



Efficacité semi paramétrique pour la méthode des moments généralisée

Paul Rochet, Jean-Michel Loubes

► **To cite this version:**

Paul Rochet, Jean-Michel Loubes. Efficacité semi paramétrique pour la méthode des moments généralisée. 42èmes Journées de Statistique, 2010, Marseille, France, France. inria-00494763

HAL Id: inria-00494763

<https://hal.inria.fr/inria-00494763>

Submitted on 24 Jun 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

EFFICACITÉ SEMI PARAMÉTRIQUE POUR LA MÉTHODE DES MOMENTS GÉNÉRALISÉE

Jean-Michel Loubes et Paul Rochet

Université Toulouse III Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 31062 Toulouse

Mots-clés: Modèles semi paramétriques, Problèmes inverses

Summary

The whole theory of efficiency developed in van der Vaart (1998) aims to provide a lower bound for the variance of unbiased estimators of finite dimensional parameters in semi parametric models. We propose to adapt this theory to the method of generalized method of moments (GMM), which can be described as a specific semi parametric model. Then, the objective is to determine the semi parametric efficiency bound in this particular model.

Suppose we observe n independant realizations X_1, \dots, X_n of a random variable with distribution μ , satisfying

$$\int_{\mathcal{X}} \Phi_{\theta_0} d\mu = 0,$$

where Φ_{θ_0} is a vector valued function known up to θ_0 . We want to estimate the unknown parameter θ_0 . This problem has many actual applications, notably in econometry and several methods for estimating θ_0 have been implemented in the literature. One of the most commonly used is the generalized method of moments. Chamberlain (1986) provides a lower bound for the variance of an unbiased estimate of θ_0 in this context. However, it is not clearly pointed out that GMM can be seen as a semi parametric model as defined in van der Vaart (1998), under appropriate settings. Seeing GMM as a semi parametric model provides a new proof of the results of Chamberlain and gives new interpretations of the GMM method.

Recovering the unknown measure μ is a linear inverse problem which can be regularized by GMM. The method consists in replacing in the moment constraint the true measure μ by its empirical approximation μ_n . Then, find the value of θ for which the corresponding vector $\mu_n(\Phi_{\theta}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_{\theta}(X_i)$ is as close as possible to 0 according to a given eucliden norm. So, for M a given symmetric positive-definite matrix, define the corresponding GMM estimator of θ_0 as the minimizer of $\|\mu_n(\Phi_{\theta})\|_M^2 = [\mu_n(\Phi_{\theta})]' M [\mu_n(\Phi_{\theta})]$ as θ ranges over Θ .

The GMM model is defined as the set of all probability measures ν such that the map $\theta \mapsto \|\nu(\Phi_\theta)\|_M^2$ has a minimum. For all element ν of the model, the corresponding parameter is a value of θ for which the minimum is reached. Under regularity conditions on $\theta \mapsto \Phi_\theta$, we show that the value of the parameter is unique for (ν, θ) in a neighborhood of (μ, θ_0) , which enables to recover the framework of van der Vaart.

We then calculate the semi parametric efficiency bound in this model, for a given matrix M . We show that the optimal choice for the matrix M is for $M = [\int \Phi_{\theta_0} \Phi'_{\theta_0} d\mu]^{-1}$, which confirms the result of Hansen (1982). Moreover, the lower bound we obtain by this approach is that of Chamberlain.

Résumé

La théorie de l'efficacité développée dans van der Vaart (1998) a pour but de fournir un minorant pour la variance d'un estimateur sans biais d'un paramètre de dimension finie dans un modèle semi paramétrique. Nous proposons d'adapter cette théorie à la méthode des moments généralisée (GMM en anglais), qui peut être décrite par un modèle semi paramétrique particulier.

On suppose que l'on observe n réalisations indépendantes X_1, \dots, X_n d'un variable aléatoire de loi μ , vérifiant

$$\int \Phi_{\theta_0} d\mu = 0,$$

où $\{\Phi_\theta, \theta \in \Theta\}$ est une famille de fonctions connue. Le but est d'estimer le paramètre inconnu θ_0 . Ce problème a de nombreuses applications en pratique, notamment en économétrie. Plusieurs méthodes de résolution existent, l'une des plus utilisées étant la méthode des moments généralisée. Chamberlain (1986) fournit un minorant de la variance d'un estimateur de θ_0 dans ce contexte. Cependant, le lien avec l'efficacité semi paramétrique au sens de van der Vaart n'est pas mis en évidence. Nous montrons que l'approche de van der Vaart (1998) dans ce modèle précis permet d'apporter une preuve différente à des résultats dus à Chamberlain et Hansen (1982) ainsi que de donner un nouveau point de vue sur cette méthode.

Reconstruire la mesure μ est un problème inverse linéaire qui peut être régularisé par la méthode GMM. La méthode consiste à remplacer dans la contrainte de moments la vraie mesure μ par son approximation empirique μ_n . Puis, on trouve la valeur de θ pour laquelle le vecteur $\mu_n(\Phi_\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Phi_\theta(X_i)$ est aussi proche que possible de 0 pour

une certaine norme euclidienne. Ainsi, pour M une matrice symétrique définie positive, on définit l'estimateur de θ_0 correspondant comme le minimiseur de $\|\mu_n(\Phi_\theta)\|_M^2 = [\mu_n(\Phi_\theta)]'M[\mu_n(\Phi_\theta)]$ quand θ parcourt Θ .

Le modèle GMM est défini comme l'ensemble des mesures de probabilité ν telle que l'application $\theta \mapsto \|\nu(\Phi_\theta)\|_M^2$ admet un minimum. Pour tout élément ν du modèle, le paramètre correspondant est une valeur de θ pour laquelle le minimum est atteint. Sous certaines conditions de régularité sur $\theta \mapsto \Phi_\theta$, on peut montrer que le paramètre est défini de manière unique pour (ν, θ) dans un voisinage de (μ, θ_0) , ce qui permet de retrouver le cadre de van der Vaart.

On calcule alors la borne semi paramétrique dans ce modèle, pour une valeur donnée de M . On montre que le choix optimal pour M est $M = [\int \Phi_{\theta_0} \Phi_{\theta_0}' d\mu]^{-1}$, ce qui confirme le résultat de Hansen (1982). De plus, la borne obtenue par cette approche est celle de Chamberlain.

Bibliographie

- [1] Chamberlain G. (1986) *Asymptotic Efficiency in Estimation with Conditional Moment Restriction*, Journal of Econometrics, University of Wisconsin.
- [2] Hansen (1982) *Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators*, Econometrica, University of Chicago.
- [3] van der Vaart A.W. (1998) *Asymptotic statistics*, Camb. Univ. Press.