Évaluation de performances des systèmes d'attente fiables

Smail Adjabi, Karima Lagha

Évaluation de performances des systèmes d'attente fiables

Smail Adjabi, Karima Lagha
Laboratoire LAMOS, Université de Béjaïa, Algérie
E-mail : adjabi@hotmail.com

Résumé

Dans ce travail, on étudie le problème d'évaluation de performances d'un système d'attente de type $GI/GI/1$, en utilisant la propriété qualitative des distributions non paramétriques du temps des inter-arrivées. Nous obtenons ainsi les bornes pour la caractéristique de performance : temps moyen d'attente. La propriété qualitative est utilisée à défaut d'informations suffisantes, elle apporte souvent une première approximation dans les modèles de fiabilité. Nous avons utilisé deux approches, l'approche des bornes et l'approche de simulation. Dans la première approche on a déterminé les bornes de la caractéristique de performance pour le système considéré, dans lequel, on a utilisé les modèles d'Erlang, de Weibull et des échantillons validés par des tests pour les différentes classes de distributions non paramétriques. Dans la deuxième approche, on simule les caractéristiques pour ce système afin de vérifier les résultats obtenus avec ceux de la première approche.
Mots clés : Évaluation de performances, files d'attente, distributions non paramétriques.

Abstract

In this paper we consider the performance evaluation problem in a queuing system GI/GI/1, using nonparametric distributions. We considered the qualitative properties of the inter-arrival time. The characteristic is the mean stationary waiting time. We obtain bounds for these characteristics. Two approaches are used, the bounds and the simulation approach. The bounds established are programmed and the characteristics are simulated in order to check the validity of the bounds.
keyword : performance evaluation, queuing system, bounds, simulation

1 Introduction

les distributions non paramétriques ont été introduites depuis quelques années en relation avec certaines applications en fiabilité et analyse de survie. Les mathématiciens et praticiens s'intéressent depuis quelques années à l'étude de leurs propriétés analytiques et une littérature variée sur le sujet existe. En théorie des files d'attente la motivation pour leur utilisation consiste en le fait qu'elles permettent d'étudier la robustesse de systèmes de files d'attente par rapport à des distributions paramétriques (dégradation du service ou de la loi des arrivées ou tout autre paramètre), en particulier la loi exponentielle. D'autre part, différentes estimations par bornes peuvent être mises en évidence pour les mesures de performances de tels systèmes.
En raison de la complexité des systèmes du type $GI/GI/1$, peu de résultats sur les caractéristiques de performances sont connus les concernant, même s'ils existent, il sont quasi inexploitables pour un praticien. En exploitant le caractère spécifique des classes de distribution non paramétriques, en utilisant leur propriétés qualitatives, on propose une approche [1] pour obtenir une approximation caractéristique de performance : temps moyen d'attente sous forme de borne inférieure et supérieure.

2 Système d'attente GI/GI/1

Peu de résultats concernant les performances existent pour ce type de système, en raison de ces propriétés peu exploitables. Néanmoins, dans Stoyan [9] on donne l'expression analytique exacte du temps moyen d'attente dans le système $GI/GI/1$:

$$\overline{W} = \frac{(m_1 - m_B)^2 + \sigma_1^2 + \sigma_B^2}{2(m_1 - m_B)} - \frac{m_L^2 + \sigma_L^2}{2m_L},$$

où m_L,m_1,m_B sont respectivement les moyennes de la période d'inoccupation, du temps des inter-arrivées et du temps de service. σ_L^2, σ_1^2, σ_B^2 sont les variances associées.
Soit F une distribution de vie. En exploitant les bornes, résumée dans le tableau 1, que sengupta [8] propose dans le cas de l'appartenance de celle-ci à une de ces classes : IFR, NBU, nous établissons des bornes pour le temps moyen d'attente dans la file.
Étant donnée deux systèmes $A_1/B_1/1$ (dit système original) et $A_2/B_2/1$ (dit système d'approximation), où A_i $i = 1, 2$ représente la distribution des temps des inter-arrivées de moyenne m_i finie, de variance σ_i^2 et de coefficient de variation $C_{ai} = \sigma_i/m_i$, B_i est la distribution de service dans le système $A_i/B_i/1$ d'intensité de trafic ρ_i, $i = 1,\ 2$.
On suppose que les deux systèmes possèdent une discipline de service FIFO (First In First Out), une capacité infinie et que le processus d'arrivée et de service sont des processus de renouvellement. Notons m_{W_i} le temps moyen d'attente dans la file du système i, $i = 1,\ 2$.
Le théorème (5.2.1) [12] énonce la propriété de monotonie externe. Cette propriété permet sous la condition suffisante suivante :

$$A_2 \leq_{cv} A_1 \ \text{ et } \ B_1 \leq_c B_2, \tag{1}$$

de conclure que $m_{W_1} \leq m_{W_2}$, où $\leq_c$ et $\leq_{cv}$ désignent, respectivement, l'ordre convexe et l'ordre concave.
On suppose que le système original possède la même distribution de service que le système d'approximation tel que le second moment $\mathbb{E}B_2$ est fini.
Soit B la distribution de service, on note la moyenne et la variance associées à cette distribution respectivement par m_B et σ_B^2, d'où $\rho_i = m_B/m_i$, $i = 1, 2$.
Si la distribution A_1 possède une propriété qualitative donnée (IFR ou NBU), alors elle est majorée ou minorée par la distribution A_2. Cette dernière est exprimée dans le tableau 1. En utilisant cette propriété nous proposons une borne supérieure (dans chaque cas) pour le temps moyen d'attente stationnaire la file du système $GI/GI/1$ (∞,FIFO).

Classe	Borne supérieure	Borne inférieure
IFR	$\overline{F}(x) \leq \begin{cases} 1 & \text{si } x < m_{1r}^{1/r} \\ \delta_x & \text{si } x > m_{1r}^{1/r} \end{cases}$ où $\int_0^1 ry^{r-1}\delta_x^y dy = \frac{m_r}{x^r}$	$\overline{F}(x) \geq \begin{cases} \inf\limits_{0\leq\beta\leq x} \ e^{-\alpha} & \text{si } x < m_{1r}^{1/r} \\ 0 & \text{si } x > m_{1r}^{1/r} \end{cases}$ où $\int_0^\infty (\beta + \frac{x-\beta}{\alpha} z)^r e^{-\alpha} dz = m_r$
NBU	$\overline{F}(x) \geq \begin{cases} 1 & \text{si } x < m_{1r}^{1/r} \\ \delta_x & \text{si } x \geq m_{1r}^{1/r} \end{cases}$ où $\int_0^1 ry^{r-1}\delta_x^y dy = \frac{m_r}{x^r}$	$\overline{F}(x) \geq \begin{cases} \delta_x & \text{si } x < m_{1r}^{1/r} \\ 0 & \text{si } x \geq m_{1r}^{1/r} \end{cases}$ où $\sum_{j=0}^\infty \delta_x^j [(j+1)^r - j^r] = \frac{m_r}{x^r}$

Table 1: *Bornes de $\overline{F}(x)$ basées le moment m_r d'ordre r dans différents cas*

2.1 Distribution IFR

La distribution F de la variable aléatoire X "Durée de vie" est dite IFR (Increasing Failure rate : Taux de défaillance croissant) si $\lambda(t) = \frac{f(t)}{\overline{F}(t)}$ est décroissante en t, $\forall t \geq 0$. f étant la densité

de la variable X et $\bar{F}(t) = P(X > t)$.
On suppose que la distribution A_1 appartient à la classe IFR. En utilisant la borne inférieure de la fiabilité correspondante à la distribution IFR et en utilisant la relation (1) on établit une borne supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file :

$$m_{W_1} \leq \frac{EB^2}{\frac{2}{\alpha}(1 - e^{-1} - \rho_1)} \ , \tag{2}$$

où $\alpha = \left[\frac{\Gamma(r+1)}{m_{1r}}\right]^{1/r}$.

Démonstration Si A_1 est une distribution IFR, alors $\forall\ r > 0$ on a,

$$\overline{A}_1(x) \geq \overline{A}_2(x) = \begin{cases} e^{-\alpha x} & \text{si } x < m_{1r}^{1/r} \\ 0 & \text{si } x \geq m_{1r}^{1/r}, \end{cases}$$

où

$$\alpha = \left[\frac{\Gamma(r+1)}{m_{1r}}\right]^{1/r}$$

avec m_{1r} désigne le $r^{ième}$ moment de la distribution A_1. Ce qui est équivalent à dire que $A_2 \leq_{st} A_1$, donc $A_2 \leq_{cv} A_1$. La condition suffisante exprimée dans la relation (1) est alors vérifiée d'où $m_{W_1} \leq m_{W_2}$. Il suffit donc de calculer le temps moyen d'attente m_{W2} dans la file du système $A_2/B/1$.
Le taux de défaillance associé à la distribution A_2 est défini par :

$$\lambda(t) = \lim_{t \to 0} \left(\frac{\overline{A}_2(x) - \overline{A}_2(x+t)}{t\ \overline{A}_2(x)} \right)$$

Par conséquent, $\lambda(t) = \alpha$ sur l'intervalle $[0, m_{1r}^{1/r}]$ et est non défini pour $x \geq m_{1r}^{1/r}$. La distribution A_2 est donc exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{m_2}$ sur l'intervalle $[0, m_{1r}^{1/r}]$, où,

$$m_2 = \int_0^\infty \overline{A}_2(x)dx = \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha m_{1r}^{1/r}}).$$

Le temps moyen d'attente m_{W_2} dans la file du système $A_2/B/1$ est donc égal à :

$$m_{W_2} = \frac{\sigma_B^2 + m_B^2}{2m_2(1 - \rho_2)} = \frac{EB^2}{\frac{2}{\alpha}(1 - e^{-\alpha m_{1r}^{1/r}})(1 - \rho_2)}.$$

Pour $r = 1$, on a $\alpha = \frac{1}{m_1}$ et $m_2 = m_1(1 - \rho_1)$.
Finalement :

$$m_{W_1} \leq m_{W2} = \frac{EB^2}{2m_1(1 - e^{-1} - \rho_1)}$$

Les bornes pour le temps moyen d'attente dans la file, m_{W_1}, sont données par

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_B^2}{2m_1(1 - \rho_1)} - 1/2m_1(\rho_1 + C_{a1}^2) \leq m_{W_1} \leq \frac{EB^2}{\frac{2}{\alpha}(1 - e^{-1} - \rho_1)}$$

La borne inférieure est donnée par Stoyan [9].

2.2 Distribution NBU

La distribution F de la variable aléatoire X "durée de vie" est dite NBU (New Better than Used : un élément neuf est meilleur qu'un élément usagé) si $\bar{F}(x+y) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(y)$, $\forall x > 0$, $\forall y > 0$. En d'autres termes : la fiabilité d'un élément usagé d'âge y est inférieure à celle d'un élément neuf d'âge x.
En terme d'ordre stochastique

$$F \text{ est NBU} \Leftrightarrow F \geq_{st} F_t \text{ },0 < t < \infty$$

où F_t désigne la durée de vie résiduelle d'un système d'âge t.
En utilisant la borne inférieure de la fonction fiabilité correspondante à la distribution A_1 de loi NBU exprimée dans le tableau 1 et la relation (1), nous établissons une borne supérieure pour le temps moyen d'attente dans la file, donnée par :

$$m_{W1} \leq \frac{EB^2}{m_1[1 - e^{-1} - 2\rho_1]} \tag{3}$$

Démonstration Soit A_1 une distribution appartenant à la classe NBU, alors $\forall r > 0$,

$$\overline{A}_1(x) \geq \overline{A}_2(x) = \begin{cases} \delta_x & \text{si } x < m_{1r}^{1/r} \\ 0 & \text{si } x \geq m_{1r}^{1/r}. \end{cases}$$

où δ_x est une fonction de x et de m_{1r} telle que $\sum\limits_0^\infty \delta_x^j[(j+1)^r - j^r] = \frac{m_{1r}}{x^r}$.
Si $r = 1$, alors

$$\delta_x = \begin{cases} 1 - \frac{x}{m_1} & \text{si } x < m_1 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

d'où

$$\overline{A}_2(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{m_1} & \text{si } x < m_1 \\ 0 & \text{si } x \geq m_1. \end{cases}.$$

On a alors $A_2 <_{st} A_1$ donc $A_2 <_{cv} A_1$, d'où la condition exprimée par la relation (1).
Par conséquent, $m_{W_1} \leq m_{W_2}$. Le taux de défaillance pour la fonction A_2 est alors $\lambda(t) = \frac{1}{m_1 - t}$ sur l'intervalle $[0, m_1[$, d'où $\lambda(t)$ est une fonction croissante sur $[0, m_1[$. Donc A_2 est une distribution IFR, de moyenne

$$m_2 = \int_0^\infty \overline{A}_2(x)dx = m_1/2.$$

Le temps moyen d'attente m_{W_2} correspondant au système $A_2/B/1$ avec A_2 une distribution IFR est alors majoré par la borne supérieure de la relation 2.1. On a donc

$$m_{W_1} \leq m_{W_2} \leq \frac{\sigma_B^2 + m_B^2}{2m_2[1 - \exp(-1) - \rho_2]},$$

avec $\begin{cases} m_2 = m_1/2 \\ \rho_2 = 2\rho_1. \end{cases}$
Par conséquent

$$m_{W_1} \leq \frac{\mathbb{E}B^2}{m_1(1 - e^{-1} - 2\rho_1)}.$$

$$\frac{\sigma_1^2 + \sigma_B^2}{2m_1(1 - \rho_1)} - 1/2m_1(\rho_1 + 1) \leq m_{W1} \leq \frac{EB^2}{m_1[1 - e^{-1} - 2\rho_1]} \tag{4}$$

La borne inférieure est donnée par Stoyan [9].

Remarques

- La borne supérieure proposée dans le cas d'une distribution IFR (relation 2.1) existe sous la condition $\rho_1 < 1 - e^{-1} \simeq 0.6321$
- La borne supérieure proposée dans le cas d'une distribution NBU (voir la relation 4) existe si $\rho_1 < \frac{1-e^{-1}}{2} \simeq 0.316$.

Classe ρ_1	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
IFR	0.939	1.157	1.505	2.154	3.784	15.566
NBU	2.3142	4.3081	31.1327	X	X	X

TABLE 2: *Bornes supérieures de la quantité* $\frac{m_1}{\mathbb{E}\beta^2} m_{W_1}$

- La borne supérieure proposée dans chacun des deux cas (IFR et NBU) est une fonction croissante du taux de trafic. Ceci apparaît clairement dans les résultats du tableau 2.
- D'après les résultats de ce tableau, le temps moyen d'attente m_{W1} dans le cas IFR est relativement faible pour une intensité de trafic (ρ_1) variant entre 0.1 et 0.5 et il connaît une augmentation rapidement dès pour une intensité dépassant 0.5.

Dans le cas NBU, le temps moyen d'attente dans la file du système devient important dès que ρ_1 dépasse 0.2. On note que le maximum obtenu pour cette valeur dépasse largement celui atteint dans le cas IFR.

3 Simulations

Dans cette section nous allons vérifier les différents résultats obtenus à travers les deux approches utilisées, à savoir le calcul des bornes et la simulation. Pour cela nous avons élaboré une application sous l'environnement MATLAB afin de pouvoir calculer les bornes et de les vérifier avec les résultats obtenus par simulation.

Dans le tableau suivant on présente les bornes (borne inférieure et supérieure) pour différentes distributions : (M_λ :Exponentielle de paramètre λ, $E_{(\alpha,\mu)}$:Erlang de paramètres (α et μ) et $W_{(\beta,\nu)}$:Weibull de paramètres (β et ν)) ainsi que les résultats obtenus par la simulation.

Nature de Système	Borne inférieure	Borne supérieure	Simulation
$E_{(4,2)}/E_{(1,3)}/1$	0	0.11936	0.0097321
$E_{(4,3)}/E_{(2,5)}/1$	0	0.27099	0.021166
$E_{(2,3.5)}/W_{(1,4)}/1$	0.083333	0.56199	0.11258
$W_{(3,1.5)}/W_{(1,4)}/1$	0	0.4948	0.051066
$E_{(3,1)}/M_{\lambda=2}/1$	0	0.17904	0.018002
$M_{\lambda=0.5}/E_{(1,2)}/1$	0.16667	0.32712	0.18617
$M_{\lambda=0.7}/W_{(1,4)}/1$	0.05003	0.095708	0.050896
$M_{\lambda=1.5}/M_{\lambda=2}/1$	0.3	0.37359	0.3
$IFR/M_{\mu\ =1.2}/1$	0.12987	2.5541	0.32971
$IFR/IFR/1$	0	0.3069	0

TABLE 3: *Bornes et simulation de temps moyen d'attente dans la file*

3.1 Interprétation des résultats

On remarque que la valeur de la caractéristique obtenue par simulation est comprise dans l'intervalle délimité par les bornes inférieure et supérieure. De plus, cette valeur semble être beaucoup plus proche de la borne inférieure que de la borne supérieure, ceci nous laisse penser que ces bornes sont valables.

3.2 Conclusion

Dans ce travail nous avons étudier le problème d'évaluation de performances d'un système d'attente de type $GI/GI/1$, en utilisant des distributions non paramétriques. Nous avons considéré la propriété qualitative de la distribution des temps des inter-arrivées La caractéristique étudiée est le temps moyen d'attente dans la file de ce système. On note que dans ce cas, nous obtenons des bornes pour cette caractéristique. Les bornes proposées dans ce travail peuvent être utilisées pour d'autres classes de distributions : dans le système étudié, la borne supérieure proposée pour le temps moyen d'attente dans le cas NBU (relation 4) peut être utilisée pour la classe $IFRA$ (Increasing Failure Rate in Average), car $IFRA \Rightarrow NBU$.

Références

[1] Adjabi, S. and Lagha, K. and Aissani, A. (2004). *Application des lois non paramétriques dans les sytèmes d'attente et théorie de renouvellement*, An International Journal on Operation Research : RAIRO-Operations Research, Vol. 38, N°3, 243-254.

[2] Barlow, E. and Proschan, F. (1975). *Statistical theory of reliability and life testing : Probability models* , Holt, Rinehart and Winston.

[3] Bon, J.L. (1995), *Fiabilité des systèmes : Méthodes mathématiques*, MASSON.

[4] Dimitrov, B. and Khalil, Z. (1990). *On a new characterization of the exponential distribution related to a queueing system with an unreliable server*, J. Appl. Prob, 27(1), 221-239.

[5] Kleinrock, L. (1975). *Queueing systems. Computer applications*, John Wiley & Sons, School of Engineering and Applied Science, University of California, Los Angeles.

[6] Lagha, L. and Adjabi, S. (2009). *Bornes pour le temps de blockage dans un système d'attente à serveur non fiable*, 41ème Journées des statististique, Bordeaux, 25 au 29 Mai 2009, Actes des Abstracts pp. 115.

[7] Nelson, R. (1995). *Probability, stochastic processes, and queuing theory. The mathematics of computer performance modeling*, Springer-Verlag.

[8] Sengupta, D. (1994). *Another look at the moment bounds on reliability*, J. Appl. Prob. 31, 777-787.

[9] Stoyan, D. (1983), *Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models*, Wiley, New York.