



## Optimisation combinatoire

Charles Bordenave

► **To cite this version:**

Charles Bordenave. Optimisation combinatoire. Journées MAS et Journée en l'honneur de Jacques Neveu, Aug 2010, Talence, France. <inria-00496750>

**HAL Id: inria-00496750**

**<https://hal.inria.fr/inria-00496750>**

Submitted on 1 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Optimisation combinatoire

Session organisée par **Charles Bordenave**

La méthode de la cavité en physique statistique a donné un nouvel élan à toute une classe de problèmes sur des structures combinatoires aléatoires. Les premiers succès remontent aux travaux G. Parisi et M. Mézard dans la deuxième moitié des années 80. Il a fallu attendre le début des années 2000, avec notamment les travaux de D. Aldous et M. Talagrand pour avoir les premières confirmations mathématiques de leurs résultats, voir la revue [1]. Depuis, la recherche s'est portée vers des problèmes sur des structures combinatoires plus diluées, comme des graphes avec degrés bornés. Comme en témoigne l'ouvrage de M. Mézard et A. Montanari [2], les prédictions non-rigoureuses ont avancé plus vite que les arguments rigoureux. La compréhension mathématique de la méthode de la cavité est aujourd'hui encore insuffisante et il y a de nombreuses questions à résoudre pour le mathématicien.

### *Références :*

- [1] *The objective method : probabilistic combinatorial optimization and local weak convergence* (2004) D. Aldous and J. M. Steele.. In Probability on discrete structures, volume 110 of Encyclopaedia Math. Sci., pages 1-72. Springer, Berlin.
- [2] *Information, physics, and computation* (2009) M. Mézard et A. Montanari, Oxford University Press, Oxford.

### *Adresse de l'organisateur :*

Charles BORDENAVE  
CNRS & Université de Toulouse  
UMR 5219 Institut de Mathématiques de Toulouse  
118 route de Narbonne  
31062 Toulouse - France  
E-mail : [charles.bordenave@math.univ-toulouse.fr](mailto:charles.bordenave@math.univ-toulouse.fr)  
<<http://www.math.univ-toulouse.fr/~bordenave/>>

Session : Optimisation combinatoire

## **Problèmes aléatoires de satisfaction de contraintes : approches et résultats de la physique statistique**

par **Guilhem Semerjian**

Dans les années 90 des simulations numériques ont révélées des propriétés intéressantes dans les ensembles aléatoires d'instances de problèmes de satisfaction de contraintes (satisfiabilité, coloriage de graphes notamment). Quand un paramètre définissant l'ensemble aléatoire (le nombre de clauses par variables) augmente la probabilité de trouver une formule satisfiable chute abruptement de 1 à 0 dans la limite des grandes tailles de formule. Ce phénomène de seuil a été l'objet d'actives recherches en informatique et en probabilités. Par ailleurs des outils (non-rigoureux) de physique statistique ont pu être appliqués à ces problèmes. Un certain nombre de résultats ont émergé de ces études, par exemple des conjectures quantitatives sur la valeur du seuil de satisfiabilité, et une image plus précise de la structure de l'ensemble des solutions des formules satisfiables. D'autres résultats de physique statistique ont un aspect plus algorithmique, que ce soit l'analyse d'algorithmes déjà existants ou la suggestion de nouvelles stratégies pour résoudre ces formules aléatoires. Dans cet exposé j'essaierai de présenter, sans rentrer dans les détails techniques, le cadre général de ces études et certains de ces résultats.

*Adresse :*

Guilhem SEMERJIAN

École Normale Supérieure

Laboratoire de Physique Théorique

Département de Physique - École Normale Supérieure

24, rue Lhomond 75230 Paris Cedex 05 - France

E-mail : [guilhem@lpt.ens.fr](mailto:guilhem@lpt.ens.fr)

<<http://www.phys.ens.fr/~guilhem/>>

Session : Optimisation combinatoire

Journées MAS 2010, Bordeaux

Session : Optimisation combinatoire

## Le seuil d'(1,2)-QSAT

par Nadia Creignou, Hervé Daudé, Uwe Egly et **Raphaël Rossignol**

QSAT est la version quantifiée du problème SAT. On montre l'existence d'un effet de seuil pour la transition de phase associée à la satisfaisabilité des formules aléatoires quantifiées de type (1,2)-CNF. Plus précisément, on considère un modèle aléatoire de formules booléennes de la forme "pour tout  $X$ , il existe  $Y$  tel que  $\psi(X, Y)$ ", où  $X$  est un vecteur de  $m$  variables booléennes,  $Y$  un vecteur de  $n$  variables booléennes et  $\psi$  une conjonction de 3-clauses telle que chaque clause contienne un littéral venant de  $X$  et deux de  $Y$ . Pour de telles formules, on prouve que le phénomène de seuil est contrôlé par le rapport nombre de clauses sur nombre de variables, et on donne la valeur exacte du rapport critique, qui est une fonction de la limite de  $m/\log(n)$ .

*Adresses :*

Nadia CREIGNOU  
Université d'Aix-Marseille II  
Laboratoire d'Informatique Fondamentale  
Faculté des Sciences de Luminy  
163, av. de Luminy  
F-13288 Marseille cedex 9, France  
E-mail : [Nadia.Creignou@lidlil.univ-mrs.fr](mailto:Nadia.Creignou@lidlil.univ-mrs.fr)

Hervé DAUDÉ  
Université d'Aix-Marseille I  
Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités  
Technopôle Château-Gombert  
39, rue F. Joliot Curie  
F-13453 Marseille, France  
E-mail : [daude@cmi.univ-mrs.fr](mailto:daude@cmi.univ-mrs.fr)

Uwe EGLY  
Technische Universität Wien  
Institut für Informationssysteme 184/3  
Favoritenstraße 9-11  
A-1040 Wien, Austria  
E-mail : [uwe@kr.tuwien.ac.at](mailto:uwe@kr.tuwien.ac.at)  
<<http://www.kr.tuwien.ac.at/staff/egly/>>

Session : Optimisation combinatoire

Journées MAS 2010, Bordeaux

Raphaël ROSSIGNOL  
Université Paris-Sud 11  
Département de Mathématiques  
Bâtiment 425  
Faculté des Sciences d'Orsay  
Université Paris-Sud 11  
F-91405 Orsay Cedex  
E-mail : [raphael.rossignol@math.u-psud.fr](mailto:raphael.rossignol@math.u-psud.fr)  
<<http://www.math.u-psud.fr/~rossigno/>>

Session : Optimisation combinatoire

Journées MAS 2010, Bordeaux

Session : Optimisation combinatoire

## **Les distances dans les arbres couvrants minimaux**

par **Nicolas Broutin**

Les propriétés locales des arbres couvrant minimaux de graphes pondérés de façon aléatoire on fait l'objet de nombreuses recherches. En revanche, en dépit de leur importance pour les applications, les paramètres globaux reliés aux distances comme l'index de Wiener ou encore le diamètre ont quant à eux été très peu étudiés. Nous verrons comment décrire la distribution des distances dans l'arbre couvrant minimal d'un graphe pondéré aléatoirement en utilisant un couplage naturel avec le modèle des graphes aléatoires.

*Adresse :*

Nicolas BROUTIN

INRIA

INRIA Rocquencourt - Projet Algorithms

78153 Le Chesnay, France

E-mail : [nicolas.broutin@inria.fr](mailto:nicolas.broutin@inria.fr)

<http://algo.inria.fr/broutin/>

Session : Optimisation combinatoire

Session : Optimisation combinatoire

## The weak limit of Boltzmann random matchings on diluted graphs

par Charles Bordenave, Marc Lelarge et **Justin Salez**

A matching on a finite graph  $G = (V, E)$  is a collection of pairwise non-adjacent edges  $M \subseteq E$ . The Boltzmann random matching at temperature  $z > 0$  on  $G$  is distributed as follows : for any matching  $M$  on  $G$ ,

$$\mathbb{P}(\mathcal{M}_G^z = M) = \frac{z^{|V|-2|M|}}{P_G(z)}, \text{ with } P_G(z) = \sum_M z^{|V|-2|M|}.$$

We are interested in the asymptotic behavior of  $\mathcal{M}_G^z$  as  $|G| \rightarrow \infty$ . Specifically, we establish that for any graph sequence  $(G_n)_{n \geq 1}$  converging to an infinite tree  $\mathcal{T}$  with finite Hausdorff dimension,  $\mathcal{M}_{G_n}^z$  converges in distribution to a properly defined random matching  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}^z$  on  $\mathcal{T}$  with determinantal marginals. Moreover, the zero-temperature limit  $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}^0 = \lim_{z \rightarrow 0} \mathcal{M}_{\mathcal{T}}^z$  exists in some sense, and under an extra condition on  $\mathcal{T}$  it is precisely the weak limit of a the uniform maximum matching on  $G_n$ . When the  $(G_n)_{n \geq 1}$  are random and converge weakly to a Galton-Watson tree, the limit turns out to be characterized by a recursive distributional equation, which we solve. We thus obtain an explicit formula for the asymptotic size of a maximum matching on  $G_n$ , generalizing that of Karp and Sipser for Erdős-Rényi graphs.

*Adresses :*

Charles BORDENAVE  
CNRS & Université de Toulouse  
UMR 5219 Institut de Mathématiques de Toulouse  
118 route de Narbonne  
31062 Toulouse - France  
E-mail : [charles.bordenave@math.univ-toulouse.fr](mailto:charles.bordenave@math.univ-toulouse.fr)  
<<http://www.math.univ-toulouse.fr/~bordenave/>>

Marc LELARGE  
École Normale Supérieure et INRIA  
INRIA - Projet TREC  
23, avenue d'Italie  
CS 81321  
75214 Paris Cedex 13  
E-mail : [marc.lelarge@ens.fr](mailto:marc.lelarge@ens.fr)  
<<http://www.di.ens.fr/~lelarge/>>

Session : Optimisation combinatoire

Journées MAS 2010, Bordeaux

Justin SALEZ  
École Normale Supérieure et INRIA  
INRIA - Projet TREC  
23, avenue d'Italie  
CS 81321  
75214 Paris Cedex 13  
E-mail : [justin.salez@ens.fr](mailto:justin.salez@ens.fr)

Session : Optimisation combinatoire