

# Choix d'un indice de capabilité basé sur des objectifs industriels: proportion de non-conformes et centrage

Daniel Grau

► **To cite this version:**

Daniel Grau. Choix d'un indice de capabilité basé sur des objectifs industriels: proportion de non-conformes et centrage. 42èmes Journées de Statistique, 2010, Marseille, France, France. 2010. <inria-00494682>

**HAL Id: inria-00494682**

**<https://hal.inria.fr/inria-00494682>**

Submitted on 24 Jun 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# CHOIX D'UN INDICE DE CAPABILITE BASE SUR DES OBJECTIFS INDUSTRIELS: PROPORTION DE NON-CONFORMES ET CENTRAGE

Daniel Grau

Laboratoire de Mathématiques Appliquées, CNRS UMR 5142  
IUT de Bayonne, Université de Pau et des Pays de l'Adour  
17 Place Paul Bert, 64100 Bayonne, France

**Résumé:** Les indices de capabilité ont été introduits pour mesurer la performance d'un processus de production industrielle. Le concept de performance, initialement lié à la proportion de pièces non conformes fabriquées, a rapidement évolué pour tenir compte aussi de la position de la moyenne du processus par rapport à sa cible. Si les liens entre les indices et le centrage ont déjà été étudiés, ceux entre les indices et la proportion de non conformes ne l'ont été que partiellement. Dans cet exposé nous clarifions ces liens et montrons sur un exemple réel comment ces résultats peuvent être utilisés.

**Abstract:** Capability indices were introduced to measure the performance of an industrial production process. The concept of performance, related at first to the proportion of nonconforming items, quickly evolved to take into account the process position in relation to its target, as well. If the links between capability indices and process centering have already been studied, those between capability indices and nonconforming percentage have only been partly studied. In this paper we clarify these links and show on a real example how these results can be used.

**Mots-clés:** Indices de capabilité, Proportion de non conformes, Centrage.

## 1. Introduction

Dans toute entreprise de production l'amélioration de la qualité est un objectif permanent. Pour chaque produit fabriqué, une ou plusieurs caractéristiques sont étroitement surveillées afin de respecter la demande du consommateur. Malheureusement les variations inhérentes aux conditions de production ne permettent pas d'obtenir deux produits exactement identiques. Pour cette raison le cahier des charges établi par le bureau d'étude définit une cible  $T$  et des limites de tolérance  $L$  et  $U$  pour la variable d'intérêt  $X$ . Historiquement la qualité d'un processus de production a été associée à la proportion de pièces non conformes ( $NC$ ), c'est à dire des pièces en dehors des tolérances. Avec les améliorations technologiques, cette proportion a considérablement diminuée de telle sorte qu'il est devenu impossible de l'estimer par un échantillon de taille raisonnable. Pour pallier à cet inconvénient, Juran propose d'utiliser l'indice de capabilité  $C_p = (U - L)/(6\sigma) = d/(3\sigma)$ , où  $d = (U - L)/2$ . Pour un processus  $X$  de loi  $N(\mu, \sigma)$  et centré sur le milieu de l'intervalle de tolérance,  $C_p$  est directement lié à  $NC$  par la relation  $NC = 2\Phi(-3C_p)$ , où  $\Phi$  représente la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Cet indice s'est cependant révélé insuffisant dans la mesure où il ne tient pas compte de la moyenne  $\mu$  du processus, et rapidement un second indice  $C_{pk} = \min((U - \mu)/3\sigma, (\mu - L)/3\sigma)$  a été utilisé par les industriels. Dans les années 80, les travaux de Taguchi ont contribué à modifier la définition de la qualité en incluant la notion de centrage. Le fait que la variable surveillée se situe dans l'intervalle de tolérance ne suffit pas à assurer une qualité optimale. Il est nécessaire aussi qu'elle soit sur sa cible. Ainsi fut introduit l'indice  $C_{pm} = (U - L)/6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}$ , puis peu de temps après l'indice  $C_{pmk} = C_{pk}C_{pm}/C_p$ . En 95, Vännman (1995) propose une généralisation des indices précédents sous la forme  $C_p(u, v) = \frac{d - u|\mu - m|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}$ , où  $m = (L + U)/2$  est le centre de l'intervalle de tolérance,  $u$  et  $v$  sont

deux paramètres positifs ou nuls. Nous avons  $C_p(0,0) = C_p$ ,  $C_p(1,0) = C_{pk}$ ,  $C_p(0,1) = C_{pm}$ , et  $C_p(1,1) = C_{pmk}$ . Outre l'intérêt théorique de cette généralisation, Vännman la justifie par la possibilité de choisir le couple  $(u,v)$  permettant d'obtenir un indice dont l'estimateur possède des performances optimales. La famille  $C_p(u,v)$  n'est cependant utile que dans le cas symétrique où la cible  $T$  se situe en  $m$ . Les cas de tolérances asymétriques ne sont cependant pas rares, et pour cette raison, Chen et Pearn (2001) ont introduit une famille d'indices encore plus vaste sous la forme

$$C_p''(u,v) = \frac{d^* - uA^*}{3\sqrt{\sigma^2 + vA^2}}, \quad (1)$$

où  $A = \max\{d(\mu-T)/D_u, d(T-\mu)/D_l\}$ ,  $A^* = \max\{d^*(\mu-T)/D_u, d^*(T-\mu)/D_l\}$ ,  $D_u = U - T$ ,  $D_l = T - L$ , et  $d^* = \min\{D_u, D_l\}$ . Cependant force est de constater que seuls les indices  $C_p$ ,  $C_{pk}$ ,  $C_{pm}$ , et éventuellement  $C_{pmk}$  sont utilisés par les industriels. La principale raison en est l'absence de connaissances concernant les relations liant indices, centrage, et proportion de pièces non conformes. L'objet de cet exposé est de résumer les résultats obtenus par Grau (2009) concernant ces liens, et de mettre en évidence l'apport de ces résultats par rapport aux connaissances actuelles.

## 2. Résultat préliminaire

Notons  $\lambda = (\mu - T)/d$  et  $\delta = (T - m)/d$ , les quantités permettant de tenir compte des déviations de la moyenne et de la position de la cible  $T$  dans l'intervalle de tolérance. Seules les valeurs positives de  $C_p''(u,v)$  ont un intérêt pratique. Dans ces conditions, pour une valeur donnée de  $C_p''(u,v)$ , Chen et Pearn (2001) donnent une relation définissant le domaine de variation de la moyenne du processus. Avec nos notations cette relation peut s'exprimer sous la forme

$$-\frac{1+\delta}{(3C_p''(u,v)\sqrt{vd}/(1-|\delta|)+u)} = \lambda_{\min} < \lambda < \lambda_{\max} = \frac{1-\delta}{(3C_p''(u,v)\sqrt{vd}/(1-|\delta|)+u)}, \quad (2)$$

où  $\lambda_{\min} = -\infty$  et  $\lambda_{\max} = +\infty$  lorsque  $(u,v) = (0,0)$ .

La relation (1) montre que  $C_p''(u,v)$  s'écrit différemment suivant le signe de  $\mu - T$ . En conséquence, pour  $C_p''(u,v)$  fixé, la relation (1) permet d'exprimer  $\sigma$  de façon différente suivant les valeurs de  $\lambda$  de la manière suivante:

$$\sigma = \begin{cases} \sigma_u(\lambda) = d \left( (1-|\delta|)^2 (1-u\lambda/(1-\delta))^2 / (3C_p''(u,v))^2 - v(\lambda/(1-\delta))^2 \right)^{1/2} & \text{si } 0 \leq \lambda < \lambda_{\max} \\ \sigma_l(\lambda) = d \left( (1-|\delta|)^2 (1+u\lambda/(1+\delta))^2 / (3C_p''(u,v))^2 - v(\lambda/(1+\delta))^2 \right)^{1/2} & \text{si } \lambda_{\min} < \lambda \leq 0 \end{cases}$$

Considérant que la variable d'intérêt est normale, la proportion de pièces conformes que nous notons  $F$ , est égale à  $F(\mu) = P(X \in [L; U]) = \Phi((U - \mu)/\sigma) - \Phi((L - \mu)/\sigma)$ . Puisque  $\mu$  s'exprime en fonction de  $\lambda$  et que l'expression de  $\sigma$  dépend du signe de  $\lambda$ , nous obtenons

$$F(\lambda) = \begin{cases} F_u(\lambda) = \Phi(d(1-\delta-\lambda)/\sigma_u(\lambda)) - \Phi(-d(1+\delta+\lambda)/\sigma_u(\lambda)) & \text{si } 0 \leq \lambda < \lambda_{\max} \\ F_l(\lambda) = \Phi(d(1-\delta-\lambda)/\sigma_l(\lambda)) - \Phi(-d(1+\delta+\lambda)/\sigma_l(\lambda)) & \text{si } \lambda_{\min} < \lambda \leq 0 \end{cases}$$

La recherche des extrema de  $F$  nécessite l'étude du signe de sa dérivée qui est donné par le lemme suivant (Grau (2009)) :

### Lemme :

a) Si  $(u,v) \neq (0,0)$ , alors  $F_u'(\lambda)$  a le signe de

$$Q_u(\lambda) = q_u(\lambda) + v\lambda d^2 / (1-\delta)^2 - (k_u(\lambda) + (\delta + \lambda)q_u(\lambda) + \delta v\lambda d^2 / (1-\delta)^2) \tanh(d^2(\delta + \lambda)/\sigma_u^2(\lambda)),$$

où  $k_u(\lambda) = d^{*2}(1-u\lambda/(1-\delta))^2 / (3C_p''(u,v))^2$ ,

et  $q_u(\lambda) = ud^{*2}(1-u\lambda/(1-\delta))/(1-\delta)(3C_p''(u,v))^2$ .

b) Si  $(u,v) \neq (0,0)$ , alors  $F_l'(\lambda)$  a le signe de

$$Q_l(\lambda) = q_l(\lambda) + v\lambda d^2/(1+\delta)^2 - (k_l(\lambda) + (\delta + \lambda)q_l(\lambda) + \delta v\lambda d^2/(1+\delta)^2) \tanh(d^2(\delta + \lambda)/\sigma_l^2(\lambda))$$

où  $k_l(\lambda) = d^{*2}(1+u\lambda/(1+\delta))^2/(3C_p''(u,v))^2$ ,

et  $q_l(\lambda) = -ud^{*2}(1+u\lambda/(1+\delta))/(1+\delta)(3C_p''(u,v))^2$ .

c) Si  $(u,v) = (0,0)$ , alors  $F'(\lambda) = F_u'(\lambda) = F_l'(\lambda)$  a le signe de

$$Q(\lambda) = -\sinh\left((3C_p''(u,v))^2(\delta + \lambda)/(1-|\delta|)^2\right).$$

### 3. Indices de capabilité et pourcentage de pièces non conformes.

Le lemme précédent permet de rechercher les zéros de  $F'$  sur l'intervalle  $[\lambda_{\min}; \lambda_{\max}]$ . L'étude nécessite de distinguer différents cas suivant les valeurs de  $u$  et  $v$ . Les minorants et majorants obtenus (Grau (2009)) sont résumés dans le tableau 1:

	$v = 0$	$v > 0$
$u = 0$	$m_1 \leq NC \leq 1$	$C_p''(0,v) > C_2$ , alors $0 \leq NC \leq M_2$ $0 < C_p''(0,v) < C_2$ , alors $m_7 \leq NC \leq 1$ $C_p''(0,v) = C_2$ , alors $m_4 \leq NC \leq M_3$
$0 < u < 1$	$m_2 \leq NC \leq 1$	$C_p''(u,v) > \max(C_1, C_2)$ , alors $0 \leq NC \leq M_2$ $0 < C_p''(u,v) < C_2$ , alors $m_6 \leq NC \leq 1$ $C_2 < C_p''(u,v) \leq C_1$ , alors $0 \leq NC \leq M_4$ $C_p''(u,v) = C_2 < C_1$ , alors $m_5 \leq NC \leq M_5$ $C_1 < C_2 = C_p''(u,v)$ , alors $m_5 \leq NC \leq M_6$
$u = 1$	$m_3 \leq NC \leq M_1$	$0 \leq NC \leq M_1$
$u > 1$	$0 \leq NC \leq M_1$	

Tableau 1. Existence de majorants et de minorants pour  $NC$ .

Dans le tableau 1,  $C_1 = \frac{1-|\delta|}{3} \sqrt{\frac{1}{|\delta|} \tanh^{-1}\left(\frac{u}{1-|\delta|(1-u)}\right)}$ ,  $C_2 = \frac{(1-u)(1-|\delta|)}{3\sqrt{v}}$ , et les majorants et

minorants sont définis ci-dessous. Pour le cas  $0 \leq u < 1$  et  $v > 0$ , les quantités  $\lambda_l$ ,  $\lambda_u$ , et  $\lambda_0$  apparaissant dans les expressions de ces extrema ne peuvent être déterminées analytiquement, mais peuvent être obtenues numériquement comme solution des équations  $Q_l(\lambda_l) = 0$ ,  $Q_u(\lambda_u) = 0$ , lorsque  $\delta \neq 0$ , et  $Q_l(\lambda_0) = Q_u(\lambda_0) = 0$  lorsque  $\delta = 0$ .

$$\bullet M_1 = 1 - F(0) = \Phi\left(-3C_p''(u,v)\right) + \Phi\left(-3C_p''(u,v)(1+|\delta|)/(1-|\delta|)\right)$$

$$\bullet M_2 = \begin{cases} 1 - F_u(\lambda_u) & \text{si } \delta > 0 \\ 1 - F_l(\lambda_l) & \text{si } \delta < 0 \\ \max(1 - F(\lambda_0), M_1) & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$$

$$\bullet M_3 = \begin{cases} \max(1 - F_u(\lambda_u), 1/2) & \text{si } \delta > 0 \\ \max(1 - F_l(\lambda_l), 1/2) & \text{si } \delta < 0 \\ \max(M_1, 1/2) & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$$

$$\bullet M_4 = \begin{cases} \max(1 - F_u(\lambda_u), M_1) & \text{si } \delta > 0 \\ \max(1 - F_l(\lambda_l), M_1) & \text{si } \delta < 0 \\ \max(1 - F(\lambda_0), M_1) & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$$

$$\bullet M_5 = \max(1/2, M_1).$$

$$\bullet M_6 = \begin{cases} \max(1/2, 1 - F_u(\lambda_u)) & \text{si } \delta \neq 0 \\ \max(1/2, M_1) & \text{si } \delta = 0 \end{cases} \quad \bullet m_1 = 2\Phi(-3C_p''/(1-|\delta|)).$$

$$\bullet m_2 = \begin{cases} \begin{cases} P_1 & \text{si } C_p''(u,0) \geq C_1 \\ \min(P_1, P_2) & \text{si } C_p''(u,0) < C_1 \end{cases} & \text{pour } \delta > 0 \\ P_0 & \text{pour } \delta = 0, \text{ où} \\ \begin{cases} P_2 & \text{si } C_p''(u,0) \geq C_1 \\ \min(P_1, P_2) & \text{si } C_p''(u,0) < C_1 \end{cases} & \text{pour } \delta < 0 \end{cases}$$

$$P_1 = \Phi\left(3C_p''(u,0) \frac{\lambda_{u1} + |\delta| - 1}{(1-|\delta|)(1+u\lambda_{u1}/(1+|\delta|))}\right) + \Phi\left(-3C_p''(u,0) \frac{\lambda_{u1} + |\delta| + 1}{(1-|\delta|)(1+u\lambda_{u1}/(1+|\delta|))}\right),$$

$$P_2 = \Phi\left(3C_p''(u,0) \frac{\lambda_{u1} + |\delta| - 1}{(1-|\delta|)(1-u\lambda_{u1}/(1-|\delta|))}\right) + \Phi\left(-3C_p''(u,0) \frac{\lambda_{u1} + |\delta| + 1}{(1-|\delta|)(1-u\lambda_{u1}/(1-|\delta|))}\right),$$

$$\lambda_{u1} = -\frac{1+|\delta|}{u} - (3C_p''(u,0))^2 \frac{1 - \sqrt{1 + 2 \frac{u(1+|\delta|(1-u))}{(3C_p''(u,0))^2} \left(\frac{1-|\delta|}{1+|\delta|}\right)^2 \ln\left(\frac{1+u(1-|\delta|)/(1+|\delta|)}{1-u}\right)}}{u^2 \left(\frac{1-|\delta|}{1+|\delta|}\right)^2 \ln\left(\frac{1+u(1-|\delta|)/(1+|\delta|)}{1-u}\right)},$$

$$\lambda_{u1} = \frac{1-|\delta|}{u} + (3C_p''(u,0))^2 \frac{1 - \sqrt{1 + 2 \frac{u(1+|\delta|(u-1))}{(3C_p''(u,0))^2} \ln\left(\frac{1+u(1+|\delta|)/(1-|\delta|)}{1-u}\right)}}{u^2 \ln\left(\frac{1+u(1+|\delta|)/(1-|\delta|)}{1-u}\right)},$$

$P_0 = P_1(\lambda_{u1}) = P_2(\lambda_{u1})$ , et  $\lambda_0 = \lambda_{u1} = -\lambda_{l1}$ , lorsque  $\delta = 0$ .

$$\bullet m_3 = \Phi(-3C_{pk}''(1+|\delta|)/(1-|\delta|)).$$

$$\bullet m_4 = \begin{cases} 1 - F_l(\lambda_l) & \text{si } \delta > 0 \\ 1 - F_u(\lambda_u) & \text{si } \delta < 0 \\ \min(1 - F(\lambda_0), M_1) & \text{si } \delta = 0 \end{cases} \quad \bullet m_5 = \begin{cases} 1 - F_l(\lambda_l) & \text{si } \delta > 0 \\ 1 - F_u(\lambda_u) & \text{si } \delta < 0 \\ 1 - F(\lambda_0) & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$$

$$\bullet m_6 = \begin{cases} \min(1 - F_l(\lambda_l), 1 - F_u(\lambda_u)) & \text{si } \delta \neq 0 \\ 1 - F(\lambda_0) & \text{si } \delta = 0 \end{cases} \quad \bullet m_7 = \begin{cases} \min(1 - F_l(\lambda_l), 1 - F_u(\lambda_u)) & \text{si } \delta \neq 0 \\ \min(1 - F(\lambda_0), M_1) & \text{si } \delta = 0 \end{cases}$$

### 3. Apport par rapport aux connaissances actuelles.

#### 3.1 Cas des tolérances symétriques

Les travaux les plus nombreux concernent la situation où les tolérances sont symétriques, ce qui est le plus usuel dans le milieu industriel. Dans ce cas, nous avons  $\delta = 0$ , et  $F_u(\lambda) = F_l(-\lambda)$ .

Pour  $C_p$ , nous obtenons  $m_1 = 2\Phi(-3C_p)$ , qui est le minorant donné par Juran, Gryna and Bingham (1974).

Pour  $C_{pk}$ , nous obtenons  $m_3 = \Phi(-3C_{pk})$  et  $M_1 = 2\Phi(-3C_{pk})$ , qui sont les bornes données par Boyles (1991).

Pour  $C_{pm}$ , avec les hypothèses  $\delta = 0$  et  $(u, v) = (0, 1)$ , Ruczinski (1996) montre que pour  $0 < C_{pm} \leq 1/3$  et  $C_{pm} \geq 1/\sqrt{3}$ ,  $\lambda_u = 0$  donne un extremum global, tandis que pour

$1/3 < C_{pm} < 1/\sqrt{3}$ ,  $\lambda_u = 0$  donne un extremum local. Or pour  $\lambda_u = 0$ , nous avons  $1 - F_u(0) = M_1 = 2\Phi(-3C_{pm})$ , et dans le cas particulier où  $C_{pm} = 1/3$ ,  $M_1 = 2\Phi(-1) < 1/2$ . Nous obtenons donc des résultats identiques à ceux de Ruczinski, avec

$$m_7 = 2\Phi(-3C_{pm}), m_4 = 2\Phi(-1), M_3 = 1/2, \text{ et } M_2 = \begin{cases} 1 - F(\lambda_0) & \text{si } 1/3 < C_{pm} < 1/\sqrt{3} \\ 2\Phi(-3C_{pm}) & \text{si } C_{pm} > 1/\sqrt{3} \end{cases}.$$

Pour  $C_{pmk}$ , nous obtenons  $M_1 = 2\Phi(-3C_{pmk})$  qui est le majorant donné par Boyles (1994).

Les quatre indices précédents ont été généralisés par Vänmann (1995) avec l'indice  $C_p(u, v)$ . Kotz and Lovelace (1998, p.184) indiquent que  $NC \leq 2\Phi(-3C_p(u, v)) = M_1$  pour toutes valeurs de  $u$  et  $v$ . Les résultats que nous obtenons montrent que ceci n'est exact que pour  $u \geq 1$ .

### 3.2 Cas des tolérances asymétriques

Pour  $C_{pk}''$ , à partir d'un constat graphique, Pearn et Chen (1998) montrent que  $NC \leq 2\Phi(-3C_{pk}'')$ , ce qui n'est pas en accord avec nos résultats. Cependant en 2004, Pearn, Lin et Chen (2004) expriment le majorant de  $NC$  sous la forme  $2 - [\Phi(3C_{pk}'' / \min\{1, r\}) + \Phi(3C_{pk}'' \max\{1, r\})]$ , où  $r = D_l / D_u$ . En constatant que  $r = (1 + \delta) / (1 - \delta)$ , on retrouve l'expression de notre majorant  $M_1$ .

Pour  $C_{pmk}''$ , Pearn, Lin et Chen (1999) montrent que  $NC \leq 2\Phi(-3C_{pmk}'')$  après avoir posé sans démonstration que  $C_{pmk}'' \leq C_{pmk}$ . Malheureusement des contre-exemples à cette assertion peuvent être trouvés. Cependant nos résultats montrent que la proposition de Pearn, Lin et Chen (1999), si elle ne donne pas le meilleur majorant, est cependant exacte puisque  $M_1 \leq 2\Phi(-3C_{pmk}'')$ .

De façon plus générale, Chen et Pearn (2001) proposent la famille d'indices  $C_p''(u, v)$ . A partir d'un constat graphique, ces auteurs montrent que  $NC \leq 2\Phi(-3C_p''(u, v))$ . Là encore, il est possible de trouver des contre-exemples à leur constat graphique. Nos résultats montrent que, bien que le majorant proposé par ces auteurs ne soit pas le meilleur, leur résultat est exact lorsque  $u \geq 1$ , puisque  $M_1 \leq 2\Phi(-3C_p''(u, v))$ .

## 4. Exemple

Une compagnie du groupe Toyal produit de la pâte d'aluminium utilisée pour la fabrication de peintures de haute technologie employée pour les voitures, les téléphones portables, les cosmétiques.... Le procédé de fabrication consiste à broyer la matière première à laquelle est ajouté un lubrifiant. Le résultat de cette opération est ensuite introduit dans un mixer dans lequel est ajouté un solvant pour obtenir le produit final contenant un pourcentage constant de matière non volatile. Un contrôle de qualité est effectué à ce stade de la production. Il concerne le pourcentage non volatile qui doit être égal à 67 (cible). Dans cette profession les tolérances usuelles sont situées à  $\pm 1$ , mais sont difficiles à tenir pour ce type de produit. Les valeurs basses étant plus préjudiciables à l'utilisateur, les tolérances ont été fixées à 66 et 69. Nous avons  $m = 67,5$ ,  $d = 1,5$ , et  $\delta = (T - m) / d = 1/3$ . Supposons que l'utilisateur désire choisir dans la famille  $C_p''(u, v)$ , le couple  $(u, v)$  lui permettant de considérer comme capable un processus produisant moins de 1500 pièces non conformes par million (ppm), et dont la moyenne du processus ne s'éloigne pas de plus de 20% de la distance entre la cible et les bornes. D'autre part, pour que l'interprétation soit simple, le processus est considéré comme capable dès que l'indice utilisé prend une valeur supérieure ou égale à 1. Pour limiter la recherche nous faisons varier  $u$  et  $v$  par pas de 0,1. Pour  $C_p''(u, v) = 1$ , les bornes supérieures obtenues dans le tableau 1 permettent de trouver les couples  $(u, v)$  se rapprochant au mieux d'une valeur maximale de  $NC$  égale à 1500 ppm. D'après la relation (2) nous avons

$-KD_l < \mu - T < KD_u$  où  $K = \left(3\sqrt{v}C_p''(u,v)/(1-|\delta|) + u\right)^{-1}$ . Si nous désirons que la moyenne du processus ne s'éloigne pas de plus de 20% de la distance entre la cible et les bornes, il faut que  $K = 0,2$ . Le tableau 2 montre la valeur de  $K$  pour les couples  $(u,v)$  donnant une valeur maximale de  $NC$  proche de 1500 ppm, lorsque  $C_p''(u,v) = 1$ . Nous en déduisons que l'indice répondant aux mieux à nos objectifs est l'indice  $C_p''(0.3,1.1)$ .

$(u,v)$	(0,2.3)	(0.1,1.9)	(0.2,1.5)	(0.3,1.1)	(0.4,0.8)	(0.5,0.6)	(0.6,0.4)	(0.7,0.2)	(0.8,0.1)
Borne supérieure de $NC$ (ppm)	1501	1497	1498	1504	1506	1494	1488	1506	1488
$K$ (%)	14.7	15.9	17.5	19.9	22.6	25.1	29.0	36.9	45.0

Tableau 2. Valeurs de la borne supérieure de  $NC$  et  $K$ , pour  $C_p''(u,v) = 1$ .

## 5. Conclusion

La famille d'indices  $C_p''(u,v)$  proposée par Chen et Pearn (2001), si elle est d'un grand intérêt en terme de généralisation, n'est actuellement pas utilisée, ni par les praticiens, ni par les logiciels de qualité, en dehors des cas particuliers usuels  $C_p$ ,  $C_{pk}$ , et  $C_{pmk}$ . Ceci n'est guère surprenant dans la mesure où la valeur numérique prise par l'indice ne leur permettait pas de comprendre sa signification. L'étude précédente montre quels sont les liens existant entre l'indice et la proportion de pièces non conformes. La possibilité d'associer un pourcentage maximal de pièces non conformes et une déviation maximale du processus à une valeur de l'indice permet ainsi à l'utilisateur de faire un choix conforme à des objectifs compréhensibles.

## Bibliographie

- [1] Chen, K. S. et Pearn, W. L. (2001). Capability indices for processes with asymmetric tolerances, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 24(15), 559–568.
- [2] Boyles, R. A. (1991). The Taguchi capability index. *Journal of Quality Technology*, 23(1), 17–26.
- [3] Boyles, R. A. (1994). Process capability with asymmetric tolerances. *Communications in Statistics- Simulation and Computation*, 23(5), 615–643.
- [4] Grau, D. (2009). Process yield and capability indices. *Pré-publication du Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau*, Hal-00428966.
- [5] Juran, J. M., Gryna, F. M., and Bingham, R.S. (1974). *Quality Control Handbook*. New York: McGraw-Hill.
- [6] Kotz, S., and Lovelace, C. R. (1998). *Process capability indices in theory and practice*. London, U.K: Arnold.
- [7] Pearn, W. L., and Chen, K. S. (1998). New generalizations of the process capability index  $C_{pk}$ . *Journal of Applied Statistics*, 25(6), 801–810.
- [8] Pearn, W. L., Lin, P. C., and Chen, K. S. (1999). On the generalizations of the capability index  $C_{pmk}$  for asymmetric tolerances. *Far East Journal of Theoretical Statistics*, 3(2), 49–66.
- [9] Pearn, W. L., Lin, P. C., and Chen, K. S. (2004). The  $C_{pk}''$  index for asymmetric tolerances: Implications and inference. *Metrika*, 60, 119–136.
- [10] Ruczinski, I. (1996). The relation between  $C_{pm}$  and the degree of inclusion. *Doctoral Dissertation*, Univ. Wurzburg, Germany.
- [11] Vännman, K. (1995). A unified approach to capability indices, *Statistica Sinica*, 5, 805–820.