

# Différenciation numérique multivariable I: estimateurs algébriques et structure

Samer Riachy, Yara Bachalany, Mamadou Mboup, Jean-Pierre Richard

► **To cite this version:**

Samer Riachy, Yara Bachalany, Mamadou Mboup, Jean-Pierre Richard. Différenciation numérique multivariable I: estimateurs algébriques et structure. Sixième Conférence Internationale Francophone d'Automatique Nancy, France, 2-4 juin 2010, Jun 2010, Nancy, France. 2010. <inria-00463786>

**HAL Id: inria-00463786**

**<https://hal.inria.fr/inria-00463786>**

Submitted on 15 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Différenciation numérique multivariable I : estimateurs algébriques et structure

Samer RIACHY<sup>1</sup>, Yara BACHALANY<sup>2</sup>, Mamadou MBOUP<sup>3</sup>, Jean-Pierre RICHARD<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Équipe Commande des Systèmes, ENSEA & Équipe projet ALIEN, INRIA Saclay  
6, Avenue du ponceau. 95014 Cergy-Pontoise, France.  
*samer.riachy@ensea.fr*

<sup>2</sup>LAGIS UMR 8146 CNRS, Université des Sciences et Technologies de Lille,  
59651 Villeneuve d'Ascq, France  
*yara.bachalany@ed.univ-lille1.fr*

<sup>3</sup>CRéSTIC - Université de Reims Champagne Ardenne & EPI ALIEN, INRIA Saclay  
UFR Sciences Exactes et Naturelles, Dépt. EEA – Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS cedex 2  
*Mamadou.Mboup@univ-reims.fr*

<sup>4</sup>Université Lille Nord de France, ECLille & EPI ALIEN, INRIA Lille Nord Europe  
LAGIS, UMR 8146 CNRS – Ecole Centrale de Lille, BP 48, Cité Scientifique. 59651 Villeneuve d'Ascq, France.  
*jean-pierre.richard@ec-lille.fr*

*Résumé*— Nous présentons une méthode novatrice de différenciation numérique multivariable, c'est-à-dire d'estimation des dérivées partielles de signaux multidimensionnels bruités. Partant d'une modélisation locale du signal par un développement de Taylor, nous exprimons la dérivée partielle désirée en fonction d'intégrales itérées du signal bruité. Ces intégrales itérées produisent un filtrage du bruit. Les techniques de calcul présentées permettent alors d'élaborer une famille d'estimateurs pour chaque dérivée partielle. Nous dégagerons une propriété structurelle de ces estimateurs, en terme de relation de récurrence sur les éléments d'une même famille. Cette propriété sera utilisée dans un deuxième article pour étudier les performances des estimateurs.

*Mots-clés*— Différenciation numérique multivariable, estimation.

## I. INTRODUCTION

L'estimation des dérivées partielles successives de signaux multidimensionnels est un problème récurrent dans les domaines de l'ingénierie et des mathématiques appliquées. Citons à titre d'exemple les domaines de l'automatique, du traitement du signal et des images. Le problème est difficile et est encore ouvert dans un environnement bruité.

Lorsque le niveau de bruit est faible, l'approche la plus courante est sans aucun doute celle des différences finies qui présente l'avantage d'être peu coûteuse en temps de calcul et simple à implémenter. On la retrouve ainsi dans de nombreux problèmes notamment en traitement d'images par les méthodes variationnelles, pour l'estimation du mouvement ([17], [26], [5]), la restauration d'images et le débruitage ([27], [1]), la segmentation ([24], [4]), etc.

On peut aussi citer d'autres approches plus spécifiques à un champs disciplinaire donnée. En automatique, par exemple, on peut mentionner les méthodes à base de modèles d'observateurs [3] ou encore les méthodes de dérivation par modes glissants [20].

Cependant, dans la plupart des applications pratiques, le

bruit n'est pas négligeable. Alors, il faut des approches plus robustes, comme par exemple celle des moindres carrées régularisées (voir [6], [18]).

Cet article est une contribution à l'estimation des dérivées partielles successives des signaux multidimensionnels. Étant donné un signal bruité, afin de calculer sa  $n$ -ième dérivée partielle, un modèle local donné par un développement de Taylor multidimensionnel tronqué à l'ordre  $N$  ( $N > n$ ,  $N$  et  $n$  sont des multi-indices) est considéré. Par application d'une transformation de Laplace multivariable, le modèle (local) donné par le développement de Taylor (domaine spatial) est réécrit dans le domaine opérationnel. Des dérivations opérationnelles adéquates suivies de manipulations algébriques relevant du calcul opérationnel classique de Mikusiński [23] permettent d'isoler la dérivée partielle désirée. Une fois revenu au domaine spatial, cet estimée opérationnelle s'exprime en fonction d'intégrales itérées du signal de mesure, bruité.

Cet article constitue une extension aux signaux multidimensionnels de [22] (voir aussi [25] qui contient quelques exemples introductifs). Une contribution intéressante à la différenciation numérique multivariable peut être trouvée dans [19]. Le contenu de ces articles est inspiré des techniques initiées par M. Fliess *et al.* en 2003 [15] en automatique. Ces techniques, qui sont de nature algébrique, sont prometteuses en traitement du signal [11], [12], [13], [21], [22], [25], en commande [7], [8], [16] en détection de défauts [14], et en finance [9], [10].

### Un exemple

Considérons une fonction dépendant de deux variables  $I(\mathbf{x}) = I(x_1, x_2)$ . Son développement de Taylor tronqué à l'ordre  $N = (1, 1)$  autour de  $(0, 0)$  est donné par :

$$I(x_1, x_2) = I(0, 0) + I_{x_1}x_1 + I_{x_2}x_2.$$

où  $I_{x_1} = \frac{\partial I}{\partial x_1}(0, 0)$  et  $I_{x_2} = \frac{\partial I}{\partial x_2}(0, 0)$ . Dans le domaine opérationnel nous obtenons (les notations utilisées seront

précisées dans la section II) :

$$\hat{I}(s_1, s_2) = \frac{I}{s_1 s_2} + \frac{I_{x_1}}{s_1^2 s_2} + \frac{I_{x_2}}{s_1 s_2^2}. \quad (1)$$

Afin de calculer  $I_{x_1}$ , commençons par multiplier (1) par  $s_1 s_2$  et puis dérivons une fois par rapport à  $s_1$ . Le membre de droite de (1) se réduit à  $\frac{I_{x_1}}{s_1^2}$ . Appliquons les mêmes opérations au membre de gauche de (1). Il vient :

$$s_2 \hat{I}(s_1, s_2) + s_1 s_2 \frac{\partial \hat{I}(s_1, s_2)}{\partial s_1} = -\frac{I_{x_1}}{s_1^2}. \quad (2)$$

Notons que la multiplication par  $s_1$  (ou  $s_2$ ) correspond à une dérivation par rapport à  $x_1$  (ou  $x_2$ ) dans le domaine spatial, ce qui n'est pas désirable en présence de bruit. Pour cette raison, multiplions (2) par  $\frac{1}{s_1^2 s_2^2}$  et appliquons une transformée de Laplace inverse pour revenir au domaine spatial. La forme suivante est obtenue :

$$\int_0^{X_1} \int_0^{X_2} (X_1 - x_1) I(x_1, x_2) dx_1 dx_2 + \int_0^{X_1} \int_0^{X_2} (-x_1) I(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = -I_{x_1} \frac{X_1^3}{3!} X_2.$$

Un changement de variable approprié permet de normaliser l'intégrale sur l'intervalle  $[0, 1] \times [0, 1]$  et la forme finale suivante est obtenue :

$$I_{x_1} = \frac{-6}{X_1} \int_0^1 \int_0^1 (1 - 2x_1) I(X_1 x_1, X_2 x_2) dx_1 dx_2 \quad (3)$$

Des estimateurs de dérivés similaires à (3) seront appelés dans cet article : estimateurs algébriques de dérivées partielles. L'article sera organisé comme suit : dans la section 2, nous rappelons la notation par multi-indices et la transformée de Laplace multidimensionnelle. La section 3 est consacrée à la synthèse des estimateurs et la section 4 contient une propriété structurelle des estimateurs développés dans 3.

## II. PRÉLIMINAIRES

Cette section rappelle quelques outils qui seront utilisés par la suite.

### A. Notation par multi-indices

Soit  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$  un  $r$ -uplet d'entiers non négatifs  $\alpha_m$ , on dit que  $\alpha$  est un multi-indice. Pour  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^r$  des multi-indices, on définit :

1. Sommation terme à terme :  $\alpha \pm \beta = (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_r \pm \beta_r)$
2. Relation d'ordre partiel :  $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i, \forall i \in \{1, \dots, r\}$
3. Le degré total d'une puissance  $x^\alpha$  est donné par  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_r$ .
4. Factorielle :  $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_r!$
5. Coefficients binomiaux :

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \times \dots \times \binom{\alpha_r}{\beta_r} \quad (4)$$

6. Soit  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ , un monôme en  $x_1, \dots, x_r$  d'indice  $\alpha$  représente :  $\mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$ .

7.  $\bar{b} = (b, \dots, b) \in \mathbb{N}^r$ ;  $b \in \mathbb{N}$ .

8. Pour  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ ,  $\int_{\bar{0}}^{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \underbrace{\int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_r}}_r f(x_1, \dots, x_r) dx_1 \dots dx_r$ .

9. Dérivée partielle d'ordre supérieur  $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_r^{\alpha_r}$  où  $\partial_m^{\alpha_m} := \frac{\partial^{\alpha_m}}{\partial x_m^{\alpha_m}}$

10. On définit  $1_m$  un multi-indice admettant des zéros sur tous les éléments à l'exception du  $m$ -ème élément  $m \in [0, r]$  i.e.  $1_m = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ .

11. Produit tensoriel de deux vecteurs :  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u_1 \mathbf{v}, \dots, u_r \mathbf{v})$  où  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ ,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^r$  et  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{r^2}$ .  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} = (u_1 v_1, \dots, u_1 v_r, u_2 v_1, \dots, u_1 v_r, \dots, u_r v_r)$ .

Nous utilisons les notations suivantes. Le symbole en caractère gras  $\mathbf{x}$  désigne un vecteur de  $\mathbb{R}^r$  représentant le signal multivariable dans le domaine spatial. Le vecteur  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$  représente le signal dans le domaine opérationnel.  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^r$  représente la limite d'intégration.  $r \in \mathbb{N}$  est un scalaire indiquant la dimension du signal.  $\alpha, \kappa, \mu, l, q, N$  et  $n$  sont des multi-indices. Les symboles admettant un indice comme par exemple  $\kappa_1$ , sont des entiers positifs de  $\mathbb{N}$ . La lettre  $m$  est un nombre entier et sera utilisée comme un pointeur variant de 1 jusqu'à  $r$ .

### B. Transformée de Laplace multivariable

Étant donné  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{D}^r \subset \mathbb{R}^r$  et une fonction multivariable  $f(\mathbf{x}) : \mathbb{D}^r \subset \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous rappelons la transformation de Laplace multivariable donnée par

$$\mathcal{L}(f(\mathbf{x})) = F(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^{n+}} f(\mathbf{x}) \exp^{-\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x} \quad (5)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de deux vecteurs. Notons que, dans le cas d'une transformation de Laplace multivariable, la terminologie « domaine temporel *vs* domaine fréquentiel » n'est pas précise. Nous adopterons la dénomination « domaine spatial *vs* domaine opérationnel ». La transformée de Laplace multivariable satisfait les propriétés suivantes :

1. Étant donné  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r) \in \mathbb{C}^r$  et un multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ , nous avons :

$$\mathcal{L} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!} = \frac{1}{\mathbf{s}^{\alpha+1}}. \quad (6)$$

2. Soient  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ ,  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$ ,  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_r)$ , des multi-indices  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_r)$ , et  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_r)$ . Étant données une fonction multivariable  $I(\mathbf{x})$  et la transformée de Laplace correspondante  $\hat{I}(\mathbf{s}) = \mathcal{L}(I(\mathbf{x}))$ , nous avons la relation suivante :

$$\mathcal{L}^{-1} \frac{1}{\mathbf{s}^\alpha} \frac{\partial^\beta \hat{I}(\mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}^\beta} = \frac{1}{(\alpha - \bar{1})!} \int_{\bar{0}}^{\mathbf{X}} (\mathbf{X} - \mathbf{x})^{\alpha - \bar{1}} (-\mathbf{x})^\beta I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (7)$$

### III. ESTIMATION DES DÉRIVÉES PARTIELLES

Considérons un signal multivariable bruité  $J(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$  dont les dérivées partielles sont à estimer. Supposons que  $J(\mathbf{x})$  peut s'écrire sous la forme :

$$J(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) + \bar{\omega}(\mathbf{x}), \quad (8)$$

où  $I(\mathbf{x})$  est une fonction analytique et  $\bar{\omega}(\mathbf{x})$  est un bruit. Étant analytique par hypothèse,  $I(\mathbf{x})$  peut être représentée par un développement de Taylor à l'infini. Dans un domaine suffisamment petit  $[0, X]^r$ ,  $I(\mathbf{x})$  est modélisé par un développement de Taylor tronqué à un certain ordre fini noté  $I(\mathbf{x})$  :

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \frac{\partial^\alpha I(\bar{0})}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N I_{\mathbf{x}^\alpha} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}, \quad (9)$$

où  $I_{\mathbf{x}^\alpha} = \partial^\alpha I(\bar{0})$ . Le but est d'estimer la  $n$ -ième dérivée partielle  $I_{\mathbf{x}^n}$ ,  $n \leq N$  ( $n$  est un multi-indice). Ceci peut être fait en effectuant des manipulations algébriques sur l'équation précédente afin d'isoler la dérivée désirée et annihiler tous les autres termes. *Grosso modo*, la procédure consiste à faire des dérivations (partielles) successives par rapport aux  $x_m$  ( $m = 1, \dots, r$ ) suivies par des intégrations par parties. Cette tâche devient fastidieuse lorsqu'on désire estimer des dérivées d'ordre supérieur parce que le calcul consiste à itérer des multiplications par  $x_m$  et des intégrations par parties. Par contre, ces manipulations deviennent algébriques dans un domaine opérationnel (après l'application de la transformée de Laplace) ce qui facilite énormément le déroulement du calcul. C'est pour cette raison qu'on applique la transformée de Laplace multivariable (5) à (9) afin d'obtenir :

$$\hat{I}(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \frac{I_{\mathbf{x}^\alpha}}{\mathbf{s}^{\alpha+\bar{1}}} \quad (10)$$

où  $\hat{I}(\mathbf{s})$  est l'analogie opérationnel de  $I(\mathbf{x})$ . En examinant (10) on peut se rendre compte que chaque dérivée partielle est divisée par des exposants de  $\mathbf{s}$  différents des autres (voir l'exemple introductif ou [25] qui contient d'autres exemples). Donc des multiplications par des exposants de  $\mathbf{s}$  suivies par des dérivations partielles successives par rapport à  $\mathbf{s}$  permettent d'écrire la dérivée partielle désirée en fonction du signal mesuré  $J(\mathbf{x})$ . Toute concaténation de ces opérateurs va être appelée « annihilateur ». Il existe un nombre infini d'annihilateurs qui correspondent à une dérivée partielle désirée. Dans cet article, on va s'intéresser à une classe particulière donnée par la proposition 1 :

*Proposition 1* : Soient  $\kappa$  et  $\mu$  des multi-indices dans  $\mathbb{N}^r$ . L'opérateur différentiel :

$$\Pi_{\kappa, \mu}^{N, n} = \frac{1}{\mathbf{s}^{N+\mu+\bar{1}}} \partial^{n+\kappa} \frac{1}{\mathbf{s}} \partial^{N-n} \mathbf{s}^{N+\bar{1}} \quad (11)$$

permet d'annihiler tous les termes  $I_{\mathbf{x}^\alpha}$ ,  $\alpha \neq n$ . Il fournit une estimation opérationnelle de  $I_{\mathbf{x}^n}$  donnée par :

$$\frac{(-\bar{1})^{(n+\kappa)}(n+\kappa)!(N-n)!}{\mathbf{s}^{\mu+\kappa+N+n+\bar{2}}} I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = \Pi_{\kappa, \mu}^{N, n} \hat{I}_N(\mathbf{s}), \quad (12)$$

où  $N$  dans  $I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N)$  indique qu'un développement de Taylor à l'ordre  $N$  a été utilisé dans le calcul de l'estimateur. La dérivée est estimée en  $\bar{0}$  et est paramétrée par  $\kappa$  et  $\mu$ .

*Preuve 2* : Multiplions (10) par  $\mathbf{s}^{N+\bar{1}}$  on obtient :

$$\mathbf{s}^{N+\bar{1}} \hat{I}(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \mathbf{s}^{N-\alpha} I_{\mathbf{x}^\alpha}.$$

Pour  $\alpha > n$ , on a  $N-n > N-\alpha$ , il est évident que  $\partial^{N-n} \mathbf{s}^{N-\alpha} = 0$  et  $\partial^{N-n} \mathbf{s}^{N-n} = (N-n)!$ . Ceci implique que  $\partial^{N-n} \mathbf{s}^{N-\alpha}$  annihile tous les coefficients de  $I_{\mathbf{x}^\alpha}$  ayant  $\alpha > n$  dans le développement de Taylor (10). Pour isoler  $I_{\mathbf{x}^n}$ , il reste à annihiler les termes ayant  $\alpha < n$ . On peut vérifier que l'application de  $\frac{1}{\mathbf{s}}$  suivie de  $\partial^n$  permet de le faire. En dérivant  $\kappa$  fois de plus et en multipliant par  $\frac{1}{\mathbf{s}^{N+\mu+\bar{1}}}$  nous obtenons la relation (12).

*Définition 3* : Si  $N = n$ , l'estimateur opérationnel est donné par :

$$\frac{(-\bar{1})^{(n+\kappa)}(n+\kappa)!}{\mathbf{s}^{\mu+\kappa+2n+\bar{2}}} I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n) = \frac{1}{\mathbf{s}^{n+\mu+\bar{1}}} \partial^{n+\kappa} \mathbf{s}^n \hat{I}(\mathbf{s}). \quad (13)$$

il sera nommé **estimateur minimal** parce qu'il est synthétisé à partir d'un développement de Taylor minimal.

*Remarque 4* : Notons que les multiplications par des exposants négatifs de  $\mathbf{s}$  dans (12, 13) correspondent à des intégrations du signal dans le domaine spatial. Elles agissent comme des filtres passe-bas.

#### Développement de Taylor minimal et non minimal :

La notion d'estimateur minimal et d'estimateur non minimal (Définition 3) mérite une explication. Elle sera illustrée par des exemples. Notons tout d'abord que le développement de Taylor peut être tronqué à différents ordres suivant les différentes variables. Par exemple, pour  $r = 2$ , un développement de Taylor minimal permettant d'estimer  $I_{x_1}$  en utilisant la formule (13) est :

$$I_{(1,0)}(x_1, x_2) = I_0 + I_{x_1} x_1,$$

et non pas :

$$I_{(1,0)}(x_1, x_2) = I_0 + I_{x_1} x_1 + I_{x_2} x_2.$$

(à comparer avec l'exemple introductif). En suivant le même raisonnement, le développement de Taylor (avec  $r = 2$ ) pour  $I_{x_1 x_2}$  *i.e.*  $n = (1, 1)$  est donné par :

$$I_{(1,1)}(x_1, x_2) = I_0 + I_{x_1} x_1 + I_{x_2} x_2 + I_{x_1 x_2} x_1 x_2,$$

et un développement non minimal avec  $N = (2, 2)$  est donné par :

$$I_{(2,2)}(x_1, x_2) = I_0 + I_{x_1} x_1 + I_{x_2} x_2 + \frac{1}{2} I_{x_1^2} x_1^2 + I_{x_1 x_2} x_1 x_2 + \frac{1}{2} I_{x_2^2} x_2^2 + \frac{1}{2} I_{x_1^2 x_2} x_1^2 x_2 + \frac{1}{2} I_{x_1 x_2^2} x_1 x_2^2 + \frac{1}{4} I_{x_1^2 x_2^2} x_1^2 x_2^2. \quad (14)$$

### IV. PROPRIÉTÉ STRUCTURELLE

En examinant les formules (12) (13), il apparaît qu'elles fournissent une famille d'estimateurs de  $I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N)$  paramétrée par  $\kappa$  et  $\mu$ . Dans ce qui suit une propriété structurelle est présentée. Nous montrons que les estimateurs

basés sur un développement de Taylor à l'ordre  $N$  peuvent être exprimés sous forme de combinaisons linéaires affines d'estimateurs minimaux qui admettent des  $\kappa$  et des  $\mu$  différents. Notons  $\tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N)$  l'estimation de la dérivée résultant du remplacement de  $\hat{I}(\mathbf{s})$  par  $\hat{J}(\mathbf{s})$  dans (12), (13).

*Théorème 5 :* Soient  $N, n, q, l, \kappa$  et  $\mu$  des multi-indices  $\in \mathbb{N}^r$  avec  $n \leq N$ . L'estimateur de la dérivée partielle d'ordre  $n$ ,  $\tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(0; \kappa, \mu; N)$ , est une combinaison linéaire d'estimateurs minimaux donnée par :

$$\tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = \sum_{l=0}^q \lambda(l) \tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa_l, \mu_l; n), \quad \lambda(l) \in \mathbb{Q}, \quad (15)$$

où  $q = N - n$ ,  $\kappa_l = \kappa + q - l$ , et  $\mu_l = \mu + l$ . De plus, si  $q \leq n + \kappa$ , alors les coefficients  $\lambda(l)$ , satisfont :

$$\sum_{l=0}^q \lambda(l) = 1.$$

*Preuve 6 :* Posons  $p = \kappa + n$  et réécrivons (11) sous la forme :

$$\Pi_{\kappa, \mu}^{N, n} = \frac{1}{s^{N+\mu+1}} \partial^p \frac{1}{s} \partial^q s^{q+1} s^n.$$

Ceci peut être mis sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \frac{1}{s_1^{N_1+\mu_1+1}} \frac{\partial^{p_1}}{\partial s_1^{p_1}} \frac{1}{s_1} \frac{\partial^{q_1}}{\partial s_1^{q_1}} s_1^{q_1+1} s_1^{n_1} \times \dots \times \\ &\frac{1}{s_m^{N_m+\mu_m+1}} \frac{\partial^{p_m}}{\partial s_m^{p_m}} \frac{1}{s_m} \frac{\partial^{q_m}}{\partial s_m^{q_m}} s_m^{q_m+1} s_m^{n_m} \times \dots \times \\ &\frac{1}{s_r^{N_r+\mu_r+1}} \frac{\partial^{p_r}}{\partial s_r^{p_r}} \frac{1}{s_r} \frac{\partial^{q_r}}{\partial s_r^{q_r}} s_r^{q_r+1} s_r^{n_r}. \end{aligned}$$

Posons  $\mathcal{W}_m = \frac{1}{s_m^{N_m+\mu_m+1}} \frac{\partial^{p_m}}{\partial s_m^{p_m}} \frac{1}{s_m} \frac{\partial^{q_m}}{\partial s_m^{q_m}} s_m^{q_m+1} s_m^{n_m}$ . En rappelant [22] commençons tout d'abord par appliquer  $\frac{\partial^{q_m}}{\partial s_m^{q_m}}$  ensuite  $\frac{\partial^{p_m}}{\partial s_m^{p_m}}$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_m &= \sum_{i=0}^{q_m} \sum_{j=0}^{\min(p_m, q_m-i)} \binom{q_m}{i} \binom{p_m}{j} \\ &\frac{(q_m+1)!}{(q_m+1-i)(q_m-i-j)!} \frac{1}{s_m^{\mu_m+n_m+1+i+j}} \partial^{p_m+q_m-i-j} s_m^{n_m}. \end{aligned} \quad (16)$$

Posons  $l_m = i + j$ , l'expression précédente devient :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_m &= \sum_{i=0}^{q_m} \sum_{l_m=i}^{\min(p_m+i, q_m)} \binom{q_m}{i} \binom{p_m}{l_m-i} \\ &\frac{(q_m+1)!}{(q_m+1-i)(q_m-l_m)!} \frac{1}{s_m^{\mu_m+n_m+1+l_m}} \partial^{p_m+q_m-l_m} s_m^{n_m}. \end{aligned}$$

Permutons les deux sommations, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_m &= \sum_{l_m=0}^{q_m} \sum_{i=\max(0, l_m-p_m)}^{l_m} \binom{q_m}{i} \binom{p_m}{l_m-i} \\ &\frac{(q_m+1)!}{(q_m+1-i)(q_m-l_m)!} \frac{1}{s_m^{\mu_m+n_m+1+l_m}} \partial^{p_m+q_m-l_m} s_m^{n_m}. \end{aligned}$$

Finalement, les  $\lambda_{l_m}^m$  (où les indices  $l_m$  et  $m$  sont des entiers naturels) sont donnés par :

$$\begin{aligned} \lambda_{l_m}^m &= (-1)^{q_m-l_m} \frac{(n_m + \kappa_m + q_m - l_m)!}{p_m! q_m!} \\ &\sum_{i=\max(0, l_m-p_m)}^{l_m} \binom{q_m}{i} \binom{p_m}{l_m-i} \\ &\frac{(q_m+1)!}{(q_m+1-i)(q_m-l_m)!}. \end{aligned}$$

Notons que les  $\lambda_{l_m}^m$  sont des nombres rationnels. En utilisant l'identité de Vandermonde, on obtient pour  $q_m \leq p_m$  :

$$\begin{aligned} \lambda_{l_m}^m &= (-1)^{q_m-l_m} \binom{p_m+q_m-l_m}{p_m} \sum_{i=0}^{l_m} \binom{p_m}{l_m-i} \\ &\binom{q_m+1}{i} \\ &= (-1)^{q_m-l_m} \binom{p_m+q_m-l_m}{p_m} \binom{p_m+q_m+1}{l_m}. \end{aligned} \quad (17)$$

Finalement, définissons  $A(q_m) = \sum_{l_m=0}^{q_m} \lambda_{l_m}^m$ . En utilisant l'identité  $\binom{m+1}{l} = \binom{m}{l} + \binom{m}{l-1}$  nous obtenons la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} A(q_m+1) &= A(q_m) + \sum_{l_m=0}^{q_m+1} (-1)^{l_m} \binom{p_m+l_m}{l_m} \\ &\binom{p_m+q_m+1}{p_m+l_m} \\ &= A(q_m) + \binom{p_m+q_m+1}{p_m} \\ &\sum_{l_m=0}^{q_m+1} (-1)^{l_m} \binom{q_m+1}{l_m} = A(q_m). \end{aligned}$$

Si  $q_m = 1$  on a  $A(1) = 1$ , et en utilisant la relation précédente, nous avons  $A(q_m) = 1, \forall q_m$ .

Retournons-en à  $\mathcal{W}$ , Écrivons la sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \sum_{l_1=0}^{q_1} \lambda_{l_1}^1 \frac{1}{s_1^{\mu_1+n_1+l_1+1}} \frac{\partial^{p_1+q_1-l_1}}{\partial s_1^{p_1+q_1-l_1}} s_1^{n_1} \times \dots \times \\ &\sum_{l_i=0}^{q_m} \lambda_{l_i}^m \frac{1}{s_m^{\mu_m+n_m+l_m+1}} \frac{\partial^{p_m+q_m-l_m}}{\partial s_m^{p_m+q_m-l_m}} s_m^{n_m} \times \dots \times \\ &\sum_{l_r=0}^{q_r} \lambda_{l_r}^r \frac{1}{s_r^{\mu_r+n_r+l_r+1}} \frac{\partial^{p_r+q_r-l_r}}{\partial s_r^{p_r+q_r-l_r}} s_r^{n_r} = \prod_{m=1}^r \mathcal{W}_m \end{aligned}$$

Maintenant, soient  $u_1 = (\lambda_0^1, \dots, \lambda_{l_1}^1, \dots, \lambda_{q_1}^1)$ ,  $u_m = (\lambda_0^m, \dots, \lambda_{l_2}^m, \dots, \lambda_{q_2}^m), \dots$ ,  $G = u_1 \otimes \dots \otimes u_m \otimes \dots \otimes u_r$ . (tous les éléments  $\lambda_{l_m}^m$  sont dans  $\mathbb{Q}$ ). Il existe une bijection entre  $[0, q_1] \times \dots \times [0, q_m] \times \dots \times [0, q_r]$  et  $G$ , c'est à dire pour tout multi-indice  $l$ ,  $\lambda(l)$  correspond à un élément unique de  $G$ . La formule (15) est démontrée. Considérons maintenant la somme suivante :

$$\sum_{l=0}^q \lambda(l).$$

Elle peut être factorisée comme suit :

$$\sum_{l_1=0}^{q_1} \lambda_{l_1}^1 \times \cdots \times \sum_{l_m=0}^{q_m} \lambda_{l_m}^m \times \cdots \times \sum_{l_r=0}^{q_r} \lambda_{l_r}^r$$

et en s'appuyant sur le cas monovarié on peut conclure que :

$$\sum_{l=0}^q \lambda(l) = 1.$$

## V. SIMULATIONS NUMÉRIQUES

Des simulations numériques ont été faites sur un signal bidimensionnel ( $r = 2$ ) donné par :

$$I(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + 3\right)\cos(2x_1 + 1 - e^{x_2}), \quad (18)$$

dont l'allure est visualisée sur la figure 1. Un pas d'échantillonnage de  $(0.005 \times 0.005)$  est utilisé. Notre but est d'attirer l'attention sur le fait que les estimateurs non minimaux représentent mieux les dérivées que les estimateurs minimaux. Ce qui est normal, puisque le développement de Taylor est tronqué à un ordre plus élevé. Puisque pour le moment on ne s'intéresse qu'à l'erreur de troncature, nous montrons des simulations d'un signal non bruité (la simulation de signaux bruités a été différée au 2<sup>nd</sup> article par manque de place). Nous allons remarquer que les estimateurs minimaux induisent une déformation spatiale (un déphasage) de la dérivée désirée tandis que les non minimaux n'induisent pas de décalage. La quantification du décalage fera l'objet du deuxième article.

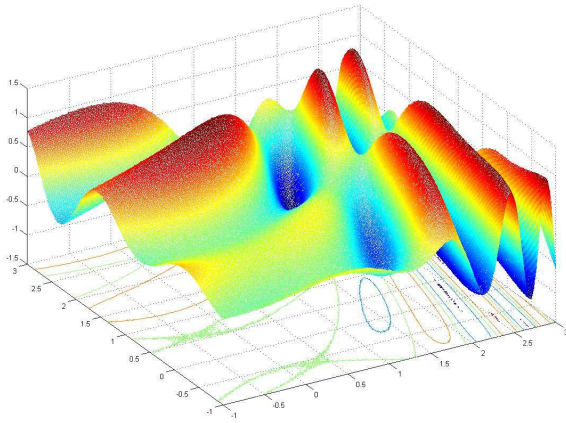


Fig. 1. Visualisation 3-D de  $f(x_1, x_2) = \sin(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + 3)\cos(2x_1 + 1 - e^{x_2})$

Les dérivées sont calculées sur une coupe de la surface 1 aux points  $(x_1, x_2)$  admettant  $x_2 = 0$  et  $x_1$  allant de  $-1$  jusqu'à  $3$ . En effet, en chaque point de la ligne  $(-1 \leq x_1 \leq 3, x_2 = 0)$ , une surface élémentaire nécessaire pour effectuer les calculs est prise autour de chaque point  $(x_1, x_2)$ . La figure (2) montre une coupe de la surface dans le plan  $x_2 = 0$  et pour  $x_1$  allant de  $-1$  jusqu'à  $3$ .

Trois dérivées sont évaluées :  $I_{x_1}$ ,  $I_{x_1^2}$  et  $I_{x_1x_2}$ . Dans chaque cas deux algorithmes ont été testés :

1. Un estimateur minimal *i.e.* un estimateur basé sur un développement de Taylor d'ordre minimal.

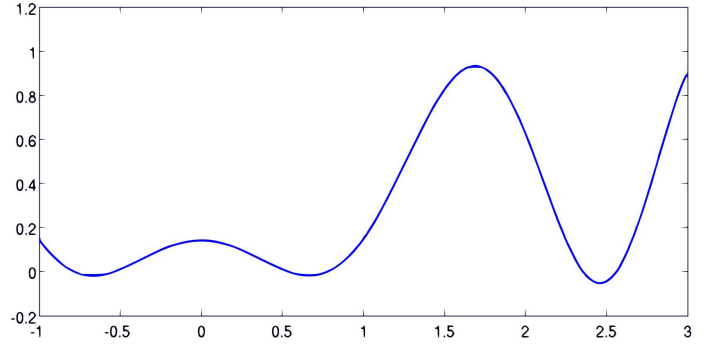


Fig. 2. Une coupe de la surface en  $x_2 = 0$  et  $-1 < x_1 < 3$ , 25 dB

2. Un estimateur non minimal.

### Estimation de $I_{x_1}$

L'estimateur minimal est calculé en prenant  $n = (1, 0)$ ,  $N = n$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ . L'estimateur non minimal est synthétisé en prenant  $n = (1, 0)$ ,  $N = (2, 0)$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ .

Les résultats de la simulation sont montrés sur la figure 3. Une surface (glissante) formée de  $30 \times 30$  éléments est utilisée. On peut voir que l'estimateur minimal est décalé par rapport à la dérivée formelle tandis que l'estimateur non minimal n'induit pas de décalage visible par rapport à la dérivée formelle.

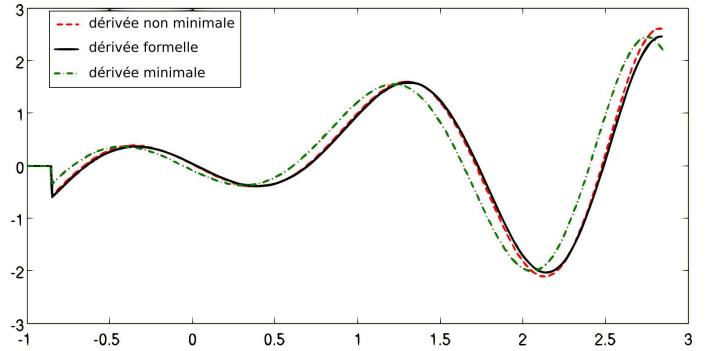


Fig. 3. Estimation de  $I_{x_1}$

### Estimation de $I_{x_1^2}$

L'estimateur minimal est calculé en prenant  $n = (2, 0)$ ,  $N = n$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ . L'estimateur non minimal est synthétisé en prenant  $n = (2, 0)$ ,  $N = (3, 0)$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ .

Les résultats de la simulation sont tracés sur la figure 4, une surface élémentaire (glissante) constituée de  $60 \times 60$  éléments est utilisée. Les mêmes conclusions peuvent être tirées.

### Estimation de $I_{x_1x_2}$

L'estimateur minimal est calculé en prenant  $n = (1, 1)$ ,  $N = n$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ . L'estimateur non minimal est synthétisé en prenant  $n = (1, 1)$ ,  $N = (2, 2)$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ . Les résultats de la simulation sont tracés sur la figure 5, une surface glissante constituée de  $60 \times 60$  éléments est utilisée. Les mêmes conclusions peuvent être tirées. Ces constatations seront prouvées dans l'article suivant [2].

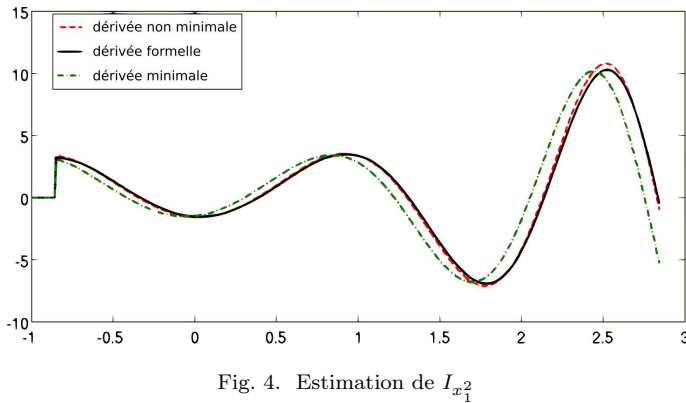


Fig. 4. Estimation de  $I_{x_1^2}$

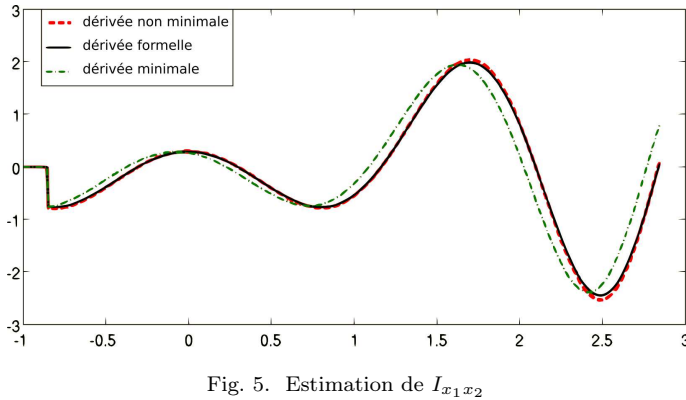


Fig. 5. Estimation de  $I_{x_1 x_2}$

## VI. CONCLUSION

Dans cet article, nous avons présenté une technique d'estimation des dérivées partielles de signaux multidimensionnels. Sur un domaine petit, le signal a été représenté par un développement de Taylor tronqué. Ensuite, l'application de la transformée de Laplace ainsi que des manipulations algébriques adéquates permettent d'isoler la dérivée désirée en fonction d'intégrales itérées du signal. Dans un deuxième temps, une relation de récurrence a été fournie, elle servira dans la deuxième partie afin de montrer que l'on peut exprimer les estimateurs algébriques dans une base de polynômes de Jacobi. On se ramène ainsi à un problème d'optimisation au sens des moindres carrés. Dans le second article, nous rappellerons les polynômes de Jacobi multivariés et nous montrerons qu'ils constituent une base sur laquelle les estimateurs algébriques peuvent être projetés. Ceci permettra de conclure que les estimateurs algébriques sont, en effet, une minimisation au sens des moindres carrés. Nous montrerons que les estimateurs minimaux induisent un déphasage et nous donnons la valeur de ce déphasage. Ensuite, nous montrons que les estimateurs non minimaux n'induisent pas de déphasage. Enfin, des simulations numériques sur un signal bruité seront présentées. Nous remarquerons que les estimateurs minimaux fournissent un meilleur filtrage du bruit. La minimisation de l'influence du bruit sera étudiée dans un autre travail. Finalement, une implémentation sous forme de filtres à réponse impulsionnelle finie sera fournie.

## RÉFÉRENCES

[1] G. Aubert and L. Vese, "A variational method in image recovery". *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1948-1979 (1997).  
 [2] Y. Bachalany, S. Riachy, M. Mboup et J.-P. Richard. "Différentiation numérique multivariable II : projection orthogonale et filtrage

RIF". 6<sup>e</sup> Conférence internationale francophone d'automatique, 2-4 juin, 2010.  
 [3] J.-P. Barbot, D. Boutat, et T. Floquet. *An observation algorithm for nonlinear systems with unknown inputs*, Automatica Volume 45, Issue 8, 2009, Pages 1970-1974.  
 [4] A. Brook, R. Kimmel and N.A. Sochen, "Variational Segmentation for Color images". *International Journal of Computer Vision*, 18, 247-268 (2003).  
 [5] A. Bruhn, J. Weickert and C. Schnörr, "Lucas/Kanade meets Horn/Schunck : Combining local and global optic flow methods". *International Journal of Computer Vision*, 61, 211-231 (2005).  
 [6] T.E. Duncan, P. Mandl et B. Pasik-Duncan "Numerical differentiation and parameter estimation in higher-order linear stochastic systems". *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 41, 522-532, 1996.  
 [7] M. Fliess and C. Join, "Intelligent PID controllers" 16<sup>th</sup> Mediterranean conference on control and automation, june 25-27, 2008. (available at <http://hal.inria.fr>).  
 [8] M. Fliess and C. Join, "Model free control and Intelligent PID controllers : Towards a possible trivialization of nonlinear control ?" 15<sup>th</sup> IFAC Symposium on system identification, 2009. (available at <http://hal.inria.fr>).  
 [9] M. Fliess and C. Join, "Towards new technical indicators for trading systems and risk management" 15<sup>th</sup> IFAC symposium on system identification, 2009. (available at <http://hal.inria.fr>).  
 [10] M. Fliess and C. Join, "A mathematical proof of the existence of trends in financial time series" *Systems Theory : Modelling, Analysis and Control*, 2009. (available at <http://hal.inria.fr>).  
 [11] M. Fliess, C. Join, M. Mboup and A. Sedoglavic, "Estimation des dérivées d'un signal multidimensionnel avec application aux images et aux vidéos", *Actes 20<sup>e</sup> Col. GRETSI*, Louvain-la-neuve 2005 (available at <http://hal.inria.fr/inria-00001116>).  
 [12] M. Fliess, C. Join, M. Mboup and H. Sira-Ramirez, "Compression différentielle de transitoire bruités", *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. I*, vol.339, 2004, pp. 821-826.  
 [13] M. Fliess, C. Join, M. Mboup and H. Sira-Ramirez, "Analyse et représentation de signaux transitoires : application à la compression, au débruitage et à la détection de ruptures", *Actes 20<sup>e</sup> Coll. GRETSI*, Louvain-la-neuve, 2005 (available at <http://hal.inria.fr/inria-00001115>).  
 [14] M. Fliess, C. Join et H. Sira-Ramirez, "Non-linear estimation is easy", *Int. J. Modelling Identification Control* 3, 2008. Accessible sur <http://hal.inria.fr/inria-00158855/fr/>.  
 [15] M. Fliess and H. Sira-Ramirez, "An algebraic framework for linear identification" *ESAIM : COCV* 9, 2003, pp. 151-168.  
 [16] P.-A. Gédouin, C. Join, E. Delaleau, J.-M. Bourgeot, S. Arbab and S. Calloch "Model free control of shape memory alloys and antagonistic actuators" 17<sup>th</sup> IFAC world congress Seoul Korea, 2008. (available at <http://hal.inria.fr>).  
 [17] B. Horn and B. Schunck, "Determining optical flow". *Artificial Intelligence*, 17, 185-203 (1981).  
 [18] S. Ibrir et S. Diop, "A numerical procedure for filtering and efficient high-order signal differentiation". *Int. J. Appl. Math. Compt. Sci.*, 14, 201-208 (2004).  
 [19] C. Join and S. Tabbone "Robust curvature extrema detection based on new numerical derivation". *Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems*, ACVIS 2008. (available at <http://hal.inria.fr>).  
 [20] A. Levant, "Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control" *International Journal of Control* 76, 924-941 (2003).  
 [21] M. Mboup, "Parameter estimation for signals described by differential equations", *Applicable Analysis*, 88, 29-52, 2009.  
 [22] M. Mboup, C. Join and M. Fliess. "Numerical Differentiation with annihilators in noisy environment". *Numerical Algorithms*, 2008, 1017-1398. (available at <http://hal.inria.fr>).  
 [23] J. Mikusinski, *Operational calculus*, vol. 1 and 2 Varsovie and Oxford University Press, Oxford 1983.  
 [24] J.M. Morel and S. Solimini A. Brook, "Segmentation of images by variational methods : A constructive approach". *Revista Matematica de la Universidad Complutense de Madrid*, 1, 169-182 (1998).  
 [25] S. Riachy, Y. Bachalany, M. Mboup and J.-P. Richard. "An algebraic method for multi-dimensional derivative estimation". 16<sup>th</sup> Mediterranean conference on control and automation, june 25-27, 2008. (available at <http://hal.inria.fr>).  
 [26] J. Weickert and C. Schnörr, "Variational optic flow computation with a spatio-temporal smoothness constraint". *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 14, 245-255 (2001).  
 [27] J. Weickert, "Anisotropic diffusion in image processing", (1998).