de dimension finie, définie sur un corps de Galois. Dans la présente communication, nous nous intéressons à une méthode dérivée appliquée aux plans n-aires caractérisés par le fait que chaque traitement répété r fois, apparaisse $0, 1, q_1, \ldots, q_s$ ou $n-1$ fois dans chaque bloc, $q_1, \ldots, q_s$ étant des entiers tels que $1 < q_1 < \ldots < q_s$; ceci donnerait donc à l'utilisateur une souplesse dans le choix du nombre d'apparition des traitements dans les blocs contrairement aux plans n-aires habituels qui sont largement décrits dans la littérature (cf par exemple: $1, ..., 5, 7, 8, \ldots, 14$). Par ailleurs, ces plans n-aires sont équilibrés et leurs paramètres sont entièrement déterminés. De ces derniers, une autre sous classe de plans n-aires est déduite et est caractérisée par une réduction appréciable du nombre de blocs

Mots clés : Blocs incomplets équilibrés binaires, plans $n-$aires, géométrie projective finie, sous-variété linéaire finie.

Abstract An n-aray block design construction method is described in (6). This method is recursive and is based on the analogy between a balanced incomplete binary block design ($\mathcal{B}.\mathcal{I}.\mathcal{E}.\mathcal{B}$) and the set of all distinct linear sub-varieties of the same dimension extracted from a finite projective geometry by using a Galois fields.In this communication, we describe a derived method applied to n-ary block designs characterized by the fact that each treatment repeated r times, occurs $0, 1, q_1, ..., q_s$ or $n-1$ times in each block ; the integers $q_1, ..., q_s$ are such that $1 < q_1 < ... < q_s$; which gives the user flexibility in choosing the number of treatments appearing in the blocks in contrast to other n-ary designs described in the literature (see for example $1, ..., 5, 7, 8, ..., 14$). Moreover, these n-ary designs are balanced and have well defined parameters. Another sub-class of n-ary designs can be deducted and is characterized by a relative reduction in block number.

Keywords : Balanced incomplete binary blocks, $n-$ary designs, finite projective geometry, finite linear sub-variety.

Définition : Un plan en blocs $n-$aires est un plan consistant en un arrangement de ν traitements dans b blocs de taille k, chaque traitement étant répété r fois et a lieu $0, 1, 2...$ ou $n-1$ fois dans chaque bloc.
Le plan est dit équilibré si le produit de deux lignes de la matrice d'incidence du plan $N = (n_{ij})_{(v,b)}$ est de la forme : $(\mu - \lambda).\delta_{il} + \lambda$, où $\mu = \sum_{j=1}^{b} n_{ij}^2$ et $\lambda = \sum_{j=1}^{b} n_{ij}.n_{lj}$ sont indépendantes des lignes i et l $(i \neq l)$, δ_{il} le symbole de Kronecker et n_{ij} le nombre de répétitions du $i^{ème}$traitement dans le $j^{ème}$ bloc.

Dans la suite de l'exposé, on note ces plans par $\mathcal{P}_n\left(\nu, b^{(n)}, k^{(n)}, r^{(n)}, \mu^{(n)}, \lambda^{(n)}\right)$

Description de la méthode de construction :

La méthode consiste en un schéma récursif issu d'une géométrie projective $\mathcal{V}_m$ de dimension m de laquelle on extrait l'ensemble de toutes les sous-variétés linéaires distinctes de dimension m_1 $(m_1 < m)$, auquel correspond un système de $\mathcal{BIEB}$ dit de génération d'ordre 1 et que l'on convient de noter par $\{\mathcal{V}(i_1) : 1 \leq i_1 \leq b_1\}$. Ensuite, considérant chaque sous variété $\mathcal{V}(i_1)$ de ce système, comme étant une géométrie projective de dimension m_1, on construit toutes les sous-variétés linéaires distinctes $\{\mathcal{V}(i_1, i_2) : 1 \leq i_2 \leq b_2\}$ de même dimension m_2 $(m_2 < m_1)$, contenues dans la sous-variété $\mathcal{V}(i_1)$. Ce système est identifié à un $\mathcal{BIEB}$ dit de génération d'ordre 2. A l'issue de cette première opération, si on procède à la juxtaposition de toutes les sous-variétés emboitées $\mathcal{V}(i_1)$ et $\mathcal{V}(i_1, i_2)$, on obtient un système de blocs ternaires $\{\mathcal{V}(i_1) \vee \mathcal{V}(i_1, i_2) : 1 \leq i_2 \leq b_2 \text{ et } 1 \leq i_1 \leq b_1\}$, où $\mathcal{V}(i_1) \vee \mathcal{V}(i_1, i_2)$ est la juxtaposition de la sous-variété $\mathcal{V}(i_1, i_2)$ avec son ascendant $\mathcal{V}(i_1)$. De la même manière, un plan $n-$aires équilibré est obtenu en répétant cette opération "d'extraction" $(n-1)-$fois et en procédant ensuite à la juxtaposition de chaque bloc final $\mathcal{V}(i_1, ..., i_{n-1})$ à tous les blocs souches d'où il dérive $\{\mathcal{V}(i_1, ..., i_j) : 1 \leq j \leq n-2\}$.

Les paramètres de ce plan sont entièrement déterminés et leurs expressions sont données par le théorème suivant:

Théorème : Les plans $\mathcal{P}_n\left(\nu, b^{(n)}, k^{(n)}, r^{(n)}, \mu^{(n)}, \lambda^{(n)}\right)$ sont des plans $n-$aires équilibrés et on a :

$$b^{(n)} = \prod_{j=1}^{n-1} b_j, \qquad k^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-1} k_j,$$

$$r^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} j.(b_{j+1} - r_{j+1}) \times \left[\prod_{l=j+2}^{n-1} b_l\right] \times \left[\prod_{l=1}^{j} r_l\right],$$

$$\mu^{(n)} = \sum_{j=0}^{n-1} j^2. \left(b_{j+1} - r_{j+1}\right) \times \left[\prod_{l=j+2}^{n-1} b_l\right] \times \left[\prod_{l=1}^{j} r_l\right],$$

$$\lambda^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-2} 2j. \left[r_{j+1} - \lambda_{j+1}\right] . \prod_{l=1}^{j} \lambda_l \times \sum_{i=j+1}^{n-1} i. \left(b_{i+1} - r_{i+1}\right) . \prod_{l=j+2}^{i} r_l. \prod_{l=i+2}^{n-1} b_l$$
$$+ \sum_{j=1}^{n-1} j^2. \left[b_{j+1} - 2r_{j+1} + \lambda_{j+1}\right] . \prod_{l=1}^{j} \lambda_l . \prod_{l=j+2}^{n-1} b_l$$

avec $\prod_{l=j+2}^{i} r_l = 1$ si $j+1 \geq i$, $\prod_{l=q}^{n-1} b_l = 1$ si $q \geq n$, $b_n - r_n = 1$ et $b_n - 2r_n + \lambda_n = 1$ et où r_j (resp. λ_j) le nombre de répétitions d'un traitement (resp. le nombre d'occurences d'un couple de traitements) dans un $\mathcal{BIEB}$ de génération j.

Exemple :

Dans une $\mathcal{PG}(3,2)$ il y a 15 sous-variétés distinctes de dimension 2. Chaque sous variété correspond à un bloc entièrement déterminé par une des équations : $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \bmod (2)$, les $a_i \in \mathcal{GF}(2)$ (le corps de Galois de paramètre 2), et chaque point p est défini par ses 4 composantes (x_1, x_2, x_3, x_4). Le système de $\mathcal{BIEB}$ résultant a pour paramètres : $v = b_1 = 15, r_1 = k_1 = 7$ *et* $\lambda_1 = 3$. Et chaque bloc est identifié à une de ses sous-variétés. De nouveau, chaque bloc considéré comme une sous-variété linéaire de dimension 2, fournit à son tour un système de $\mathcal{BIEB}(7,7,3,3,1)$ de la génération d'ordre 2, entièrement déterminé par le système d'équations :

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \bmod (2) \\ \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3 + \alpha_4x_4 = 0 \bmod (2) \end{cases}$$, où les coefficients a_i et $\alpha_i \in \mathcal{GF}(2)$.

En juxtaposant chaque bloc b_j à chacun de ses descendants $b_{j,l}$ $l = \overline{1,7}$ et $j = \overline{1,15}$, on obtient le plan ternaire $\mathcal{P}_3$ caractérisé par les paramètres $\nu = 15$, $b^{(3)} = 105$, $r^{(3)} = 70$, $k^{(3)} = 10$ et $\lambda^{(3)} = 42$. La matrice $N.^tN$ a pour coefficients $\mu = 112$ sur la diagonale et $\lambda = 42$ ailleurs.

Construction d'une classe de plans $n-$aires particuliers

En général, le dispositif $\mathcal{P}_n$ pour m grand, comporte un nombre important de blocs. Cependant, il est possible de réduire le nombre de blocs, en imposant par exemple à chaque traitement d'apparaître $0, 1, q_1, ..., q_s$ ou $n-1$ fois, et où les (q_i) sont strictement croissants. Ceci revient en faît, à extraire des plans $n-$aires équilibrés particuliers du plan $\mathcal{P}_n$.

Proposition : Pour toute suite $\{q_1, ..., q_s\}$ d'entiers tels que $1 = q_0 < q_1 < ... < q_s < n-1$, il existe un plan $\mathcal{Q}_n$ $n-$aires équilibré et dans lequel chaque traitement apparaît soit $0, 1, q_1, ..., q_s$ ou $n-1$ fois, entiérement déterminé par les paramètres $\left(\nu, b'^{(n)}, r'^{(n)}, k^{(n)}, \lambda'^{(n)}\right)$ où $k^{(n)}$ est le même que ci-dessus et

$$b'^{(n)} = (b_1 - r_1) . \prod_{j=2}^{n-1} b_j + \sum_{l=0}^{s} \prod_{j=1}^{q_l} r_l . (b_{q_l+1} - r_{q_l+1}) . \prod_{j=q_l+2}^{n-1} b_j + \prod_{j=1}^{n-1} r_j,$$

$$r'^{(n)} = \sum_{l=0}^{s} q_l \prod_{j=1}^{q_l} r_l . (b_{q_l+1} - r_{q_l+1}) . \prod_{j=q_l+2}^{n-1} b_j + (n-1) \prod_{j=1}^{n-1} r_j$$

$$\mu'^{(n)} = \sum_{l=0}^{s} q_l^2 \prod_{j=1}^{q_l} r_l . (b_{q_l+1} - r_{q_l+1}) . \prod_{j=q_l+2}^{n-1} b_j + (n-1)^2 \prod_{j=1}^{n-1} r_j$$

$$\begin{aligned}\lambda'^{(n)} &= \sum_{\tau=0}^{s} q_\tau^2 . \prod_{j=1}^{q_\tau} \lambda_j . (b_{q_\tau+1} - 2r_{q_\tau+1} + \lambda_{q_\tau+1}) . \prod_{j=q_\tau+2}^{n-1} b_j \\ &+2 \sum_{\tau=0}^{s} q_\tau . q_{\tau'} . \prod_{j=1}^{q_\tau} \lambda_j . (r_{q_\tau+1} - \lambda_{q_\tau+1}) . \prod_{j=q_\tau+2}^{q_{\tau'}} r_j . \left(b_{q_{\tau'}+1} - r_{q_{\tau'}+1}\right) . \prod_{j=q_{\tau'}+2}^{n-1} b_j \\ &+2 (n-1) \sum_{\tau=0}^{s} q_\tau \prod_{j=1}^{q_\tau} \lambda_j . (r_{q_\tau+1} - \lambda_{q_\tau+1}) . \prod_{j=q_\tau+2}^{n-1} r_j + (n-1)^2 \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j .\end{aligned}$$

Un plan $n-$aires particulier issu du précédent est le plan $n-$aires dans lequel chaque traitement apparaît soit au plus une fois, soit $(n-1)$ fois, ce qui correspond à une suite $(q_1, ..., q_s)$ telle que $q_1 = ... = q_s = 0$.

Corollaire : Il existe un plan $\mathcal{R}_n$ $n-$aires équilibré dans lequel chaque traitement apparaît au plus 1 fois ou $n-1$ fois exactement. Ce plan est entiérement déterminé par les paramètres $\left(\nu, b"^{(n)}, r"^{(n)}, k^{(n)}, \lambda"^{(n)}\right)$ où $k^{(n)}$ est le même que ci-dessus et

$$b"^{(n)} = (b_1 - r_1) . \prod_{j=2}^{n-1} b_j + r_1 (b_2 - r_2) . \prod_{j=3}^{n-1} b_j + \prod_{j=1}^{n-1} r_j,$$

$$r"^{(n)} = r_1 (b_2 - r_2) . \prod_{j=3}^{n-1} b_j + (n-1) . \prod_{j=1}^{n-1} r_j,$$

$$\mu"^{(n)} = r_1 (b_2 - r_2) . \prod_{j=3}^{n-1} b_j + (n-1)^2 . \prod_{j=1}^{n-1} r_j,$$

$$\lambda"^{(n)} = \lambda_1 (b_2 - 2r_2 + \lambda_2) . \prod_{j=3}^{n-1} b_j + 2 (n-1) . \lambda_1 (r_2 - \lambda_2) \prod_{j=3}^{n-1} r_j + (n-1)^2 \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j$$

Le nombre de blocs dans le dispositif $\mathcal{R}_n$ est relativement plus petit que celui du dispositif $\mathcal{Q}_n$.

Bibliographie

[1] Agarwal, S.C and Das, M.N. (1987) A note on construction and application of balanced n-ary designs. Sankhya Ser B, 49,192-196.

[2]Billington E.J. and Robinson P.J. (1983) A list of balanced ternary designs with R ■ 15, and some necessary existence conditions, Ars Combin.16, 235-258.

[3]Billington E.J. (1984) Balanced n-ary designs: a combinatorial survey and some new results, Ars Combin.17A, 37-72.

[4]Bryant,D.E and Khodkar,A. (1997) A census of (9;1;3;2) balanced ternary designs, J.Combin.Math.Combin.Comput.23, 153.160.

[5]Dey, A. (1970) Construction of balanced n-ary block designs, Ann. Inst. Statist. Math.,22 ,389-393.

[6]Gheribi-Aoulmi Z. and Bousseboua M. (2005) Recursive methods for construction of balanced n-ary block design, Serdica Math.J. 31, 189-200.

[7]Khodkar,A.(1992) Constructions of some balanced ternary designs from one factorization, Utilitas math.,42, 213-217.

[8]Kunkle and D.G.Sarvate. (1995) On ternary designs with a specified number of blocks with repeated elements, Ars Combin., 40 ,129-142.

[9]Morgan E.J. (1977) Construction of balanced n-ary design, Utilitas Math.11, 3-31.

[10]Murty, J.S. and Das, M. N. (1968) Construction of balanced n-ary block designs and their uses, Jour. Ind. Statist. Assoc., 5.

[11]Ryoh Fuji Hara, Shinji Kuriki, Ying Miao and Satoshi Shinohara (2002) Balanced nested designs and balanced n-ary designs, J.S.P.I ; Vol 106, Issues 1-2, 57-67.

[12]Saha, G. M. (1975) On construction of balanced ternary designs, Sankhyä, B, 37, 220-227.

[13]Sinha K. (1992) A construction of balanced ternary designs, Ars Combin.33, 276-278.

[14]Tocher, K.D. (1952) The design and analysis of block experiments. J.Roy.Stat.Soc.Ser B, 45-100.