



# Une nouvelle approche des bornes Bayésiennes

Alexandre Renaux, Philippe Forster, Pascal Larzabal

► **To cite this version:**

Alexandre Renaux, Philippe Forster, Pascal Larzabal. Une nouvelle approche des bornes Bayésiennes. Colloque GRETSI 2005, 2005, Louvain la neuve, Belgique. 2005. <inria-00444831>

**HAL Id: inria-00444831**

**<https://hal.inria.fr/inria-00444831>**

Submitted on 7 Jan 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Une nouvelle approche des bornes Bayésiennes

Alexandre RENAUX<sup>1</sup>, Philippe FORSTER<sup>2</sup>, Pascal LARZABAL<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire SATIE / UMR 8029

ENS Cachan 61, avenue du Président Wilson 94235 Cachan Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire GEA

IUT Ville d'Avray, 1 Chemin Desvallières, 92410 Ville d'Avray, France

Renaux@satie.ens-cachan.fr, Philippe.Forster@cva.u-paris10.fr, Larzabal@satie.ens-cachan.fr

**Résumé** – Ce papier traite des bornes minimales de l'erreur quadratique moyenne dans un cadre Bayésien. Nous exprimons l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur de la moyenne conditionnelle, qui est la meilleure borne Bayésienne, sous la forme d'un problème d'optimisation sous un continuum de contraintes. La discrétisation de ce continuum conduit à une méthode permettant l'unification des bornes classiques. En outre, l'introduction de nouvelles contraintes permet d'obtenir des bornes jusqu'à lors inexplorées. C'est ainsi que cette approche nous permet d'élaborer une version Bayésienne de la borne d'Abel.

**Abstract** – This paper deals with minimal bounds on the mean square error in the Bayesian context. We express the minimum mean square error of the conditional mean estimator as the solution of a continuum constrained optimization problem. And, by sampling these constraints, we obtain the classical Bayesian bounds. Moreover, this method enables us to derive new bounds as the Bayesian version of the deterministic Abel bound.

## 1 Introduction

Nous étudions le problème de l'établissement des bornes minimales de l'Erreur Quadratique Moyenne (EQM) dans le cadre d'une *modélisation aléatoire des paramètres*, complétant ainsi les travaux réalisés précédemment sur les bornes déterministes [1]. Dans le cadre de la théorie Bayésienne, il est bien connu que l'Estimateur de la Moyenne Conditionnelle (EMC) donne l'EQM minimale. L'obtention d'une forme analytique de cette EQM reste très difficile voir impossible. Il est dès lors intéressant d'avoir à sa disposition d'autres bornes inférieures de l'EQM d'un estimateur afin d'en apprécier les performances. Ces bornes doivent rester pertinentes lorsque le scénario devient critique (faible Rapport Signal sur Bruit (RSB) et/ou nombre d'observations), ce qui n'est pas le cas de la borne de Cramér-Rao Bayésienne. D'où le récent regain d'intérêt de la communauté pour l'établissement de telles bornes [2].

Le but de cet article est de présenter une approche unifiée de l'obtention des bornes Bayésiennes sous la forme d'un problème d'optimisation sous contraintes. En effet, nous exprimons tout d'abord l'EQM de l'EMC (meilleure borne Bayésienne) à l'aide d'un problème d'optimisation sous un continuum de contraintes. Puis par discrétisation de ce continuum, nous obtenons une méthode pour créer des bornes minimales. Ainsi, nous retrouvons les bornes Bayésiennes classiques et nous illustrons la richesse du concept par l'introduction d'une nouvelle borne.

## 2 EQM Bayésienne minimale

### 2.1 Optimisation sous contraintes

Soient  $\mathbf{x} \in \Omega$  un vecteur d'observation et  $\theta \in \Theta$  un paramètre aléatoire scalaire à estimer. Soient  $f(\mathbf{x}, \theta)$  et  $g(\mathbf{x}, \theta)$  deux fonctions de  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit

$$\langle f(\mathbf{x}, \theta), g(\mathbf{x}, \theta) \rangle = \int_{\Omega} \int_{\Theta} f(\mathbf{x}, \theta) g(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x}, \quad (1)$$

un produit scalaire de ces deux fonctions. Sa norme sera notée  $\|f(\mathbf{x}, \theta)\|^2 = \langle f(\mathbf{x}, \theta), f(\mathbf{x}, \theta) \rangle$ .

*Théorème 1* : Soient  $u(\mathbf{x}, \theta), g_0(\mathbf{x}, \theta), \dots, g_K(\mathbf{x}, \theta)$ , un jeu de fonctions de  $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  et  $c_0, c_1, \dots, c_K$ ,  $K + 1$  nombres réels. Rappelons le résultat déjà utilisé dans [1] : la valeur minimale de  $\|u(\mathbf{x}, \theta)\|^2$  avec les  $K + 1$  contraintes  $\langle u(\mathbf{x}, \theta), g_i(\mathbf{x}, \theta) \rangle = c_i$  pour  $i = 0, \dots, K$  est donnée par

$$\min \|u(\mathbf{x}, \theta)\|^2 = \mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c}, \quad (2)$$

avec  $\mathbf{c} = [c_0, c_1, \dots, c_K]^T$  et  $G_{m,n} = \langle g_m(\mathbf{x}, \theta), g_n(\mathbf{x}, \theta) \rangle$ .

### 2.2 Nouvelle formulation de l'EQM minimale

L'EQM de l'EMC est la solution du problème d'optimisation sous contrainte suivant

$$\begin{cases} \min \int_{\Omega} \int_{\Theta} v^2(\mathbf{x}, \theta) p(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ \text{sous la contrainte } v(\mathbf{x}, \theta) = \hat{\theta}(\mathbf{x}) - \theta \end{cases} \quad (3)$$

\* Cette étude a été partiellement financée par le contrat Européen NEWCOM no. 507325

D'un autre côté, en posant  $v(\mathbf{x}, \theta) = \frac{u(\mathbf{x}, \theta)}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}}$ , le théorème

1 donne la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \min \int_{\Omega} \int_{\Theta} v^2(\mathbf{x}, \theta) p(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ \text{sous les contraintes pour } i = 0, \dots, K \\ \int_{\Omega} \int_{\Theta} v(\mathbf{x}, \theta) g_i(\mathbf{x}, \theta) \sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)} d\theta d\mathbf{x} = c_i \end{cases} \quad (4)$$

Le théorème suivant montre que la contrainte du problème d'optimisation (3) est équivalente à un continuum (c'est à dire  $K \rightarrow \infty$ ) de contraintes appropriées du problème d'optimisation (4). Soit  $F$  l'ensemble des fonctions  $f(\mathbf{x}, \theta)$  telles que  $\int_{\Omega} \int_{\Theta} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} = 1$  et  $w(\mathbf{x}, \theta, h, s) =$

$$\left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta + h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^s - \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta - h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^{1-s} \text{ alors}$$

*Théorème 2 :*

$$\left[ \begin{array}{l} \forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F, \forall h \text{ et } \forall s \\ \int_{\Omega} \int_{\Theta} v(\mathbf{x}, \theta) w(\mathbf{x}, \theta, h, s) f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} = \\ h \int_{\Omega} \int_{\Theta} \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta - h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \end{array} \right] \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta,$$

où  $q$  est une fonction de  $\mathbf{x}$  seulement. La démonstration est fournie en appendice.

L'équation (5) met en jeu un continuum de contraintes. Nous allons restreindre ce continuum à un jeu discret de contraintes ( $K < \infty$ ) par un choix fini de paramètres  $h$  et  $s$ . Par cet échantillonnage des contraintes, la solution du problème d'optimisation (4) va donner des bornes plus basses que l'EQM de l'EMC.

### 3 Bornes Bayésiennes

Dans toute la suite on imposera  $f(\mathbf{x}, \theta) = p(\mathbf{x}, \theta)$  la densité de probabilité jointe du problème.

#### 3.1 Bornes de Cramér-Rao et de Bhattacharyya Bayésiennes

Par dérivations successives de l'intégrale du théorème 2 par rapport à  $h$  (en  $h = 0$ ) et avec  $s = 1$ , il vient  $\int_{\Omega} \int_{\Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial^i f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^i} d\theta d\mathbf{x} = \delta_{1i}$  où  $\delta_{1i}$  est le symbole de Kronecker. On peut dès lors utiliser la formulation (4) en utilisant le jeu des  $K + 1$  contraintes suivant

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}} \left[ p(\mathbf{x}, \theta), \frac{\partial p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta}, \dots, \frac{\partial^K p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^K} \right]^T \quad (6)$$

$$\mathbf{c} = [0, 1, 0, \dots, 0]^T. \quad (7)$$

Le théorème 1 donne alors le minorant de l'EQM de l'EMC suivant

$$\begin{aligned} EQM_{EMC} &\geq \mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c} \\ &= [1, 0, \dots, 0] \mathbf{B}^{-1} [1, 0, \dots, 0]^T, \end{aligned} \quad (8)$$

avec

$$B_{i,j} = \int_{\Omega} \int_{\Theta} \frac{1}{p(\mathbf{x}, \theta)} \frac{\partial^i p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^i} \frac{\partial^j p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta^j} d\theta d\mathbf{x}. \quad (9)$$

On retrouve la borne de Bhattacharyya Bayésienne [3]. Et, si on se réduit au cas particulier  $K = 1$ , on obtient  $EQM_{EMC} \geq \left( \int_{\Omega} \int_{\Theta} \frac{1}{p(\mathbf{x}, \theta)} \frac{\partial p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} \right)^{-1}$  qui n'est autre que la borne de Cramér-Rao Bayésienne (BCRB) [3].

#### 3.2 Bornes de Barankin Bayésienne et de Bobrovsky-Zakai

De manière similaire, par une discrétisation du paramètre  $h$  de l'intégrale intervenant dans le théorème 2 et en posant  $s = 1$ , on obtient le jeu des  $K + 1$  contraintes suivant

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}} \begin{bmatrix} p(\mathbf{x}, \theta) \\ p(\mathbf{x}, \theta + h_1) \\ \vdots \\ p(\mathbf{x}, \theta + h_K) \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\mathbf{c} = [0, h_1, \dots, h_K]^T = [0, \mathbf{h}^T]^T. \quad (11)$$

Le théorème 1 donne alors le minorant suivant

$$\begin{aligned} EQM_{EMC} &\geq \mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c} \\ &= \mathbf{h}^T (\mathbf{D} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (12)$$

avec  $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$  et

$$D_{i,j} = \int_{\Omega} \int_{\Theta} \frac{p(\mathbf{x}, \theta + h_i) p(\mathbf{x}, \theta + h_j)}{p(\mathbf{x}, \theta)} d\theta d\mathbf{x}. \quad (13)$$

Par maximisation sur le vecteur  $\mathbf{h}$ , on obtient une borne, que nous appellerons borne de Barankin Bayésienne par analogie avec le cas déterministe. Bien que n'ayant jamais été étudiée, cette borne est un cas particulier de la borne hybride proposée par Reuven-Messer dans [4]. Elle est donnée par

$$EQM_{EMC} \geq \max_{\mathbf{h}} \mathbf{h}^T (\mathbf{D} - \mathbf{1}\mathbf{1}^T)^{-1} \mathbf{h}. \quad (14)$$

Si on se réduit au cas particulier  $K = 1$ , on obtient  $EQM_{EMC} \geq \max_h \frac{h^2}{\int_{\Omega} \int_{\Theta} \frac{p^2(\mathbf{x}, \theta + h)}{p(\mathbf{x}, \theta)} d\theta d\mathbf{x} - 1}$  qui est la borne de Bobrovsky-Zakai (BBZ) [5].

#### 3.3 Borne de Weiss-Weinstein

Enfin, par une discrétisation des paramètres  $h$  et  $s$  de l'intégrale intervenant dans le théorème 2, on obtient le jeu des  $K + 1$  contraintes suivant

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{g}}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}} &= \begin{bmatrix} 1 \\ L^{s_1}(\mathbf{x}|\theta + h_1, \theta) - L^{1-s_1}(\mathbf{x}|\theta - h_1, \theta) \\ \vdots \\ L^{s_K}(\mathbf{x}|\theta + h_K, \theta) - L^{1-s_K}(\mathbf{x}|\theta - h_K, \theta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{c} &= \begin{bmatrix} 0 \\ h_1 E [L^{1-s_1}(\mathbf{x}|\theta - h_1, \theta)] \\ \vdots \\ h_K E [L^{1-s_K}(\mathbf{x}|\theta - h_K, \theta)] \end{bmatrix} = [0, \boldsymbol{\xi}^T]^T, \end{aligned} \quad (15)$$

avec  $L(\mathbf{x}|\theta_1, \theta_2) \triangleq \frac{p(\mathbf{x}, \theta_1)}{p(\mathbf{x}, \theta_2)}$ .

Le théorème 1 donne alors le minorant suivant

$$EQM_{EMC} \geq \mathbf{c}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{c} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\xi}, \quad (16)$$

avec

$$W_{i,j} = E \left[ \begin{array}{c} (L^{s_i}(\mathbf{x}|\theta + h_i, \theta) - L^{1-s_i}(\mathbf{x}|\theta - h_i, \theta)) \times \\ (L^{s_j}(\mathbf{x}|\theta + h_j, \theta) - L^{1-s_j}(\mathbf{x}|\theta - h_j, \theta)) \end{array} \right]. \quad (17)$$

Par maximisation sur les éléments  $h$  et  $s$ , on retrouve la borne de Weiss-Weinstein [6]

$$EQM_{EMC} \geq \max_{h_1, h_2, \dots, h_K} \max_{s_1, s_2, \dots, s_K} \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{W}^{-1} \boldsymbol{\xi}. \quad (18)$$

### 3.4 Obtention de nouvelles bornes

Grâce à l'introduction d'un jeu de contraintes appropriées, cette approche permet d'obtenir de nouvelles bornes. C'est ainsi que nous établissons une borne plus performante que celle de BBZ, tout en restant d'une complexité équivalente. En effet, en combinant les contraintes de la borne de BCRB et les contraintes de la borne de BBZ, i.e. en posant

$$\mathbf{g} = \frac{1}{\sqrt{p(\mathbf{x}, \theta)}} \left[ p(\mathbf{x}, \theta), \frac{\partial p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta}, p(\mathbf{x}, \theta + h) \right]^T \quad (19)$$

$$\mathbf{c} = [0, 1, h]^T, \quad (20)$$

on obtient directement par application du théorème 1 et maximisation sur  $h$  le minorant suivant

$$EQM_{EMC} \geq \max_h \frac{B_{CRB}^{-1} - 2\Psi + B_{BZ}^{-1}}{(B_{CRB} \times B_{BZ})^{-1} - \Psi^2}, \quad (21)$$

où  $B_{CRB}$  est la BCRB,  $B_{BZ}$  est la BBZ (en omettant la maximisation sur  $h$ ), et

$$\Psi = \frac{1}{h} \int_{\Omega} \int_{\Theta} \frac{\partial \ln p(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} p(\mathbf{x}, \theta + h) d\theta d\mathbf{x}. \quad (22)$$

Cette borne correspond à la version Bayésienne à l'ordre un de la borne d'Abel [7].

## 4 Simulation

Le but de cette partie est de comparer, la BCRB, la BBZ et la borne introduite ci-dessus dans un contexte d'analyse spectrale. Le modèle d'observations est le suivant

$$\mathbf{x} = \rho \mathbf{s} + \mathbf{b}, \quad (23)$$

où  $\mathbf{x}$  est le vecteur ( $N \times 1$ ) des observations,  $\rho^2$  est le Rapport Signal sur Bruit (RSB),  $\mathbf{s} = [1, e^{j\theta}, \dots, e^{j(N-1)\theta}]^T$  est le signal pur,  $\mathbf{b}$  est le vecteur bruit supposé circulaire, Gaussien de moyenne nulle et de covariance  $\mathbf{I}_N$ , et  $\theta$  est la pulsation à estimer. La densité de probabilité a priori de  $\theta$  est prise Gaussienne de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\theta^2$ .

La simulation est réalisée avec  $N = 10$  observations et une variance a priori  $\sigma_\theta^2 = 0.5 \text{ rad}^2/\text{sec}^2$ . Sur la figure 1

nous représentons la BCRB, la BBZ et la borne introduite ci-dessus en fonction du RSB. Dans la région de transition entre la zone asymptotique et la zone a priori, on observe que la borne proposée est plus pertinente que la BBZ. C'est ainsi que la borne proposée donne une meilleure prédiction du décrochement par rapport à la BBZ (5dB dans ce cas).

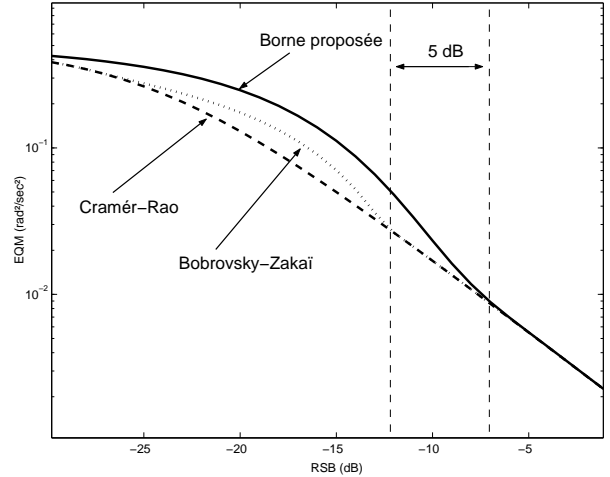


FIG. 1 – Borne de Cramér-Rao Bayésienne, borne de Bobrovsky-Zakaï, et borne proposée en fonction du RSB

Il est intéressant de noter que ce résultat est obtenu avec une complexité de calcul sensiblement identique à la complexité de calcul de la BBZ.

## 5 Conclusion

Ce travail présente une approche unifiée pour l'obtention de bornes Bayésiennes du type inégalité de covariance (également appelée famille Weiss-Weinstein). Par le biais d'un problème d'optimisation sous contraintes continues nous obtenons l'erreur quadratique de l'estimateur de la moyenne conditionnelle. Par un échantillonnage judicieux de ces contraintes nous revisitons les bornes Bayésiennes classiques. L'intérêt principal de cette méthode réside dans le fait que par un choix judicieux de nouvelles contraintes, il est possible de créer de nouvelles bornes. Dans ce sens, nous introduisons et étudions une borne plus pertinente que la borne de Bobrovsky-Zakaï pour une charge de calcul similaire.

## 6 Appendice

Afin de démontrer le théorème 2, nous allons tout d'abord démontrer les deux lemmes suivant

*Lemme 1 :*

$$\left[ \forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F, \int_{\Omega} \int_{\Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} = 1 \right] \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta.$$

Lemme 2 :

$$\left[ \begin{array}{l} \forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F \text{ et } \forall h \\ \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) (f(\mathbf{x}, \theta + h) - f(\mathbf{x}, \theta)) d\theta d\mathbf{x} = h \end{array} \right] \quad (25)$$

$$\Leftrightarrow v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta.$$

Démonstration du lemme 1 :

$$\forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F, \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} = 1, \text{ donc}$$

$$\forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F \int_{\Omega \Theta} \frac{\partial v(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} = -1, \quad (26)$$

L'équation (26) est valable pour toute fonction  $f(\mathbf{x}, \theta)$  telle que  $\int_{\Omega \Theta} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} = 1$ . Donc, en posant  $f(\mathbf{x}, \theta) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, \theta - \theta_0)$ , où  $\delta(\cdot)$  est la distribution de Dirac, on obtient  $\forall \mathbf{x}_0$  et  $\forall \theta_0$

$$\left. \frac{\partial v(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} \right|_{\mathbf{x}_0, \theta_0} = -1 \implies v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta, \quad (27)$$

où  $q(\mathbf{x})$  est fonction de  $\mathbf{x}$  seulement.

D'un autre coté, si on a  $v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta$ , alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \underbrace{[(q(\mathbf{x}) - \theta) f(\mathbf{x}, \theta)]_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} d\mathbf{x} + \int_{\Omega \Theta} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (28)$$

$$= 1,$$

terminant ainsi la preuve.

Démonstration du lemme 2 :  $\forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F$  et  $\forall h$ , on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) (f(\mathbf{x}, \theta + h) - f(\mathbf{x}, \theta)) d\theta d\mathbf{x} = h \\ & \Rightarrow \int_{h=0} \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \frac{\partial f(\mathbf{x}, \theta)}{\partial \theta} d\theta d\mathbf{x} = 1 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\implies v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta,$$

où la dernière implication est donnée par le lemme 1.

D'un autre coté, si on a  $v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta$ , alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) f(\mathbf{x}, \theta + h) d\theta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \theta) f(\mathbf{x}, \theta + h) d\theta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\varphi=\theta+h} \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \varphi) f(\mathbf{x}, \varphi) d\varphi d\mathbf{x} + h, \end{aligned} \quad (30)$$

qui conduit à

$$\int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \theta) (f(\mathbf{x}, \theta + h) - f(\mathbf{x}, \theta)) d\theta d\mathbf{x} = h, \quad (31)$$

terminant ainsi la preuve.

Démonstration du théorème 2 :  $\forall f(\mathbf{x}, \theta) \in F, \forall h$  et  $\forall s$  on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) w(\mathbf{x}, \theta, h, s) f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ &= h \int_{\Omega \Theta} \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta - h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ & \Rightarrow \int_{s=1} \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) (f(\mathbf{x}, \theta + h) - f(\mathbf{x}, \theta)) d\theta d\mathbf{x} = h \\ & \implies v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta, \end{aligned} \quad (32)$$

où la dernière implication est donnée par le lemme 2.

D'un autre coté, si on a  $v(\mathbf{x}, \theta) = q(\mathbf{x}) - \theta$ , alors

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta + h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^s f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \theta) \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta + h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^s f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega \Theta} (q(\mathbf{x}) - \varphi) \left( \frac{f(\mathbf{x}, \varphi - h)}{f(\mathbf{x}, \varphi)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \varphi) d\varphi d\mathbf{x} \\ & \quad + h \int_{\Omega \Theta} \left( \frac{f(\mathbf{x}, \varphi - h)}{f(\mathbf{x}, \varphi)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \varphi) d\varphi d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (33)$$

qui conduit à

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \Theta} v(\mathbf{x}, \theta) w(\mathbf{x}, \theta, h, s) f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x} \\ &= h \int_{\Omega \Theta} \left( \frac{f(\mathbf{x}, \theta - h)}{f(\mathbf{x}, \theta)} \right)^{1-s} f(\mathbf{x}, \theta) d\theta d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (34)$$

terminant ainsi la preuve.

## Références

- [1] P. Forster and P. Larzabal, "Sur les bornes minimales pour l'estimation de paramètres déterministes," in *Proceedings GRETSI*, (Toulouse, France), pp. 707–710, 2001.
- [2] W. Xu, A. B. Baggeroer, and C. D. Richmond, "Bayesian bounds for matched-field parameter estimation," *IEEE Trans. Signal Processing*, vol. 52, pp. 3293–3305, Dec. 2004.
- [3] H. L. V. Trees, *Detection, Estimation and Modulation Theory*, vol. 1. New York : Wiley, 1968.
- [4] I. Reuven and H. Messer, "A Barankin-type lower bound on the estimation error of a hybrid parameter vector," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 43, pp. 1084–1093, May 1997.
- [5] B. Z. Bobrovsky and M. Zakai, "A lower bound on the estimation error for certain diffusion processes," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 22, pp. 45–52, Jan. 1976.
- [6] E. Weinstein and A. J. Weiss, "Lower bounds on the mean square estimation error," *Proceedings of the IEEE*, vol. 73, pp. 1433–1434, Sept. 1985.
- [7] J. S. Abel, "A bound on mean-square-estimate error," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 39, pp. 1675–1680, Sept. 1993.