

Estimation du paramètre de longue mémoire de séries temporelles non linéaires

Marianne Clausel, François Roueff, Murad Taqqu, Ciprian Tudor

► **To cite this version:**

Marianne Clausel, François Roueff, Murad Taqqu, Ciprian Tudor. Estimation du paramètre de longue mémoire de séries temporelles non linéaires. 42èmes Journées de Statistique, 2010, Marseille, France, France. 2010. <inria-00494760>

HAL Id: inria-00494760

<https://hal.inria.fr/inria-00494760>

Submitted on 24 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ESTIMATION DU PARAMÈTRE DE LONGUE MÉMOIRE DE SÉRIES TEMPORELLES DANS LE CAS NON-LINÉAIRE.

Marianne Clausel & François Roueff & Ciprian Tudor & Murad S. Taquu

Marianne Clausel : Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, UMR 8050 du CNRS, Université Paris Est, 61, Avenue du Général de Gaulle, 94010 Créteil Cedex, France.

Email: clausel@univ-paris12.fr

François Roueff : Laboratoire Traitement et Communication de l'Information, UMR 5141 du CNRS, TELECOM ParisTech, 46, rue Barrault, 75634 Paris Cedex 13, France. Email:

roueff@telecom-paristech.fr

Ciprian Tudor : Laboratoire Paul Painlevé, UMR 8524 du CNRS, Université Lille 1, 59655 Villeneuve d'Ascq, France.

Email: Ciprian.Tudor@math.univ-lille1.fr

Murad S. Taquu : Department of Mathematics and Statistics, Boston University, Boston, MA 02215, USA.

Email: murad@math.bu.edu

Résumé

Soit $X = (X_k)$ une série temporelle non nécessairement stationnaire. Le processus différences finies d'ordre 1 de X est $[\Delta X]_k = X_k - X_{k-1}$, $\Delta^K X$ est alors défini par récurrence. On dit que la série temporelle X a pour paramètre de longue mémoire $d \in \mathbb{R}$ si pour tout entier $K > d - 1/2$ le processus $[\Delta^K X]$ est stationnaire au second ordre de densité spectrale $f_{\Delta^K X}$ avec

$$f_{\Delta^K X} = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} f_{\Delta^K X}^*(\lambda)$$

où $f_{\Delta^K X}^*$ est paire et bornée sur $(-\pi, \pi)$.

Différentes méthodes d'estimation du paramètre de longue mémoire ont été proposées. On s'intéresse ici aux méthodes basées sur l'utilisation des ondelettes et on considère l'estimateur introduit par Abry et Veitch (1998), basé sur une régression linéaire des coefficients d'ondelettes. Une justification rigoureuse de cette démarche a tout d'abord été proposée dans le cas paramétrique par Bardet et al.(2002), dans un cadre semi-paramétrique par Bardet and al.(2000) pour un processus gaussien observé en temps continu et dans le cas des séries temporelles gaussiennes, puis linéaires par Moulines, Roueff et Taquu (2007). Moulines, Roueff et Taquu (2007) ont montré que sous certaines conditions l'estimateur est consistant et asymptotiquement gaussien, et que le taux de convergence est optimal.

Une question assez naturelle est alors de savoir dans quelle mesure ces résultats peuvent être étendus à un cadre non gaussien et non linéaire. Un premier pas dans cette direction a été effectué par Bardet et Tudor (2009) qui ont étudié le cas du processus de Rosenblatt en utilisant des techniques de calcul stochastique. Bardet et Tudor (2009) ont ainsi étudié le comportement asymptotique des statistiques basées sur les coefficients d'ondelettes. Ils ont ainsi montré que dans le cas du processus de Rosenblatt, la variance empirique des coefficients d'ondelettes vérifiait un non-théorème central limite bien qu'une partie ait une limite gaussienne. Ces auteurs en déduisent alors une construction d'un estimateur du paramètre d'autosimilarité-lié au paramètre de longue mémoire du processus de Rosenblatt.

Ici on généralise cette démarche en considérant une série temporelle de la forme $G(X)$ où $G \in L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2/2} dx)$ et X est une série temporelle gaussienne. En utilisant la décomposition en chaos de Wiener du processus, nous étendons les résultats existants. Nous montrons notamment que différents comportements peuvent se produire selon le rang de Hermite de la fonction Hermite G considérée mais aussi les coefficients de G dans sa décomposition en série de Hermite. Nous illustrons ces différents comportements par des exemples montrant que suivant les cas le comportement asymptotique de l'estimateur peut être assez proche ou non de ce qui est connu dans le cas gaussien.

Abstract

Let $X = (X_k)$ be a real valued process not necessary stationary. The first-order difference is $[\Delta X]_k = X_k - X_{k-1}$ and $\Delta^K X$ is defined recursively. The time series X is said to have memory parameter $d \in \mathbb{R}$ if for any integer $K > d - 1/2$ the process $[\Delta^K X]$ is weakly stationary with spectral density function $f_{\Delta^K X}$

$$f_{\Delta^K X} = |1 - e^{-i\lambda}|^{-2d} f_{\Delta^K X}^*(\lambda)$$

where $f_{\Delta^K X}^*$ is symmetric, bounded on $(-\pi, \pi)$.

Several methods of estimation of the long-memory parameter have been proposed. We focus on wavelet methods and consider the regression estimator introduced in Abry and Veitch (1998), which involves estimating d using the slope of the regression of the logarithm of the scale spectrum on the scale index. A rigorous asymptotic theory of the regression estimator has first been proposed in the parametric case by Bardet and al.(2002) and in a semi-parametric framework by Bardet and al.(2000) for a Gaussian process observed in continuous time, and in the case of Gaussian and linear time series by Moulines, Roueff and Taqqu (2007). Moulines, Roueff and Taqqu (2007) have proved that under suitable conditions, this estimator is consistent, the convergence rate is optimal and it is asymptotically normal. A quite natural question is then to wonder at what point

these results can be extended to non-Gaussian and non-linear cases.

A first step in this direction has been done by Bardet and Tudor (2009) who investigated the case of the Rosenblatt process using stochastic calculus technics. Bardet and Tudor (2009) studied the asymptotic behavior of the statistics based on the wavelet coefficients of these processes. They proved that, in the Rosenblatt process case, the empirical variance of the wavelet coefficients satisfy a non-central limit theorem although a part of it converges to a Gaussian limit. Estimators for the self-similarity index-related to long-memory parameter of the Rosenblatt process-are then constructed.

Here we generalize this approach considering a time series of the form $G(X)$ where $G \in L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2/2}dx)$ and X is a Gaussian series. Using Wiener chaos expansion of the process and stochastic calculus, we extend the already existent framework. We proved that several phenomena can occur depending both on the Hermite rank of function G and the coefficients of function G in Hermite polynomial expansion. We then give several examples where the asymptotic behavior can be quite similar to the Gaussian case or completely different.

Mots clés Ondelettes; paramètre de longue mémoire; estimation semi-paramétrique; intégrales de Wiener multiple; décomposition en chaos de Wiener.

Keywords Wavelets; long-memory parameter; semi-parametric framework; multiples Wiener integrals; Wiener chaos expansion.

Bibliographie

- [1] Abry, P. et Veitch, D. (1998) *Wavelet analysis of long-range-dependent traffic* IEEE Trans. Inform. Theory, 44(1) :2–15. ISSN 0018-9448.
- [2] Bardet, J.M. (2002) *Statistical study of the wavelet analysis of fractional Brownian motion*. IEEE Trans. Inform. Theory, 48(4) : 991–999. ISSN 0018- 9448.
- [3] Bardet, J.M., Lang, G., Moulines, E., et Soulier, P. (2000) *Wavelet estimator of long-range dependent processes*. Stat. Inference Stoch. Process., 3(1-2) : 85–99, ISSN 1387-0874. 19th Rencontres Franco-Belges de Statisticiens (Marseille, 1998).
- [4] Bardet, J.M. et Tudor., C. (2009) *A wavelet analysis of the rosenblatt process : chaos expansion and estimation of the self-similarity parameter*. Submitted.
- [5] Moulines, E., Priouret, P. et Roueff, F. (2005) *On recursive estimation for time varying autoregressive processes*. Ann. Statist., 33(6) :2610–2654.
- [6] Moulines, E., Roueff, F., et Taqqu, M.S. (2007) *On the spectral density of the wavelet coefficients of long memory time series with applications to the log-regression estimation of the memory parameter* J.Time Ser.Anal., 28(2) :155–187.

- [7] Moulines, E., Roueff, F., et Taqqu, M.S. (2007) *Central limit theorem for the log-regression wavelet estimation of the memory parameter in the Gaussian semi-parametric context* Fractals, 15(4) :301–313.
- [8] Moulines, E., Roueff, F., et Taqqu, M.S. (2008) *A wavelet Whittle estimator of the memory parameter of a non-stationary Gaussian time series* Ann. Statist., 36(4) :1925–1956.