Une approche de la démonstration de fiabilité système à partir de tests sur composants unitaires: cas d'un système en série avec lois de Weibull

Léo Gerville-Réache, Vincent Couallier

UNE APPROCHE DE LA DÉMONSTRATION DE FIABILITÉ SYSTÈME À PARTIR DE TESTS SUR COMPOSANTS UNITAIRES: CAS D'UN SYSTÈME EN SÉRIE AVEC LOIS DE WEIBULL

Léo Gerville-Réache & Vincent Couallier

Université de Bordeaux, UMR 5251, Bordeaux, F-33000, France
O5 56 84 52 45, leo.gerville@u-bordeaux2.fr

Résumé : Démontrer un objectif de fiabilité est souvent une nécessité pour les industriels répondant à des appels d'offre de plus en plus exigeants. Quand l'objectif de fiabilité requis se place au niveau du système global, la simple utilisation des normes de calcul pour la démonstration de fiabilité pour chaque sous-système doit être revue pour intégrer chaque test dans un ensemble. Il n'est pas rare de demander des fiabilités de l'ordre de 0.999 sur chaque sous-système pour garantir que la fiabilité système dépasse 0.8 (à horizon donné). Nous proposons une approche dont le but est de déterminer les temps de test permettant de valider que la fiabilité d'un système en série (définie en terme de quantile de probabilité) est supérieure à une valeur objective à partir de *k* tests unitaires sur composants en évitant le calcul, trop conservateur, du produit des niveaux de confiance.

Abstract : Reliability demonstration is often a necessity for industiels how need to prouve the quality for their production. When the objective of reliability is situated at the level of the global system, the simple use of the mathematical norms for the reliability demonstration of each subsystem must be seen again to insert each test into the system. It is not rare to need a reliability arround 0.999 on every subsystem to guarantee that reliability system exceeds 0.8 (on given time). We propose an approach to determine the time of test allowing to validate that the reliability of a serial system (defined in term of quantile of probability) is greater than an objective value from *k* tests on components by avoiding the method, too much conservative, of the confidence levels product.

Mots clés : démonstration de fiabilité système, risque d'erreur, loi exponentielle, loi de Weibull.

1- Introduction

Un système est un ensemble de pièces unitaires réunies pour le bon fonctionnement d'un l'ensemble. Chaque pièce unitaire possède sa fiabilité propre. La fiabilité du système dépend alors de la fiabilité des pièces unitaires et de leur architecture dans le système. Un système composé de *k* pièces unitaires est un système monté en série si la fiabilité du système est le produit des fiabilités des pièces unitaires :

$$R_s(t) = \prod_{i=1}^{k} R_i(t)$$

Cette égalité traduit le fait que le système tombe en panne dès que l'une des pièces unitaires tombe en panne. La durée de vie du système est :

$$T_s = \min\left(T_1, T_2, \ldots, T_k\right)$$

Un dimensionnement classique pour un test de démonstation de fiabilité se placent dans le cadre méthodologique de la planification expérimentale : il peut s'agir de déterminer le nombre de pièces de l'échantillon et le cadre d'observation sous une contrainte de modèle (spécification des lois de distribution) dans un objectif précis. La méthode repose sur l'existence de formules explicites pour les intervalles de confiance unilatéraux du ou des paramètres inconnus de la loi de fiabilité.

Par exemple, sous l'hypothèse qu'une durée de vie T suit une loi exponentielle de paramètre inconnu λ, on rencontre souvent le plan suivant :

Objectif : définir un plan pour démontrer, avec la confiance, γ que $R(t_0) = P(T > t_0) > R_0$ ce qui est équivalent à $\mathbf{E}(T) = MTTF > MTTF_0 = t_0 / \ln(R_0)$, [1]ou encore $t_{1-R_0} > t_0$,[2].

Cadre d'observation[3]: fixer le temps T (à déterminer) pour l'observation, observer successivement les durées de vie T1, T2,... des pièces mises en test à concurrence d'une durée totale fixée d'observation T.

Alors, en se fixant c, nombre maximal admissible de défaillances à observer (c peut être nul), le temps d'essai T est égal à:

$$T = \frac{1}{2\lambda_0}\chi^2_{2c+2}(\gamma) = MTTF_0 \frac{\chi^2_{2c+2}(\gamma)}{2}$$

***Démonstration* :** Soit N le nombre aléatoire de défaillances observées, si $N \le c$ alors on a démontré l'objectif de fiabilité avec une confiance supérieure à γ.

A confiance donnée γ, le fait de prendre $c = 0$ (démonstration zéro défaillance) conduit au temps de test minimal $T = MTTF_0 \ln(1/(1-\gamma))$. Ceci dit, l'utilisation à grande échelle dans un objectif de fiabilité système conduit au défaut suivant. Si les *k* sous-systèmes en série ont passé une démonstration de fiabilité ave succès pour l'objectif $\lambda_i < \lambda_i^0$, l'objectif système $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i < \sum_{i=1}^{k}\lambda_i^0 = \lambda^0$ n'est démontré qu'à une confiance supérieure à γ^k, valeur pouvant être très faible si *k* est grand.[4]

Pour pallier ce problème, nous développons dans ce papier une approche dont le but est de déterminer le temps d'essai permettant de valider que la fiabilité d'un système en série (définie en terme de quantile de probabilité) est supérieure à une valeur fixée $t^0_{P_s}$ à partir de *k* tests unitaires de démonstration de fiabilité. Chaque test unitaire produisant une borne inférieure d'intervalle de confiance au niveau $\gamma = 1-\alpha$, il faut en déduire une borne inférieure d'intervalle de confiance au niveau $\gamma = 1-\alpha$ pour la fiabilité du système en série.

Le cas des lois non exponentielles est abordé. Si les sous-systèmes subissent un vieillissement, il est d'usage courant de modéliser la durée de vie d'un sous-système par une loi de Weibull $W(\eta,\beta)$. En utilisant le fait que T^β suit alors une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \eta^{(-\beta)}$ la méthode de démonstration "zéro défaillance" est applicable en supposant connu le paramètre β de chaque loi de sous-systèmes.

---

[1] MTTF : Mean Time To Failure : espérance de la distribution des durées de vie
[2] t(1-R0) est le quantile à droite de la distribution, il vaut ln(1/1-p))/lambda pour une loi exponentielle
[3] Schéma d'observation : censure de type I avec remplacement (référence, Coccozza, page 386)
[4] une démonstration à 90% de confiance de la fiabilité de 20 sous-sytèmes prouvent la fiabilité globale à 12% de confiance.

2- Démonstration de fiabilité d'un système (essais unitaires "zéro défaillance")

Pour chaque pièce du système, un essai de démonstration de fiabilité « zéro défaillance » est dimensionné et réalisé. Soit $T_1, T_2, ..., T_k$ les temps d'essais unitaires nécessaires pour démontrer, au niveau de confiance $1-\alpha$, un objectif de fiabilité sur les quantiles $t^0_{P_1}$, $t^0_{P_2}, \ldots, t^0_{P_k}$, respectivement pour les pièces n°1, n°2,…, n°*k*. Si tous les essais sont réalisés et qu'aucune défaillance n'a été observée cela signifie que le système en série a fonctionné, sans défaillance, le temps :

$$T_s = \min(T_1, T_2, ..., T_k)$$

On peut calculer le quantile $t^0_{p_s}$ tel que : $t_{p_s} > t^0_{p_s}$ au niveau de confiance $1-\alpha$.

Si $\beta_1 = ... = \beta_k$ pour les sous systèmes, la loi de fiabilité du système global suit également une loi de Weibull. Pour des coefficients de vieillissement relativement proche et un $t^0_{p_s}$ proche de 0, on approxime la loi de fiabilité du système global par une loi de Weibull de coefficient de vieillissement $\beta_s = (\beta_1 + ... + \beta_k)/k$. Ainsi, on utilise l'approximation suivante :

$$t^0_{p_s} = T_s \left[\frac{\ln(1-p)}{\ln(\alpha)}\right]^{1/\beta_s}$$

2-1 Exemple 1 (Temps d'essai égaux)

Pour un système composé de 10 sous systèmes ayant chacun un mode de défaillance et des valeurs $\beta_1, ..., \beta_k$ identifiées, si chaque pièce passe avec succès un temps de test fixé T=10000 heures et identique à tous, on a alors démontré des valeurs différentes pour la fiabilité de chaque sous-système (valeurs données en termes de quantile à 10%.).

N° du sous système	Coefficient de vieillissement (Bêta)	Nombre de pièces /Nombre de défaillances admissibles	T10% au niveau de confiance 70% à démontrer	Temps d'essai de démonstration
1	2	1/0	2958	10000
2	3	1/0	4439	10000
3	1,5	1/0	1971	10000
4	2	1/0	2958	10000
5	2	1/0	2958	10000
6	2,5	1/0	3774	10000
7	2,5	1/0	3774	10000
8	1,5	1/0	1971	10000
9	1,8	1/0	2583	10000
10	2	1/0	2958	10000

Les 10 tests unitaires ont été réalisés avec succès. Cela signifie que le système global (recomposé) a fonctionné sans défaillance pendant : $t_s = 10000$. Nous avons donc

$$t^0_{p_s} = t_s \left[\frac{\ln(1-p)}{\ln(\alpha)}\right]^{1/\beta_s} = 10000 * \left[\frac{\ln(0,9)}{\ln(0,3)}\right]^{\frac{1}{2,08}} = 3100$$

Nous avons démontré que le T10% du système global est supérieur à 3100 (au niveau de confiance de 70%)

2-2 Exemple 2 (T10% égaux)

Pour un système composé de 10 sous systèmes ayant chacun un mode de défaillance et des valeurs $\beta_1,...,\beta_k$ identifiées, si chaque pièce passe avec succès un temps de test fixé T_i pour démontrer le même objectif de fiabilité (T10%=5000 heures), on a alors démontré la même fiabilité pour chaque sous-système mais en des temps de tests différents.

N° du sous système	Coefficient de vieillissement (Bêta)	Nombre de pièces /Nombre de défaillances admissibles	T10% au niveau de confiance 70% à démontrer	Temps d'essai de démonstration TT
1	2	1/0	5000	16902
2	3	1/0	5000	11262
3	1,5	1/0	5000	25367
4	2	1/0	5000	16902
5	2	1/0	5000	16902
6	2,5	1/0	5000	13248
7	2,5	1/0	5000	13248
8	1,5	1/0	5000	25367
9	1,8	1/0	5000	19351
10	2	1/0	5000	16902

Les 10 tests unitaires ont été réalisés avec succès. Cela signifie que le système global (recomposé) a fonctionné sans défaillance pendant : $T_s = \min(T_1, T_2, ..., T_k)$ =11262

Nous avons donc

$$t^0_{p_s} = TT_s\left[\frac{\ln(1-p)}{\ln(\alpha)}\right]^{1/\beta_s} = 11262 * \left[\frac{\ln(0,9)}{\ln(0,3)}\right]^{\frac{1}{2,08}} = 3491$$

Nous avons démontré que le T10% du système global est supérieur à 3491 (au niveau de confiance de 70%)

2-3 Si tous les essais sont réalisés et au moins une défaillance a été observée

Chaque essai unitaire est associé à un risque de non démonstration dépendant de la vraie valeur du t_p. Plus le nombre d'essais unitaires est important (5, 10 ou plus), plus la probabilité d'avoir au moins un échec de démonstration est grand. Que faire si au moins un essai est un échec ? Que peut-on dire de la fiabilité du système global ?

Un échec de l'essai unitaire zéro défaillance, c'est l'apparition d'une défaillance avant la fin du temps de démonstration. Le traitement statistique de cette défaillance permet de calculer une borne inférieure (au niveau 1-α) de l'intervalle de confiance du t_{P_i}. Cette borne inférieure correspond à un essai (0 défaillance) où le temps d'essai serait plus petit. On propose donc de calculer le temps d'essai unitaire (0 défaillance) conduisant à la même borne inférieure (au niveau 1-α) de l'intervalle de confiance du t_{P_i}.

Soit $t^0_{P_{i\inf}}$ la borne inférieure (au niveau 1-α) de l'intervalle de confiance du $t^0_{P_i}$ obtenue après l'échec de démonstration (0 défaillance) de l'essai unitaire *i*. Le temps d'essai unitaire (0 défaillance) conduisant au même $t^0_{P_{i\inf}}$ est donné par :

$$T = \left[\frac{\ln(\alpha)}{\ln(1-p)} \left(t^0_{p_{i\inf}} \right)^{\beta_i} \right]^{1/\beta_i} = t^0_{p_{i\inf}} \left[\frac{\ln(\alpha)}{\ln(1-p)} \right]^{1/\beta_i}$$

En reprenant l'exemple 1, on suppose que le sous système 5 n'a pas réussi son essai de démonstration unitaire : la pièce a cassé à 8000 heures.

Dans ce cas, on a : $t^0_{10\%_{i\inf}}$ =1537 heures au niveau de confiance 70%. Le temps équivalent vaut :

$$T = 1537 * \left[\frac{\ln(0,3)}{\ln(0,9)} \right]^{1/2} = 5196$$

On remplace donc dans le tableau de l'exemple 1, pour le 5ème système 10000 par 5196. Le nouveau tableau des temps zéro défaillance. Pour le système, on a : $t_s = \min(t_1, t_2, ..., t_k) = 5137$ et :

$$t^0_{p_s} = 5137 * \left[\frac{\ln(0,9)}{\ln(0,3)} \right]^{\frac{1}{2,08}} = 1593 \text{ (contre 3100)}$$

Le "coût" de cet échec est cher ! Il faut donc planifier l'essai de démonstration pour le système en tenant compte de ce type de risque.

3- Optimisation de la démonstration de la fiabilité d'un système en série.

L'objectif est de proposer un essai de démonstration pour chaque sous système qui optimise la démonstration système. Aussi, pour un risque d'échec global fixé pour la démonstration de fiabilité du système, on planifie des essais unitaires sur chaque sous système qui maximise la valeur de $t^0_{p_s}$ démontrée.

4-1 Principe de base de l'optimisation

On se fixe un objectif de démonstration pour le système, un niveau de confiance et un risque de non démonstration. On en déduit pour chaque test unitaire un même risque de non démonstration :

$$\alpha_{iN\_D} = 1 - \left(1 - \alpha_{N\_D}\right)^{1/k}.$$

On dimensionne chaque essai unitaire (0 ou k défaillances) de telle sorte que le risque de non démonstration de chaque essai unitaire soit α_{iN_D}.

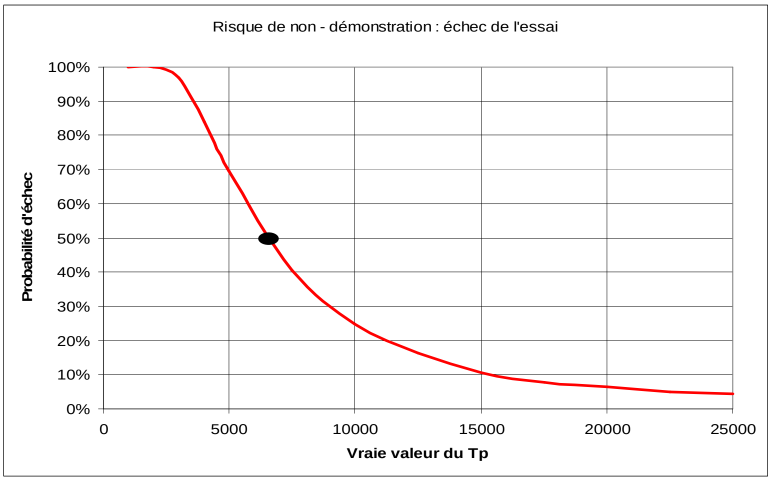
4-2 Exemple

Objectif de fiabilité du système : $t^0_{10\%_s} = 5000$; Niveau de confiance : $1-\alpha = 70\%$; Risque de non démonstration : $\alpha_{N\_D} = 0,5$. Pour notre système en exemple, on a $\beta = 2,08$. Cela signifie que la durée d'un essai 0 défaillance pour le système est de :

$$T = 5000 * \left[\frac{\ln(0,3)}{\ln(0,9)} \right]^{1/2,08} = 16129$$

Par simulation numérique ou calcul explicite (losque cela est possible, c'est pour une vraie valeur de $t_{10\%_s} = 6500$ que le risque de non démonstration vaut $\alpha_{N\_D} = 0,5$.

Le risque de non démonstration de chaque sous système vaut : $\alpha_{iN\_D} = 1-(1-0,5)^{1/10} = 0,067$.



Le dimensionnement de chaque essai unitaire doit donc avoir un risque de non démonstration de 6,7%, et les bornes inférieures des intervalles de confiance à 70% doivent conduire à des temps d'essai (équivalent 0 défaillance) de 16129.

Resutlats pour deux typesd'éssais : essais 1/0 et 3/1

N° du sous système	Bêta	T10% au niveau de confiance 70% à démontrer	Temps d'essai de démonstration Essai 1/0	Valeur minimale du vrai T10% Essai 1/0	Temps d'essai de démonstration Essai 3/1	Valeur minimale du vrai T10% Essai 3/1
1	2	4771	16129	20000	14791(x3)	12000
2	3	7160	16129	18500	15223(x3)	13000
3	1,5	3179	16129	21500	14370(x3)	11500
4	2	4771	16129	20000	14791(x3)	12000
5	2	4771	16129	20000	14791(x3)	12000
6	2,5	6087	16129	19500	15049(x3)	12500
7	2,5	6087	16129	19500	15049(x3)	12500
8	1,5	3179	16129	21500	14370(x3)	11500
9	1,8	4167	16129	21000	14649(x3)	11800
10	2	4771	16129	20000	14791(x3)	12000

4- Conclusion

La démonstration de la fiabilité d'un système intègre toutes les techniques de démonstration d'un essai unitaire. La difficulté supplémentaire est de planifier les essais unitaires sous les contraintes données par un objectif global de fiabilité pour le système. Le risque de non démonstration et alors au cœur du dispositif de planification. Ce sont ici les "a priori" sur les fiabilités des sous systèmes qui sont alors essentiels.

5- Bibliographie

[1] MIL HDBK 781 (1987)

[2] W.Q. Meeker and L.A. Escobar, Statistical Methods for Reliability, John Wiley & Sons, (1998)