HAL
open science

Graphes de recouvrement multichemins

Cyril Gavoille, Quentin Godfroy, Laurent Viennot

To cite this version:

Cyril Gavoille, Quentin Godfroy, Laurent Viennot. Graphes de recouvrement multichemins. 12èmes Rencontres Francophones sur les Aspects Algorithmiques de Télécommunications (AlgoTel), Maria Gradinariu Potop-Butucaru and Hervé Rivano, 2010, Belle Dune, France. inria-00475970

HAL Id: inria-00475970

https://inria.hal.science/inria-00475970

Submitted on 23 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Graphes de recouvrement multichemins

Cyril Gavoille[†‡], Quentin Godfroy[†§], Laurent Viennot[¶]

Cet article concerne des graphes de recouvrement (ci-après nommés *spanneurs*) qui approximent des multichemins entre des paires de sommets de graphes non orientés de n sommets. Habituellement un spanneur H d'étirement s pour un graphe G est un sous-graphe couvrant tel que la distance dans H entre deux sommets quelconques est au plus s fois la distance dans G. Nous étudions ici des spanneurs qui approximent des cycles, et plus généralement p chemins arêtes disjoints avec $p > 1$ pour toute paire de sommets.

Pour un graphe G non orienté nous construisons un 3-spanneur 2-multichemins avec $O(n^{3/2})$ arêtes. Autrement dit, pour toute paire de sommets u,v la longueur du plus court cycle de H la contenant est au plus le triple de celle dans G. On montre que cette construction est optimale en terme d'étirement et de nombre d'arêtes. Dans un second temps il est construit un $(2,8)$-spanneur 2-multichemins contenant $O(n^{3/2})$ arêtes, ce qui revient à dire que pour toute paire de sommets u,v la longueur du plus court cycle dans H la contenant est au plus du double de celle dans G plus une constante additive de 8. Pour un p quelconque on observe qu'il existe pour tous entiers k et p un $p(2k-1)$-spanneur p-multichemins possédant $O(p \cdot n^{1+1/k})$ arêtes, en laissant ouverte la question de savoir s'il est possible à même taille de réduire l'étirement à $2k-1$ pour tout $p > 1$.

Mots-clefs : spanneur, distance, flot, cycle

1 Introduction

Cet article concerne le calcul de spanneurs peu denses de graphes pour une métrique de graphes multi-distance. Habituellement les spanneurs sont définis à l'aide de la distance standard des graphes, c'est-à-dire la longueur d'un plus court chemin. En réalité la notion s'étend à toute métrique de graphe décroissante, c'est-à-dire une fonction δ qui associe à tout graphe G une métrique δ_G sur ses sommets et telle que le retrait d'arêtes ne peut faire diminuer la distance entre deux sommets (i.e. $\delta_H \geqslant \delta_G$ pour H sous-graphe de G). Dans ce sens, un (α,β)-spanneur H d'un graphe G pour une métrique de graphe δ est tel que pour toute paire de sommets u,v on a $\delta_H(u,v) \leqslant \alpha \cdot \delta_G(u,v) + \beta$. On nomme (α,β) l'étirement—noté simplement α si $\beta = 0$.

Ici nous nous intéressons à la distance multichemins et aux spanneurs définis relativement à cette distance. On définit la distance p-multichemins à l'aide de p-multichemins : un p-multichemin joignant u à v est simplement défini comme un sous-graphe contenant p chemins arêtes disjoints entre u et v. Le poids d'un tel multichemin est défini comme la somme des poids des arêtes. Ainsi, la distance est définie comme le minimum des poids observés quand on parcourt l'ensemble des multichemins possibles entre u et v.

1.1 Motivation

Les spanneurs ont surtout été étudiés dans le cadre de la distance habituelle des graphes comme introduits par Peleg et Schäffer [5], puis étendus aux graphes valués [1]. Il existe une abondante littérature sur les spanneurs reposant sur la distance de graphes dont on peut trouver un survol par Pettie dans [7]. Entre autres il est bien connu que pour tout $k \geqslant 1$ on peut extraire de n'importe quel graphe valué à n arêtes un spanneur d'étirement $(2k-1,0)$ et comprenant $O(n^{1+1/k})$ arêtes. La preuve repose sur un algorithme glouton fondé

[†]Université de Bordeaux, financé par le projet ANR ALADDIN, l'équipe-projet INRIA CÉPAGE, et le projet Franco-Israélien "Multi-Computing".

[‡]Membre de l'Institut Universitaire de France. gavoille@labri.fr

[§]quentin@godfroy.eu

[¶]INRIA, Université Paris 7, financé par le projet ANR ALADDIN et l'équipe-projet INRIA GANG. laurent.viennot@inria.fr

sur une modification de l'algortithme de Kruskall. Il est conjecturé que le compromis étirement-taille est optimal.

Considérer seulement un sous-ensemble de liens est une préoccupation incessante des protocoles de routage par état de lien dans les réseaux ad hoc [3]. Ceci soulève le problème de calculer un spanneur pour la métrique de graphe multichemins. Par ailleurs les spanneurs sont un ingrédient clef dans la conception de schémas de routage compact [6]. Concevoir des spanneurs multichemins est ainsi la première étape vers le routage compact multichemins.

La raison de considérer des chemins arêtes disjoints et non pas des chemins sommets disjoints est que la distance résultant n'est une distance que dans le cas des chemins arêtes disjoints. Plus précisément si l'on définit $d*^p_G(u,v)$ comme le coût minimum d'un ensemble de p chemins sommets disjoints allant de u à v l'inégalité triangulaire n'est pas forcément satisfaite. Pour $p = 2$ on peut facilement construire un graphe G tel que entre u, v et v, w la distance soit finie tandis que entre u et w elle ne le soit pas. Le choix de la somme des longueurs suit le même raisonnement. d^p_G est le choix le plus naturel pour étendre la distance habituelle des graphes dans le cadre du routage multichemins.

1.2 Nos contributions

Nos résultats sont valables pour des graphes non orientés multi-arêtes et pour la métrique multi-chemins d^p pour $p \geqslant 1$. Nos contributions sont les suivantes :

1. Nous observons que tout graphe (non orienté) multi-arêtes valué possède un p-multichemins $p \cdot (2k-1)$-spanneur avec $O(p \cdot n^{1+1/k})$ arêtes. La construction est fondée sur une application itérative de l'algorithme standard de spanneur sur le graphe G.
2. L'analyse précédente peut être raffinée dans le cas des graphes non valués pour montrer que la construction qui produit un 2-multichemins $2 \cdot 3$-spanneur ($k = p = 2$) réalise en fait un 2-multichemins 3-spanneur avec le même nombre d'arêtes.
3. On montre aussi que toutes les bornes inférieures valables sur les spanneurs standard (i.e. $p = 1$) se transposent telles-quelles pour des p supérieurs. En particulier le compromis taille-étirement de notre second résultat est optimal.
4. En utilisant une approche différente on montre qu'il est possible de construire un 2-multichemins $(2, 8W)$-spanneur de taille $\Phi \cdot n^{3/2} + n$ arêtes, où W est le poids maximal des arêtes du graphe et $\Phi \approx 1,62$ le nombre d'or.

2 Préliminaires

Dans la suite, on considère un graphe non orienté multi-arêtes valué G avec w comme fonction de poids. Le *coût* de n'importe quel sous-graphe H est la somme du poids de ses arêtes. On le note $w(H) = \sum_{e \in E(H)} w(e)$. On pose $w(H) = 0$ si $E(H) = \varnothing$.

2.1 Distance multichemins

On définit un p-multichemin de u à v comme un sous-graphe de G composé de p chemins arêtes disjoints allant de u à v. On définit la *distance p-multichemins* entre u et v notée $d^p_G(u,v)$ comme le poids minimum d'un p-multichemin P lorsque P parcourt l'ensemble des p-multichemins possibles allant de u à v. On pose $d^p_G(u,v) = +\infty$ s'il n'existe pas p chemins disjoints entre u et v. Il est possible de montrer que d^p est une distance (la symmétricité et la réflexivité sont évidentes et la preuve de l'inégalité triangulaire repose sur une application du théorème de la coupe minimum et du flot maximum).

La distance multichemins peut se calculer avec une recherche de p-flot de coût minimum (voir p.ex. [4]) dans le graphe où l'on a remplacé chaque arête par deux arêtes de capacité un orientées dans le sens contraire. La p-distance est alors réalisée en comptant les arêtes prises dans un sens mais pas les deux.

2.2 Spanneurs itératifs

Un *s-spanneur p-itératif* H de G est un sous-graphe (couvrant) de G tel que $H = \bigcup_{i=1}^{p} H_i$ où H_i est un 1-multichemins s-spanneur de $G \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} H_j$. On remarque que de tels spanneurs itératifs sont des spanneurs p-multichemins.

Proposition 1 *Pour tous entiers $k, p \geqslant 1$, tout graphe multi-arêtes valué non orienté admet un $(p \cdot (2k-1), 0)$-spanneur p-multichemins avec moins de $p \cdot n^{1+1/k}$ arêtes qui peut être construit avec un $(2k-1, 0)$-spanneur p-itératif.*

Preuve. Soit H un $(2k-1,0)$-spanneur p-itératif composé de $H_i, i \in [\![1, p]\!]$, 1-spanneurs d'étirement $(2k-1,0)$ et possédant moins de $n^{1+1/k}$ arêtes. Chaque spanneur existe (cf. [1]). Par conséquence H a moins de $p \cdot n^{1+1/k}$ arêtes.

Soit deux sommets quelconques u, v de G. On note P un p-chemin de coût minimum entre u et v. On note $H_i(e)$ un plus court chemin dans H_i joignant les extrémités de e. Soit F un sous graphe défini par la relation suivante :

$$F = \bigcup_{e \in P \cap H} \{e\} \cup \bigcup_{e \in P \setminus H} \bigcup_{i=1}^{p} H_i(e)$$

Il est facile de voir que $w(F) \leqslant p \cdot (2k-1) \cdot w(P)$. En effet, chaque arête de $e \in P$ est soit dans H soit remplacée par p chemins (arêtes disjoints par construction) chacun de poids $(2k-1) \cdot w(e)$ par définition des H_i. En sommant ces poids on obtient l'inégalité voulue puisque pour $e \in P$ dans H on a aussi $w(e) \leqslant p \cdot (2k-1) \cdot w(e)$.

Pour la p-connectivité, il est proposé un raisonnement à base du théorème de coupe minimum et de flot maximum. Pour toute coupe X séparant u de v, soient $e_1, \ldots e_q$ les arêtes de P coupées par X (q est supérieur à p sinon P ne serait pas un p-multichemin). Deux cas se présentent : soit $e_1, \ldots e_q \in H$ et dans ce cas la coupe est supérieure à p dans F, soit $\exists j$ tq. $e_j \notin H$ et dans ce cas la coupe sépare les p chemins $H_1(e_j) \ldots H_p(e_j) \in F$, donc a pour capacité au moins p. Dans tous les cas la coupe a une capacité supérieure à p dans F donc le flot vaut au moins p. On a donc p chemins disjoints dans F. □

3 Nos résultats

3.1 2-*multichemins* 3-*spanneur*

Le spanneur est construit de la même façon avec un 3-spanneur 2-itératif. L'analyse est réalisée en considérant un 2-chemin P de poids minimum reliant u à v dans G avec quelques contraintes techniques en ajoutant incrémentalement des chemins de remplacement pour les arêtes de P non dans H. Les cas d'intersection entre les remplacements d'une arête et le chemin opposé sont gérés en bornant leur nombre. La 2-connectivité se fait avec des arguments de coupe similaires à ceux utilisés pour les p-multichemins spanneurs. La preuve complète est omise ici.

3.2 *Considérations de borne*

On note pour tous p,n et $s > 1$ $m_p(n,s)$ l'entier le plus grand tel qu'il existe un graphe multi-arêtes valué à n sommets tel que tout spanneur p-multichemins d'étirement strictement plus faible que $(s,0)$ pour ce graphe nécéssite au minimum $m_p(n,s)$ arêtes.

Proposition 2 *Pour tous entiers $n, p \geqslant 1$ et réel $s > 1$, $m_p(n,s) \geqslant m_1(n,s)$.*

Cette proposition s'entend tout particulièrement pour la conjecture d'Erdős-Simonovits [2] et amène que pour tous $k \geqslant 1$ il existe un graphe multi-arêtes à n sommets tel que tout spanneur p-multichemins d'étirement strictement moindre que $2k+1$ possède $\Omega(n^{1+1/k})$ arêtes. Sa preuve repose en prenant un graphe extrémal pour des 1-chemins spanneurs, et en remplaçant chaque arête par p arêtes.

3.3 2-*multichemins* $(2,8)$-*spanneur*

La construction est fondée sur le concept d'arbre couvrant de 2-chemins de poids minimum et une adaptation de la construction classique de $(1,2)$-spanneurs. Un arbre couvrant de 2-chemins est simplement un sous-graphe couvrant avec nœud privilégié u tel qu'il existe pour tout sommet v un 2-chemin de poids minimum entre u et v. On les note $\mathrm{SPT}_H^p(u)$. On peut notamment montrer qu'un tel arbre peut être construit

avec moins de $2(n-1)$ arêtes en constatant que la construction de Suurballe et Tarjan [8] peut être adaptée au cas non orienté et revient à l'application de deux itérations de l'algorithme de Dijkstra.

Dans la suite $B_H^p(u,r) = \{v \in V(H) : d_H^p(u,v) \leqslant r\}$ désigne la boule de p-multichemins de rayon r centrée en u dans le graphe H.

pour *chaque arête* $e \in G$ **faire**
  si $\exists e', e''$ *tq.* $w(e'), w(e'') \leqslant w(e)$ *et joignant les mêmes extrémités que* e **alors**
    $G \leftarrow G \setminus \{e\}$
$H \leftarrow (V(G), \varnothing)$ et $W \leftarrow \max\{w(e) : e \in E(G)\}$
tant que $\exists u \in V(G)$ *tq.* $\left|B_G^2(u,4W)\right| \geqslant (\sqrt{5}-1)\sqrt{n}$ **faire**
  $H \leftarrow H \cup \mathrm{SPT}_G^2(u)$
  $G \leftarrow G \setminus B_G^2(u,4W)$
  $W \leftarrow \max\{w(e) : e \in E(G)\}$
$H \leftarrow H \cup G$

Algorithme 1: Un algorithme de 2-multipath $(2,8W)$-spanneur.

Le spanneur est construit à l'aide de l'algorithme 1. Celui-ci fonctionne de la manière suivante : une fois l'étape préliminaire de supression des arêtes manifestement inutiles effectuée, on effectue la boucle principale : pour chaque sommet u au centre d'une 2-boule de rayon $4W$ on rajoute le 2-arbre enraciné en u au spanneur puis on retire du graphe ladite boule. On met ensuite à jour le poids maximal W. À la fin, on rajoute les arêtes restantes du graphe.

Proposition 3 *Tout graphe multi-arêtes non orienté valué possède un* 2*-multichemins* $(2,8W)$*-spanneur avec moins de* $\Phi n^{3/2} + n$ *arêtes, où* $\Phi \approx 1,62$*, le nombre d'or.*

Idée de la preuve : L'étirement est prouvé en considérant un 2-chemin de poids minimum entre deux sommets u et v. Si le chemin n'intersecte aucune 2-boule alors il est dans le spanneur. Dans le cas contraire il existe w centre de la boule et on a des contraintes sur la longueur des plus court chemins entre w et les deux autres nœuds qui sont dans le spanneur à cause du 2-arbre de plus court chemin enraciné en w.

Le nombre d'arêtes provient d'une analyse sur d'une part le nombre d'arêtes adjacentes aux centre des boules qu'on borne d'après le nombre de sommets dans les boules et d'autre part le graphe restant dont on peut montrer qu'il n'a pas de cycle de taille inférieure ou égale à 4.

4 Perspectives

Il reste à investiguer l'existence (ou le calcul) de p-multichemins $2k-1$-spanneurs pour $p \geqslant 2$ et $k \geqslant 2$.

Références

[1] Ingo Althöfer, Gautam Das, David Dobkin, Deborah A. Joseph, and José Soares. On sparse spanners of weighted graphs. *Discrete & Computational Geometry*, 9(1) :81–100, 1993.

[2] Paul Erdős and Miklos Simonovits. Compactness results in extremal graph theory. *Combinatorica*, 2(3) :275–288, 1982.

[3] Philippe Jacquet and Laurent Viennot. Remote spanners : what to know beyond neighbors. In *23rd IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium (IPDPS)*, pages 1–10, 2009.

[4] Eugene L. Lawler. *Combinatorial Optimization : Networks and Matroids*. Holt, Rinehart and Winston, 1976.

[5] David Peleg and Alejandro A. Schäffer. Graph spanners. *Journal of Graph Theory*, 13(1) :99–116, 1989.

[6] David Peleg and Jeffrey D. Ullman. An optimal synchronizer for the hypercube. *SIAM Journal on Computing*, 18(4) :740–747, 1989.

[7] Seth Pettie. Low distortion spanners. In 34th *International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, volume 4596 of Lecture Notes in Computer Science, pages 78–89. Springer, July 2007.

[8] J. W. Suurballe and Robert Endre Tarjan. A quick method for finding shortest pairs of disjoint paths. *Networks*, 14(2) :325–336, 1984.