

# Différenciation numérique multivariable II: Projection orthogonale et filtrage à RIF

Yara Bachalany, Samer Riachy, Mamadou Mboup, Jean-Pierre Richard

► **To cite this version:**

Yara Bachalany, Samer Riachy, Mamadou Mboup, Jean-Pierre Richard. Différenciation numérique multivariable II: Projection orthogonale et filtrage à RIF. Sixième Conférence Internationale Franco-phone d'Automatique, Jun 2010, Nancy, France. inria-00463792

**HAL Id: inria-00463792**

**<https://hal.inria.fr/inria-00463792>**

Submitted on 15 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Différenciation numérique multivariable II : Projection orthogonale et filtrage à RIF

Yara BACHALANY<sup>1</sup>, Samer RIACHY<sup>2</sup>, Mamadou MBOUP<sup>3</sup>, Jean-Pierre RICHARD<sup>4</sup>

<sup>1</sup>LAGIS UMR 8146 CNRS, Université des Sciences et Technologies de Lille – 59651 Villeneuve d’Ascq, France  
*yara.bachalany@ed.univ-lille1.fr*

<sup>2</sup>Équipe Commande des Systèmes, ENSEA & Équipe projet ALIEN, INRIA Saclay  
6, Avenue du ponceau. 95014 Cergy-Pontoise, France.  
*samer.riachy@ensea.fr*

<sup>3</sup>CRéSTIC - Université de Reims Champagne Ardenne & EPI ALIEN, INRIA Saclay  
UFR Sciences Exactes et Naturelles, Dépt. EEA – Moulin de la Housse - BP 1039 - 51687 REIMS cedex 2  
*Mamadou.Mboup@univ-reims.fr*

<sup>4</sup>Université Lille Nord de France, ECLille & Équipe Projet ALIEN, INRIA Lille Nord Europe  
Laboratoire d’Automatique, Génie Informatique et Signal UMR 8146 CNRS  
Ecole Centrale de Lille, BP 48, Cité Scientifique. 59651 Villeneuve d’Ascq, France.  
*jean-pierre.richard@ec-lille.fr*

*Résumé*— Cet article est la suite de [4] où nous avons présenté une famille d’estimateurs numériques des dérivées de signaux multidimensionnels bruités. Dans cette seconde partie, nous donnons une analyse détaillée de leurs propriétés structurelles. Nous en donnons une interprétation en terme de projection orthogonale, ce qui permet d’établir un lien avec les moindres carrés. Cette interprétation permet non seulement d’expliquer mais aussi de quantifier le décalage spatial observé dans les simulations, avec certains estimateurs. Finalement, une implémentation sous forme de filtre à réponse impulsionnelle finie est fournie.

*Mots-clés*— Estimation de dérivées partielles, polynômes de Jacobi multivariables, moindres carrés.

## I. INTRODUCTION

Dans le premier article, des estimateurs algébriques ont été développés. Nous modélisons localement le signal bruité par un développement de Taylor multidimensionnel à un certain ordre  $N$ , où  $N$  est un multi-indices :

$$I(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \frac{\partial^\alpha I(\bar{0})}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N I_{\mathbf{x}^\alpha} \frac{\mathbf{x}^\alpha}{\alpha!}, \quad (1)$$

où  $I_{\mathbf{x}^\alpha} = \partial^\alpha I(\bar{0})$ . Ensuite, nous appliquons une transformée de Laplace multidimensionnelle donnée par :

$$\mathcal{L}(f(\mathbf{x})) = F(\mathbf{s}) = \int_{\mathbb{R}^{n+}} f(\mathbf{x}) \exp^{-\langle \mathbf{s}, \mathbf{x} \rangle} d\mathbf{x}, \quad (2)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire de deux vecteurs. L’équation (1) est transformée en :

$$\hat{I}(\mathbf{s}) = \sum_{\alpha=\bar{0}}^N \frac{I_{\mathbf{x}^\alpha}}{\mathbf{s}^{\alpha+1}}, \quad (3)$$

où  $\hat{I}(\mathbf{s})$  est l’analogie opérationnel de  $I(\mathbf{x})$ . Si nous désirons estimer la  $n$ -ième dérivée (partielle) des manipulations algébriques adéquates ont permis de calculer un estimateur

opérationnel de  $I_{\mathbf{x}^n}$  comme suit :

$$\frac{(-\bar{1})^{(n+\kappa)}(n+\kappa)!(N-n)!}{\mathbf{s}^{\mu+\kappa+N+n+2}} I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = \Pi_{\kappa, \mu}^{N, n} \hat{I}(\mathbf{s}), \quad (4)$$

avec

$$\Pi_{\kappa, \mu}^{N, n} = \frac{1}{\mathbf{s}^{N+\mu+1}} \partial^{n+\kappa} \frac{1}{\mathbf{s}} \partial^{N-n} \mathbf{s}^{N+1} \quad (5)$$

Rappelons que les divisions par  $\mathbf{s}$  correspondent à des intégrations dans le domaine spatial. Dans le cas où  $N = n$  l’estimateur a été appelé minimal parce que la dérivée  $n$ -ième est synthétisée à partir d’un développement de Taylor minimal d’ordre  $N = n$ . La formule des estimateurs minimaux est donnée par :

$$\frac{(-\bar{1})^{(n+\kappa)}(n+\kappa)!}{\mathbf{s}^{\mu+\kappa+2n+2}} I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n) = \frac{1}{\mathbf{s}^{n+\mu+1}} \partial^{n+\kappa} \mathbf{s}^n \hat{I}(\mathbf{s}). \quad (6)$$

Notons que dans les équations précédentes la notation par multi-indices a été utilisée. Le lecteur peut trouver plus de détail dans le premier article [4].

Nous avons utilisé les notations suivantes. Le symbole en caractère gras  $\mathbf{x}$  désigne un vecteur de  $\mathbb{R}^r$  représentant le signal multivariable dans le domaine spatial. Le vecteur  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^r$  représente le signal dans le domaine opérationnel.  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^r$  représente la limite d’intégration,  $r \in \mathbb{N}$  est un scalaire indiquant la dimension du signal.  $\alpha, \kappa, \mu, l, q, N$  et  $n$  sont des multi-indices. Les symboles admettant un indice comme par exemple  $\kappa_1$ , sont des entiers positifs  $\in \mathbb{N}$ . La lettre  $m$  est un nombre entier et sera utilisée comme un pointeur variant de 1 jusqu’à  $r$ .

Dans [4], nous avons fourni une relation de récurrence entre un estimateur de dérivée non minimal et une combinaison d’estimateurs minimaux :

$$\tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = \sum_{l=0}^q \lambda(l) \tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa_l, \mu_l, n), \quad \lambda(l) \in \mathbb{Q}. \quad (7)$$

Cet article est organisé comme suit : dans la section 2, nous rappelons le problème de l'optimisation aux moindres carrés dans une base formée par les polynômes de Jacobi multivariables. Dans la section 3, nous montrons que l'on peut exprimer nos estimateurs algébriques dans une telle base. Ceci nous permet de montrer que les estimateurs minimaux sont décalés par rapport à la dérivée formelle alors que les non minimaux ne le sont pas. Dans la section 4, nous présentons une implémentation numérique sous forme de filtres à réponse impulsionnelle finie ainsi que des simulations numériques pour l'estimation des dérivées d'un signal académique.

## II. PRÉLIMINAIRES : POLYNÔMES DE JACOBI ORTHOGONAUX MULTIVARIABLES ET MOINDRES CARRÉS

Cette section donne un rappel d'optimisation au moindres carrés dans la base orthogonale des polynômes de Jacobi multivariables. Ceci sera utile dans la suite pour montrer que les estimateurs algébriques (4-6) correspondent à un problème de minimisation au sens des moindres carrés.

Soient  $\alpha, \beta, n, p$  des multi-indices de  $\mathbb{N}^r$  et  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_r)$ . Une version multivariable des polynômes de Jacobi définis sur l'intervalle  $[0, 1]^r$  est donnée par l'équation aux dérivées partielles suivante (formule de Rodriguez)

$$(\bar{1} - \mathbf{x})^\alpha \mathbf{x}^\beta \mathcal{P}_n^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}) = \frac{(-\bar{1})^n}{n!} \partial^n [(\bar{1} - \mathbf{x})^{n+\alpha} \mathbf{x}^{n+\beta}]. \quad (8)$$

Ces polynômes constituent une base orthogonale sur l'intervalle  $[0, 1]^r$ , de l'espace des fonctions analytiques multivariables par rapport à la fonction poids  $\omega(\mathbf{x}) = (\bar{1} - \mathbf{x})^\alpha \mathbf{x}^\beta$ . Ils satisfont le produit scalaire :

$$\langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_p \rangle \doteq \int_0^{\bar{1}} \mathcal{P}_n^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) \mathcal{P}_p^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (9)$$

où  $\langle \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_p \rangle = \delta_{np}$  et  $\delta_{np}$  est une version multivariable du symbole de Kronecker :  $\delta_{np} = 1$  si  $(n_1, \dots, n_r) = (p_1, \dots, p_r)$  et  $\delta_{np} = 0$  si  $(n_1, \dots, n_r) \neq (p_1, \dots, p_r)$ .  $[0, 1]^r$  est appelé intervalle d'orthogonalité. Le produit scalaire induit une norme :

$$\|\mathcal{P}_n\|^2 \doteq \int_0^{\bar{1}} \mathcal{P}_n^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) \mathcal{P}_n^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Il est intéressant de signaler que les polynômes de Jacobi multivariables satisfont :

$$\mathcal{P}_n^{\{\alpha, \beta\}}(\mathbf{x}) = \prod_{m=1}^r \mathcal{P}_{n_m}^{\{\alpha_m, \beta_m\}}(x_m)$$

où  $n = (n_1, \dots, n_r)$  et les  $\mathcal{P}_{n_m}^{\{\alpha_m, \beta_m\}}(x_m)$  sont les  $r$  polynômes de Jacobi standard (monovariables). La preuve est directe en développant la formule (8).

Considérons le sous-espace de  $L_2([0, 1])$  défini par :

$$\mathcal{H}_{q_m} = \text{span} \left\{ \mathcal{P}_0^{\{\alpha_m, \beta_m\}}(x_m), \dots, \mathcal{P}_{q_m}^{\{\alpha_m, \beta_m\}}(x_m) \right\},$$

équipé du produit scalaire :

$$\langle \mathcal{P}_{n_m}, \mathcal{P}_{p_m} \rangle \doteq \int_0^1 \mathcal{P}_{n_m}^{\{\alpha_m, \beta_m\}}(x_m) \omega(x_m) \mathcal{P}_{p_m}^{\{\alpha_m, \beta_m\}}(x_m) dx_m \quad (10)$$

Il est clair que  $\mathcal{H}_{q_m}$  est un espace de Hilbert à noyau reproduisant. Le noyau est donné par :

$$\mathcal{K}_{q_m}(\xi_m, x_m) = \sum_{m=0}^{q_m} \frac{\mathcal{P}_m^{\{\alpha_m, \beta_m\}}(\xi_m) \mathcal{P}_m^{\{\alpha_m, \beta_m\}}(x_m)}{\|\mathcal{P}_m^{\{\alpha_m, \beta_m\}}\|^2}.$$

Soit  $\mathcal{H}_q$  un produit tensoriel de  $r$  sous-espaces (monodimensionnels) de  $L_2([0, 1])$  :

$$\mathcal{H}_q = \mathcal{H}_{q_1} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{q_r},$$

Il est évident que  $\mathcal{H}_q$  est un espace de Hilbert à noyau reproduisant. Son noyau est donné par :

$$\mathcal{K}_q(\xi, \mathbf{x}) = \mathcal{K}_{q_1}(\xi_1, x_1) \times \dots \times \mathcal{K}_{q_r}(\xi_r, x_r) = \sum_{l=0}^q \frac{\mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}(\xi) \mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}(\mathbf{x})}{\|\mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}\|^2}, \quad (11)$$

où  $l$  est un multi-indice et  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r) \in [0, 1]^r$ .

Il est maintenant possible de définir l'approximation à l'ordre  $q$  au sens des moindres carrés d'une fonction  $I(\mathbf{x})$ , comme étant une projection dans  $\mathcal{H}_q$ . Nous la notons  $\tilde{I}_{LS,q}$  :

$$\tilde{I}_{LS,q}(\xi) \doteq \sum_{l=0}^q \frac{\langle \mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}(\mathbf{x}), I(\mathbf{X}\mathbf{x}) \rangle}{\|\mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}\|^2} \mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}(\xi/\mathbf{X}), \quad (12)$$

où  $\mathbf{x} \in [0, 1]^r$  (voir (9)) et  $\xi \in [\bar{0}, \mathbf{X}]$ . Remplaçons dans (12)  $I(\mathbf{X}\mathbf{x})$  par  $\partial^n I(\mathbf{X}\mathbf{x})$ . Nous obtenons une approximation à l'ordre  $q$  au sens des moindres carrés de  $\partial^n I(\mathbf{X}\mathbf{x})$  que nous appelons  $\widetilde{\partial^n I}_{LS,q}$  :

$$\begin{aligned} \widetilde{\partial^n I}_{LS,q}(\xi) &\doteq \sum_{l=0}^q \frac{\langle \mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}(\mathbf{x}), \partial^{(n)} I(\mathbf{X}\mathbf{x}) \rangle}{\|\mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}\|^2} \mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}(\xi/\mathbf{X}) \\ &= \left\langle \frac{\partial^n}{\partial \mathbf{x}^n} \mathcal{K}_q(\xi, \mathbf{x}), I(\mathbf{X}\mathbf{x}) \right\rangle. \end{aligned} \quad (13)$$

Signalons finalement que  $\partial^n I(\mathbf{X}\mathbf{x})$  dans l'équation précédente disparaît en effectuant des intégrations par parties. Ceci mène à la deuxième égalité de l'équation précédente.

Nous attirons l'attention que l'estimation des dérivées d'un signal se fait traditionnellement [2] par projection orthogonale du signal dans une base de polynômes orthogonaux ((12) par exemple) suivit de la différenciation du polynôme obtenu. On ne garantit donc pas l'orthogonalité des dérivés des polynômes de la base et donc l'optimalité de la dérivée estimée. Par contre, notre approche fournit *explicitement* une projection orthogonale de la dérivée désirée. Nous montrons dans la suite que notre approche aboutit directement à la relation (13).

## III. INTERPRÉTATION PAR LES MOINDRES CARRÉS ET ESTIMATEURS DÉCALÉS

Dans cette section, une interprétation par les moindres carrés est rattachée aux estimateurs (4). Nous démontrons que (4) correspond à une projection orthogonale dans une base formée par les polynômes de Jacobi jusqu'à un certain ordre. Cette projection va permettre de quantifier le décalage (déphasage) spatial inhérent aux estimateurs minimaux (6). Le décalage spatial signifie que les estimateurs

donnés par (6), bien qu'ils soient synthétisés d'un développement de Taylor autour de  $\mathbf{x}_0 = (x_{1_0}, \dots, x_{r_0})$ , correspondent en réalité à une estimation de dérivée en un point  $\mathbf{x}_0 + \xi$ , ( $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ ) qui sera déterminé par la suite) différent du point  $\mathbf{x}_0$ . Nous montrons aussi que les estimateurs non minimaux (4) n'ont pas ce désavantage, *i.e.* l'estimation de dérivée correspond au point  $\mathbf{x}_0$ .

*Proposition 1 :* Soient  $\kappa$ ,  $\mu$  et  $n$  des multi-indices de  $\mathbb{N}^r$ . Désignons par  $\partial^n I_{LS,1}(\mathbf{x})$  l'approximation polynomiale au sens des moindres carrés de  $I_{\mathbf{x}^n}$  à l'ordre 1 dans l'intervalle  $[0, \mathbf{X}]^n$ . Alors l'estimateur minimal de la  $n$ -ième dérivée  $\tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(0; \kappa, \mu; n)$  est donné par :

$$\tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(0; \kappa, \mu; n) = \partial^n I_{LS,1}(\mathbf{X}\xi) + \bar{\omega}(\mathbf{x}), \quad (14)$$

où

$$\xi_m = \frac{\kappa_m + n_m + 1}{\mu_m + \kappa_m + 2(n_m + 1)}, \quad m = 1, \dots, r$$

sont les racines de  $\mathcal{P}_{q;|q|=1}^{\{\kappa, \mu\}}(\mathbf{x})$  ( $r$  racines correspondant chacune à un des  $r$  polynômes  $\mathcal{P}_{q;|q|=1}^{\{\kappa, \mu\}}$ ) et où  $\bar{\omega}$  est la contribution du bruit.

*Preuve 1 :* Rappelons l'approximation polynomiale par les moindres carrés à l'ordre 1 définie dans (12). Notons que l'estimateur minimal (6) peut être écrit dans le domaine spatial comme suit :

$$I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; n) = \frac{(\mu + \kappa + 2n)!(-\bar{1})^{n+\kappa}}{(n + \kappa)! \mathbf{X}^n} \underbrace{\int_{\bar{0}}^{\bar{1}} (\bar{1} - \mathbf{x})^\mu \mathbf{x}^\kappa \partial^n I(\mathbf{X}\mathbf{x}) d\mathbf{x}}_r. \quad (15)$$

Il correspond à une projection de  $I_{\mathbf{x}^n}$  sur  $\mathcal{P}_0^{\{\kappa, \mu\}} = 1$ . Cela dit l'équation (14) reste vraie sur les zéros de  $\mathcal{P}_1^{\{\kappa, \mu\}}$  donnés par  $\xi$ . Notons que la dérivée partielle dans la formule (15) disparaît en effectuant des intégrations par parties (voir (13)).

Nous aboutissons à un résultat remarquable : si dans une application une combinaison de dérivées partielles doit être estimée (le laplacien par exemple) il faut ajuster les décalages  $\xi$  afin d'améliorer l'estimation.

*Théorème 2 :* Soient  $\kappa$ ,  $\mu$ ,  $q$ ,  $N$ , et  $n$  des multi-indices  $\in \mathbb{N}^r$ . Supposons que  $q \leq \kappa + n$  avec  $q = N - n$ . Un estimateur de  $n$ -ième dérivée non minimal est donné par :

$$\tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = \partial^n I_{LS,q}(\bar{0}) + \bar{\omega}(\mathbf{x}),$$

où  $\bar{\omega}$  est la contribution du bruit.

*Preuve 3 :* Considérons tout d'abord le cas monovarié (*i.e.*  $r = 1$ ,  $\mathbf{x} = x_1$ ,  $\mathbf{X} = X_1$ ,  $N = N_1$ ,  $\kappa = \kappa_1$ ,  $\mu = \mu_1$ ,  $n = n_1$ ). L'estimateur de la  $n_1$ -ième dérivée non minimal (4) peut être donné par :

$$\frac{(-1)^{(n_1+\kappa_1)}(n_1 + \kappa_1)!(N_1 - n_1)!}{s_1^{\mu_1+\kappa_1+N_1+n_1+2}} I_{x_1^{n_1}} = \frac{1}{s_1^{N_1+\mu_1+1}} \frac{d^{n_1+\kappa_1}}{ds_1^{n_1+\kappa_1}} \frac{1}{s_1} \frac{d^{N_1-n_1}}{ds_1^{N_1-n_1}} s_1^{N_1+1} \hat{I}(s_1).$$

Dans le domaine spatial l'équation précédente se transforme en :

$$I_{x_1^{n_1}}(0) = \frac{(-1)^{n_1+\kappa_1}(\mu_1 + \kappa_1 + N_1 + n_1 + 1)!}{(N_1 - n_1)!(n_1 + \kappa_1)! X_1^{\mu_1+\kappa_1+N_1+n_1+1}} \int_0^{X_1} \Upsilon_1(x_1) I(x_1) dx_1, \quad (16)$$

avec

$$\Upsilon_1(x_1) = \sum_{i=0}^{N_1-n_1} \binom{N_1 - n_1}{i} \frac{(N_1 + 1)!}{(n_1 + i + 1)!} \sum_{j=0}^{N_1+\kappa_1} \binom{n_1 + \kappa_1}{j} \frac{(n_1 + 1)!}{(1 + j - \kappa_1)!} \frac{(X_1 - x_1)^{\nu_1+\kappa_1-j-2} (-x_1)^{i+j}}{(\mu_1 + \kappa_1 - j - 2)!}.$$

En intégrant par parties  $n_1$  fois l'équation (16), nous obtenons :

$$I_{x_1^{n_1}}(0) = \int_0^{X_1} \Omega(x_1) \frac{d^{n_1} I(x_1)}{dx_1^{n_1}} dx_1$$

avec

$$\Omega_1(x_1) = \underbrace{\int_0^{X_1} \dots \int_0^{X_1}}_{n_1}$$

$$\frac{(-1)^{n_1+\kappa_1}(\mu_1 + \kappa_1 + N_1 + n_1 + 1)!}{(N_1 - n_1)!(n_1 + \kappa_1)! X_1^{\mu_1+\kappa_1+N_1+n_1+1}} \Upsilon_1(x_1) \underbrace{dx_1 \dots dx_1}_{n_1}.$$

Posons  $q_1 = N_1 - n_1$ . Il a été démontré dans [3] que

$$\Omega_1(x_1) = \mathcal{K}_{q_1}(0, x_1) = \sum_{i=0}^{q_1} \frac{P_i^{\{\kappa_1, \mu_1\}}(0) P_i^{\{\kappa_1, \mu_1\}}(x_1)}{\|P_i^{\{\kappa_1, \mu_1\}}\|^2}.$$

D'autre part, considérons l'équation (4), (5) et réécrivons-la comme suit :

$$\frac{(-1)^{(n_1+\kappa_1)}(n_1 + \kappa_1)!(N_1 - n_1)!}{s_1^{\mu_1+\kappa_1+N_1+n_1+2}} I_{\mathbf{x}^n} = \frac{1}{s_1^{N_1+\mu_1+1}} \partial^{n_1+\kappa_1} \frac{1}{s_1} \partial^{N_1-n_1} s_1^{N_1+1} \dots \frac{1}{s_m^{N_m+\mu_m+1}} \partial^{n_m+\kappa_m} \frac{1}{s_m} \partial^{N_m-n_m} s_m^{N_m+1} \dots \hat{I}(\mathbf{s}).$$

Revenant au domaine spatial, nous obtenons :

$$I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}) = \int_0^{X_1} \dots \int_0^{X_m} \dots \int_0^{X_r} \prod_{m=1}^r (\Omega_m(x_m)) \partial^n I(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Nous venons de vérifier que le noyau reproduisant de l'estimateur multivarié non minimal donné par la première égalité de (11) est bien le produit des noyaux des estimateurs monovariés. La preuve est terminée en rappelant la seconde égalité de (11).

En s'appuyant sur la formule (11) nous déduisons que :

$$\prod_{m=1}^r (\Omega_m(x_m)) = \mathcal{K}_q(\bar{0}, \mathbf{x}). \quad (17)$$

Nous venons de montrer que l'estimateur non minimal d'ordre  $q$  s'exprime sous forme d'une projection orthogonale dans une base formée par les polynômes de Jacobi multivariés d'ordre  $q$  donnée par :

$$I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}, \kappa, \mu; N) = \sum_{l=0}^q \frac{\langle \mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}(\mathbf{x}), \partial^{(n)} I(\mathbf{X}\mathbf{x}) \rangle}{\|\mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}\|^2} \mathcal{P}_l^{\{\kappa, \mu\}}(\bar{0}) \quad (18)$$

#### IV. IMPLÉMENTATION NUMÉRIQUE ET SIMULATIONS

##### A. Implémentation

La forme générale des estimateurs peut s'écrire :

$$\tilde{I}_{\mathbf{x}^n}(\bar{0}; \kappa, \mu; N) = \int_{\bar{0}}^{\bar{1}} G(\mathbf{x}) I(\mathbf{X}\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (19)$$

Afin de pouvoir estimer les dérivées en des points différents de zéro, il suffit de faire une translation comme suit :

$$I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0} + \mathbf{r}; \kappa, \mu; N) = \int_{\bar{0}}^{\bar{1}} G(\mathbf{x}) I(\mathbf{X}\mathbf{x} + \mathbf{r}) d\mathbf{x}. \quad (20)$$

Discretisons le signal  $I(\mathbf{X}\mathbf{x} + \mathbf{r})$  défini sur l'intervalle  $[\mathbf{r}, \mathbf{r} + \mathbf{X}]^r$  suivant un pas d'échantillonnage  $s = (s_1, \dots, s_r)$  afin d'obtenir une hypermatrice  $I_d$ . Evaluons  $G$  sur l'intervalle  $[0, 1]^r$ , ce dernier est discrétisé avec le même nombre d'échantillons que  $I_d$ . Nous obtenons une hypermatrice  $G_d$ . Soient  $W$  une hypermatrice constituée des poids correspondant à une méthode numérique d'estimation des intégrales. Soit  $R$  la matrice formée par la multiplication terme à terme de  $G_d$  et  $W$ . Une approximation de l'intégrale (20) peut être donnée par :

$$I_{\mathbf{x}^n}(\bar{0} + \mathbf{r}) \simeq R \times I_d \quad (21)$$

où  $\times$  est le produit matriciel classique.

##### B. Estimations des dérivées d'un signal académique

Nous considérons le même signal que dans [4] en lui rajoutant du bruit. Il est donné par :

$$I(x_1, x_2) = \sin\left(\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + 3\right) \cos(2x_1 + 1 - e^{x_2}) + \bar{\omega}(x_1, x_2), \quad (22)$$

Son allure est visualisée sur la figure 1. Les résultats obtenus sont comparés avec les différences finies tirées de [1]. Un pas d'échantillonnage de  $(0.005 \times 0.005)$  est utilisé.

Les dérivées sont calculées sur une coupe de la surface 1 aux points  $(x_1, x_2)$  admettant  $x_2 = 0$  et  $x_1$  allant de  $-1$  jusqu'à 3. En effet, en chaque point de la ligne  $(-1 \leq x_1 \leq 3, x_2 = 0)$ , une surface élémentaire nécessaire pour effectuer les calculs (approximer l'intégrale (20)) est prise autour de chaque point  $(x_1, x_2)$ .

La surface a été bruitée avec un bruit donné par  $\bar{\omega}(x_1, x_2)$ . Le rapport signal sur bruit utilisé (en dB) est donné par  $SNR = 10 \log_{10} \left( \frac{\sum_{i,j} |I(x_{1,i}, x_{2,j})|^2}{\sum_{i,j} |\bar{\omega}(x_{1,i}, x_{2,j})|^2} \right)$ . Dans les simulations un  $SNR$  de 25 dB est considéré. La figure (2) montre une coupe de la surface bruitée dans le plan  $x_2 = 0$  et pour  $x_1$  allant de  $-1$  jusqu'à 3.

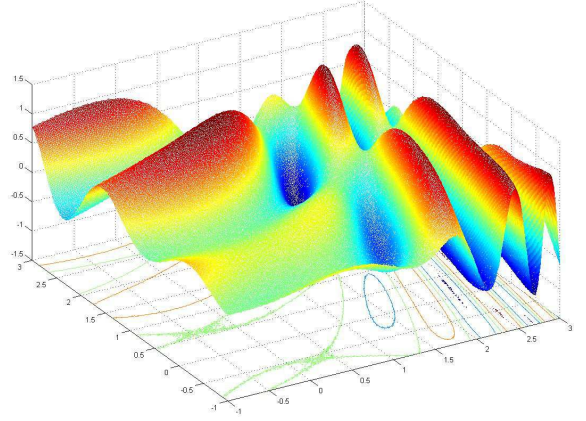


Fig. 1. Représentation de (22) dans le cas bruité

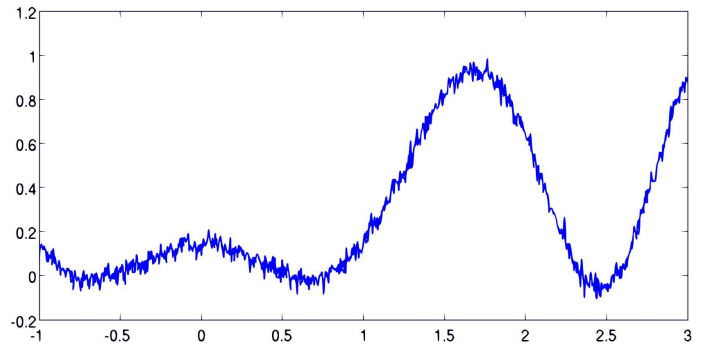


Fig. 2. Coupe de la surface bruitée à 25 dB en  $x_2 = 0$  et  $-1 < x_1 < 3$ ,

Il est important de savoir que les différences finies ne sont pas évaluées entre des échantillons successifs mais sur la même surface utilisée pour les estimateurs algébriques. Utiliser une surface relativement large pour évaluer les différences finies permet d'atténuer l'effet du bruit. En d'autres termes, les différences finies ont été réglées soigneusement afin de tirer les meilleurs résultats sur le signal considéré.

Trois dérivées sont évaluées :  $I_{x_1}$ ,  $I_{x_1^2}$  et  $I_{x_1 x_2}$ . Dans chaque cas deux algorithmes ont été testés :

1. Un estimateur minimal *i.e.* un estimateur basé sur un développement de Taylor d'ordre minimal.
2. Un estimateur non minimal.

Un algorithme de différences finies tirés de [1] pour l'estimation de la dérivée première  $I_{x_1}$  a été simulé. Des algorithmes de différences finies pour l'estimation de  $I_{x_1^2}$  et  $I_{x_1 x_2}$  ont été simulés mais les résultats ne seront pas présentés vu leur mauvaise qualité.

##### Estimation de $I_{x_1}$

L'estimateur minimal est calculé en prenant  $n = (1, 0)$ ,  $N = n$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ . L'estimateur non minimal est synthétisé en prenant  $n = (1, 0)$ ,  $N = (2, 0)$ ,  $\mu = (0, 0)$  and  $\kappa = (0, 0)$ .

Une surface (glissante) formée de  $30 \times 30$  échantillons est utilisée, les résultats de la simulation sont montrés sur les figures 3 et 4. On peut voir que l'estimateur minimal est décalé par rapport à la dérivée formelle tandis que l'estimateur non minimal n'induit pas un décalage visible par rapport à la dérivée formelle. Par contre, l'estimateur mini-

mal est moins sensible au bruit. L'algorithme de différences finies est très sensible au bruit et induit aussi une grande erreur sur l'amplitude de la dérivée.

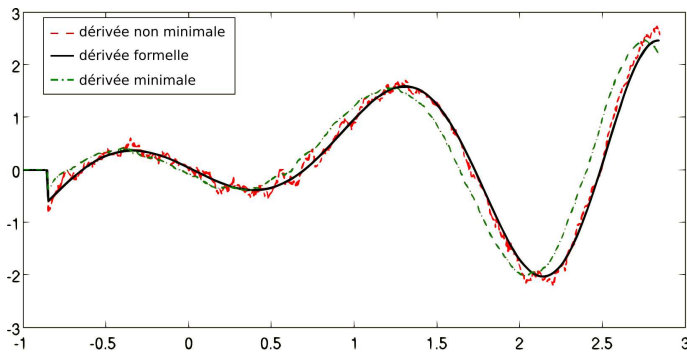


Fig. 3. Estimation de  $I_{x_1}$

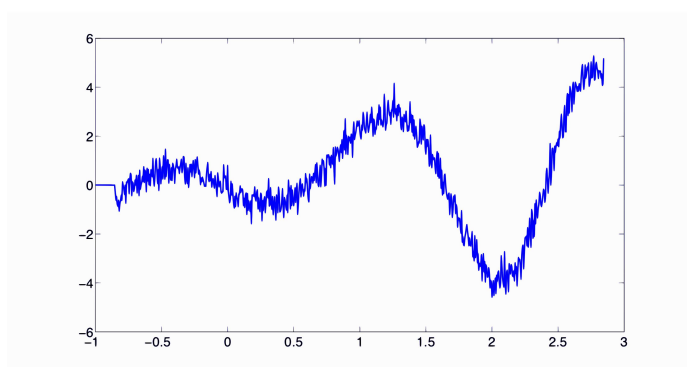


Fig. 4. Estimation de  $I_{x_1}$  par les différences finies

#### Estimation de $I_{x_1^2}$

L'estimateur minimal est calculé en prenant  $n = (2, 0)$ ,  $N = n$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ . L'estimateur non minimal est synthétisé en prenant  $n = (2, 0)$ ,  $N = (3, 0)$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ . Les résultats de la simulation sont tracés sur la figure 5, une surface élémentaire (glissante) constituée de  $60 \times 60$  éléments étant utilisée. On voit bien dans ce cas que l'estimateur minimal est nettement meilleur en terme de filtrage de bruit.

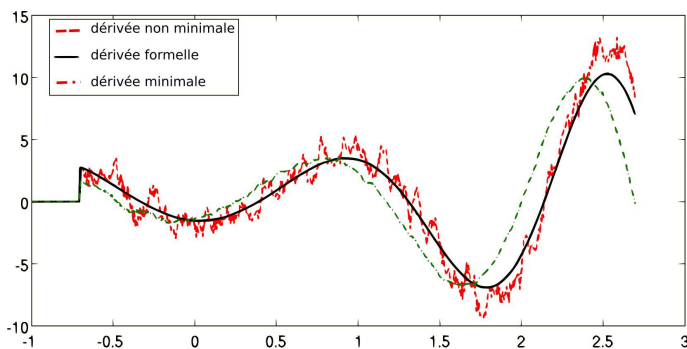


Fig. 5. Estimation de  $I_{x_1^2}$

#### Estimation de $I_{x_1 x_2}$

L'estimateur minimal est calculé en prenant  $n = (1, 1)$ ,  $N = n$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ . L'estimateur non minimal est synthétisé en prenant  $n = (1, 1)$ ,  $N = (2, 2)$ ,  $\mu = (0, 0)$  et  $\kappa = (0, 0)$ . Les résultats de la simulation sont tracés

sur la figure 6, une surface glissante constituée de  $60 \times 60$  éléments est utilisée. Les mêmes conclusions peuvent être tirées.

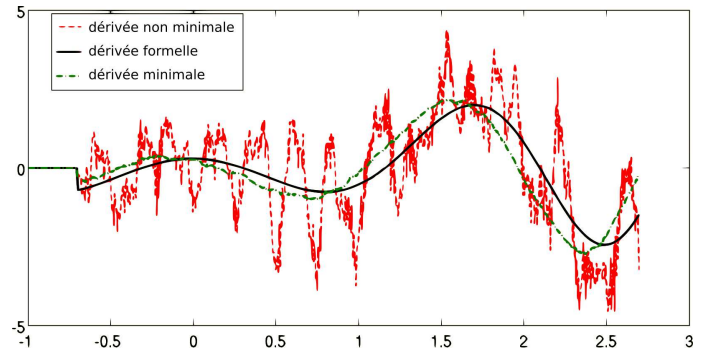


Fig. 6. estimation de  $I_{x_1 x_2}$

## V. CONCLUSION

Dans ce papier, des estimateurs de dérivées de signaux bruités ont été développés. Il a été montré que les estimateurs synthétisés correspondent à un problème d'optimisation de type moindres carrés. En même temps, une implémentation à faible coût calculatoire a été fournie sous forme de filtre à réponse impulsionnelle finie. Le développement d'estimateurs combinant les avantages des estimateurs minimaux et non minimaux (filtrage du bruit et non décalage spatial) feront l'objet d'un autre travail [5]. Nous tenons à rappeler que dans un contexte bruité, les différences finies ont fournis des résultats très mauvais. Des travaux sont en cours sur l'utilisation de ces estimateurs dans le domaine de traitement d'images, notamment dans l'estimation du mouvement dans des séquences vidéos. Les premiers résultats sont probants.

## RÉFÉRENCES

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of mathematical functions*, Dover, 1965.
- [2] A. Bjorck, *Numerical methods for least squares problems*, SIAM, 1996.
- [3] M. Mboup, C. Join and M. Fliess. "Numerical Differentiation with annihilators in noisy environment". *Numerical Algorithm*, 2008, 1017-1398. (available at <http://hal.inria.fr>).
- [4] S. Riachy, Y. Bachalany, M. Mboup and J.-P. Richard. "Différenciation numérique multivariable I : estimateurs algébriques et structure". *6<sup>e</sup> Conférence internationale francophone d'automatique*, 2-4 juin, 2010.
- [5] S. Riachy, M. Mboup, Y. Bachalany, J.-P. Richard. "Multivariable numerical differentiation", en préparation.