



# Régression semi-paramétrique de variables explicatives de dénombrement

Belkacem Abdous, Célestin Kokonendji, Tristan Senga Kiessé

► **To cite this version:**

Belkacem Abdous, Célestin Kokonendji, Tristan Senga Kiessé. Régression semi-paramétrique de variables explicatives de dénombrement. 42èmes Journées de Statistique, 2010, Marseille, France, France. 2010. <inria-00494697>

**HAL Id: inria-00494697**

**<https://hal.inria.fr/inria-00494697>**

Submitted on 24 Jun 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# REGRESSION SEMI-PARAMÉTRIQUE DE VARIABLES EXPLICATIVES DE DÉNOMBREMENT

Belkacem Abdous

*Université Laval, Médecine Sociale et Préventive  
Québec, Canada G1K 7P4  
Email : belkacem.abdous@msp.ulaval.ca*

Célestin C. Kokonendji

*Université de Franche-Comté, UFR Sciences et Techniques  
Laboratoire de Mathématiques de Besançon - UMR 6623 CNRS  
16 route de Gray – 25030 Besançon cedex, France  
Email : celestin.kokonendji@univ-fcomte.fr*

Tristan Senga Kiessé

*Laboratoire Central des Ponts et Chaussées  
Division ESAR – Section AGR  
Route de Bouaye – BP 4129 – 44341 Bouguenais cedex, France  
Email : tristan.senga-kiesse@lcpc.fr*

**RÉSUMÉ** : Dans cette communication, nous proposons un estimateur semi-paramétrique d'une fonction discrète de régression. Nous combinons une approche paramétrique et une non-paramétrique pure qui met en oeuvre la méthode des noyaux associés discrets. Le nouvel estimateur semi-paramétrique discret de régression possède un biais qui peut être inférieur à celui de l'estimateur purement non-paramétrique discret de régression et une même variance que ce dernier.

**ABSTRACT**: We propose a semiparametric estimator for a count regression function. We combine a parametric approach and a pure nonparametric one which is realized by using discrete associated-kernel method. The new semiparametric count regression estimator can reduce the bias with respect to purely nonparametric count regression estimator, without affecting the variance.

**Mots clés** : Estimateur à noyau associé discret ; régression non-paramétrique

Dans ce travail, nous partons de la décomposition d'une fonction discrète de régression  $m : \mathbb{N}^d \rightarrow \mathbb{R}$  comme le produit

$$\begin{aligned} m(x) &= r(x; \beta)\omega(x) \\ &=: m_\omega(x; \beta), \quad \forall x \in \mathbb{N}^d. \end{aligned} \tag{1}$$

La fonction  $r(x; \beta)$  de (1) est la partie paramétrique de paramètre  $\beta$  et la fonction  $\omega(x)$  de (1) est la partie non-paramétrique sur  $\mathbb{N}^d$ . Pour construire un estimateur semi-paramétrique  $\hat{m}$  de  $m$  en (1), l'idée est d'abord de déterminer une estimation paramétrique  $\hat{r}$  de la fonction  $r$  puis de corriger en multipliant par une estimation entièrement non-paramétrique de  $\omega = m/\hat{r}$  ; voir, Kokonendji *et al.* (2009a), pour l'estimation semi-paramétrique de distribution de données de dénombrement.

Tout d'abord, l'estimateur non-paramétrique d'une fonction de régression  $m(x)$  sur  $\mathbb{N}^d$  avec  $d = 1$  a été défini par Kokonendji *et al.* (2009b) sur le modèle de celui de Nadaraya-Watson comme suit :

$$\tilde{m}_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{Y_i K_{x,h}(X_i)}{\sum_{j=1}^n K_{x,h}(X_j)}, \quad x \in \mathbb{N}, \quad (2)$$

avec  $Y_i$  la variable aléatoire (v.a.) réelle à expliquer,  $X_i$  la variable explicative de dénombrement,  $h = h(n)$  une suite arbitraire de paramètres de lissage satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = 0$  et  $K_{x,h}(\cdot)$  un noyau associé discret (Kokonendji *et al.*, 2007, et Senga Kiessé, 2008) ; la variance  $Var(Y|X = x)$  est finie pour tout  $x \in \mathbb{N}$ . Précisons qu'une fonction noyau associé discret  $K_{x,h}(\cdot)$  est elle même une fonction de masse de probabilité (f.m.p.) sur le support discret  $S_x$  (ne dépendant pas de  $h$ ). En plus, nous imposons les deux conditions suivantes :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{E}(\mathcal{K}_{x,h}) = x \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0} Var(\mathcal{K}_{x,h}) = 0, \quad (3)$$

où  $\mathcal{K}_{x,h}$  est la v.a. discrète de f.m.p.  $K_{x,h}(\cdot)$  ; voir, Abdous et Kokonendji (2009) pour une revue sur les noyaux associés discrets. Les différences finies d'une f.m.p.  $g$  sont telles que, pour  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on ait :

$$g^{(k)}(x) = \{g^{(k-1)}(x)\}^{(1)} \quad \text{et} \quad g^{(1)}(x) = \begin{cases} \{g(x+1) - g(x-1)\}/2 & \text{si } x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ g(1) - g(0) & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (4)$$

De là, la différence finie d'ordre 2 est

$$g^{(2)}(x) = \begin{cases} \{g(x+2) - 2g(x) + g(x-2)\}/4 & \text{si } x \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \\ \{g(3) - 3g(1) + 2g(0)\}/4 & \text{si } x = 1 \\ \{g(2) - 2g(1) + g(0)\}/2 & \text{si } x = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Le résultat suivant présente le biais et la variance asymptotiques de l'estimateur non-paramétrique  $\tilde{m}_n$  de (2).

**Théorème 1** *Soit  $X$  la v.a. discrète de f.m.p. telle que  $f(x) = \Pr(X = x) > 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{N}$  fixé. Soit  $h = h(n)$  une suite de nombres positifs satisfaisant  $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$ . Alors, le biais et la variance de  $\tilde{m}_n(x)$  admettent les expressions suivantes :*

$$\text{biais}\{\tilde{m}_n(x)\} = \left\{ m^{(2)}(x) + 2m^{(1)}(x) \left( \frac{f^{(1)}}{f} \right) (x) \right\} \frac{Var(\mathcal{K}_{x,h})}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) + o(h), \quad (6)$$

$$\text{Var}\{\tilde{m}_n(x)\} = \frac{\text{Var}(Y|X=x)}{nf(x)} \{\Pr(\mathcal{K}_{x,h}=x)\}^2 + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (7)$$

où  $m^{(2)}$ ,  $m^{(1)}$  and  $f^{(1)}$  sont les différences finies définies comme dans (5) et (4).

Ensuite, l'approche non-paramétrique par noyau associé discret appliquée à la fonction discrète  $\omega(x)$  permet de définir l'estimateur semi-paramétrique  $\hat{m}_n$  de  $m$  de la manière suivante :

$$\hat{m}_n(x) = r(x; \hat{\beta}) \sum_{i=1}^n \frac{Y_i K_{x,h}(X_i)}{r(X_i; \hat{\beta}) \sum_{j=1}^n K_{x,h}(X_j)} \quad (8)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{Y_i K_{x,h}(X_i)}{\sum_{j=1}^n K_{x,h}(X_j)} \times \frac{r(x; \hat{\beta})}{r(X_i; \hat{\beta})}, \quad x \in \mathbb{N}, \quad (9)$$

où  $\hat{\beta}$  est l'estimateur de  $\beta$ ,  $h > 0$  est la fenêtre et  $K_{x,h}(\cdot)$  est un noyau associé discret donné. Ainsi, dans le cas où la fonction  $r_0(x) = r(x; \beta_0)$  est fixée, en notant  $m = r_0\omega$  nous formulons le résultat suivant.

**Théorème 2** *Pour tout  $x \in \mathbb{N}$  fixé tel que  $f(x) = \Pr(X=x) > 0$ , soit  $r_0(x) = r(x; \beta_0)$  un départ fixé dans (1). Pour  $n \rightarrow \infty$  et  $h = h(n) \rightarrow 0$ , l'estimateur semi-paramétrique de régression  $\hat{m}_n(x)$  dans (8) possède le biais et la variance suivants :*

$$\text{biais}\{\hat{m}_n(x)\} = \left\{ r_0(x)\omega^{(2)}(x) + 2r_0(x)\omega^{(1)}(x) \left( \frac{f^{(1)}}{f} \right) (x) \right\} \frac{\text{Var}(\mathcal{K}_{x,h})}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) + o(h), \quad (10)$$

$$\text{Var}\{\hat{m}_n(x)\} = \frac{\text{Var}(Y|X=x)}{nf(x)} \{\Pr(\mathcal{K}_{x,h}=x)\}^2 + o\left(\frac{1}{n}\right), \quad (11)$$

où  $\omega^{(2)}$ ,  $\omega^{(1)}$  et  $f^{(1)}$  sont les différences finies définies comme dans (5) et (4).

La comparaison du résultat précédent avec celui correspondant à l'estimateur non-paramétrique dans le Théorème 1 montre que les variances en (11) et en (7) des deux estimateurs sont égales. Ainsi, le nouvel estimateur  $\hat{m}_n$  en (8) pourrait être plus performant que l'estimateur  $\tilde{m}_n$  en (2) selon la valeur de leur biais respectif en (10) et en (6). Pour un noyau associé discret choisi, la comparaison provient des termes des différences finies d'ordre  $k$  présents dans les expressions (10) et (6) ; en effet, selon le départ  $r_0$  fixé, on a :

$$m^{(1)} = (r_0\omega)^{(1)} = r_0\omega^{(1)} + r_0^{(1)}\omega \leq r_0\omega^{(1)} \text{ et}$$

$$m^{(2)} = (r_0\omega)^{(2)} = r_0\omega^{(2)} + 2r_0^{(1)}\omega^{(1)} + r_0^{(2)}\omega \leq r_0\omega^{(2)},$$

où le symbole  $\leq$  signifie  $\leq$  ou  $\geq$ .

Un résultat similaire au Théorème 2 se formule dans le cas général où le départ n'est pas fixé. Pour cela, la fonction  $r(x; \beta_0)$  est déterminée comme étant la fonction approchant le mieux  $m(x)$  au sens de la distance de Kullback-Leibler.

Enfin, les estimateurs en (8) et en (2) peuvent s'étendre au cas multidimensionnel. Il est alors nécessaire d'utiliser un noyau associé multiplicatif

$$K_{x,h}(X_i) = \prod_{k=1}^d K_{x_k, h_k}^{[k]}(X_{ik}),$$

avec  $x = (x_1, \dots, x_d)^T$ ,  $h = (h_1, \dots, h_d)^T$ ,  $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})^T$  et  $K_{x_k, h_k}^{[k]}(\cdot)$  un noyau associé univarié satisfaisant (3) pour tout  $k = 1, \dots, d$ . Il faut aussi utiliser les versions multidimensionnelles des fonctions  $m(\cdot)$ ,  $r(\cdot; \beta)$  et  $\omega(\cdot)$  avec les dérivées partielles correspondantes. Il s'en suit la formulation des différents résultats présentés dans le cas multivarié.

## Bibliographie

- [1] Abdous, B., Kokonendji, C.C. (2009). Consistency and asymptotic normality for discrete associated-kernel estimator. *African Diaspora Journal of Mathematics* 8, 63–70.
- [2] Kokonendji, C.C., Senga Kiessé, T., Balakrishnan, N. (2009a). Semiparametric estimation for count data through weighted distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference* 139, 3625–3638.
- [3] Kokonendji, C.C., Senga Kiessé, T., Demétrio, C.G.B. (2009b). Appropriate kernel regression on a count explanatory variable and applications. *Advances and Applications in Statistics* 12, 99–126.
- [4] Kokonendji, C.C., Senga Kiessé, T. et Zocchi, S.S. (2007). Discrete triangular distributions and non-parametric estimation for probability mass function. *Journal of Non-parametric Statistics* 19, 241–254.
- [5] Senga Kiessé, T. (2008). Approche non-paramétrique par noyaux associés discrets des données de dénombrement. Thèse de Doctorat de Statistique de l'Université de Pau. URL <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00372180/fr/>