



**HAL**  
open science

## Sur le modèle AM2 de digestion anaérobie

Boumédiène Benyahia, Tewfik Sari, Brahim Cherki, Jérôme Harmand

► **To cite this version:**

Boumédiène Benyahia, Tewfik Sari, Brahim Cherki, Jérôme Harmand. Sur le modèle AM2 de digestion anaérobie. CARI 2010, Oct 2010, Yamoussoukro, Côte d'Ivoire. 8 p. inria-00505230

**HAL Id: inria-00505230**

**<https://hal.inria.fr/inria-00505230>**

Submitted on 23 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Sur le modèle AM2 de digestion anaérobie

Boumediène Benyahia <sup>abc\*</sup> — Tewfik Sari <sup>cd</sup> — Brahim Cherki <sup>a</sup> — Jérôme Harmand <sup>bc</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire d'Automatique de Tlemcen, Université Aboubekr Belkaid,  
BP: 119, Tlemcen, Algérie  
benyahiab@yahoo.fr, b\_cherki@yahoo.fr

<sup>b</sup> Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement, INRA,  
Avenue de Etangs, 11100 Narbonne, France  
harmand@supagro.inra.fr

<sup>c</sup> EPI MERE INRIA-INRA, UMR MISTEA, SupAgro,  
2 place Viala, Montpellier, France

<sup>d</sup> Laboratoire de Mathématiques, Informatique et Applications,  
Université de Haute Alsace, 4 rue des Frères Lumière, Mulhouse, France  
Tewfik.Sari@uha.fr

\* Corresponding author.

**RÉSUMÉ.** Ce travail propose une analyse des points d'équilibre et de leur stabilité du modèle connu sous le nom AM2 (ou AMOCO) développé dans [3] pour décrire la dynamique d'un traitement biologique anaérobie des eaux usées. Les points d'équilibres sont caractérisés et leur stabilité est étudiée en fonction des valeurs des paramètres du système.

**ABSTRACT.** This paper deals with the analysis of the equilibria and their stability of the so-called AM2 (or AMOCO) model developed in [3] to describe the dynamical behavior of an anaerobic fixed-bed wastewater treatment process. Depending on the model parameters, the steady states are analytically characterized and their stability is analyzed.

**MOTS-CLÉS :** Biotechnologie, états d'équilibres, analyse de stabilité, épuration des eaux, production de biogaz

**KEYWORDS :** Biotechnology, equilibrium, stability analysis, wastewater epuration, biogas production

---

## 1. Introduction

La digestion anaérobie, ou méthanisation, est le processus naturel de dégradation de la matière organique en absence d'oxygène. Le principal avantage de la méthanisation est que la quasi totalité de la matière organique dégradée se retrouve sous forme de biogaz, composé de méthane à plus de 50%, qui peut être valorisé sous forme d'énergie. Toutefois, ce procédé peut être déstabilisé suite à une surcharge organique (apport trop important de substrat). Afin de mieux comprendre son fonctionnement et de proposer des stratégies de commande adaptées, de nombreux modèles ont été proposés. L'un des modèles les plus appropriés pour le contrôle est le modèle "AM2". Il a été développé dans le cadre du projet européen AMOCO (Advanced MONitoring and CONtrol System for anaerobic processes, European FAIR project No. ERB-FAIR-CT96-1198). Il s'agit d'un modèle en deux étapes (correspondant à deux réactions biologiques en cascade d'où son nom) décrivant notamment les processus d'acidification et de méthanisation, [3]. Bien que plusieurs études récentes lui aient été consacrées [4, 6, 7], son analyse mathématique rigoureuse n'a jamais été proposée. En effet, les analyses menées jusqu'à maintenant ont (i) soit ramené son étude à celle d'un système simplifié (en deux dimensions en faisant une hypothèse sur la quantité maximale de matière organique acidifiée arrivant de la première réaction, cf. [6, 7]) (ii) soit étudié le modèle en supposant une plage restreinte de fonctionnement (cf. par exemple [5]). Le but de ce travail est de fournir l'analyse mathématique complète des équilibres du modèle AM2 et de leur stabilité.

---

## 2. Le modèle AM2

Considérons le modèle mathématique suivant de la digestion anaérobie basée sur deux réactions principales, où le substrat  $S_1$  est dégradé dans un substrat  $S_2$  par des bactéries  $X_1$  puis le substrat  $S_2$  est dégradé par des bactéries  $X_2$ . Ce modèle proposé à l'origine dans [3] s'écrit

$$\dot{S}_1 = D(S_{1in} - S_1) - k_1\mu_1(S_1)X_1 \quad [1]$$

$$\dot{X}_1 = [\mu_1(S_1) - \alpha D]X_1 \quad [2]$$

$$\dot{S}_2 = D(S_{2in} - S_2) + k_2\mu_1(S_1)X_1 - k_3\mu_2(S_2)X_2 \quad [3]$$

$$\dot{X}_2 = [\mu_2(S_2) - \alpha D]X_2 \quad [4]$$

où  $D$  est le taux de dilution,  $S_{1in}$  et  $S_{2in}$  sont respectivement les concentrations en entrée des substrats  $S_1$  et  $S_2$ . Les paramètres  $k_i$  sont les coefficients pseudo-stœchiométriques associés aux deux réactions et le paramètre  $\alpha \in [0, 1]$  représente la fraction de la biomasse qui quitte le réacteur.

On suppose dans ce travail que les cinétiques  $\mu_1$  et  $\mu_2$ , satisfont les propriétés suivantes :

- H1**  $\mu_1$  est une fonction croissante de  $S_1$ , telle  $\mu_1(0) = 0$ ,  $\mu_1'(S_1) > 0$  pour  $S_1 \geq 0$ , et  $\mu_1(+\infty) = m_1$ .
- H2**  $\mu_2$  est une fonction de  $S_2$  qui croît jusqu'à une concentration  $S_2^M$  puis décroît, et telle que  $\mu_2(0) = 0$ ,  $\mu_2(S_2^M) = \mu_2^M$ ,  $\mu_2'(S_2) > 0$  pour  $0 \leq S_2 < S_2^M$ , et  $\mu_2'(S_2) < 0$  pour  $S_2 > S_2^M$ .

Pour les illustrations numériques on considèrera les fonctions de Monod  $\mu_1$  et de Haldane  $\mu_2$  suivantes qui vérifient les hypothèses H1 et H2 :

$$\mu_1(S_1) = \frac{m_1 S_1}{K_1 + S_1}, \quad \mu_2(S_2) = \frac{m_2 S_2}{K_2 + S_2 + \frac{S_2^2}{K_i}}.$$

Pour illustrer les résultats on présente des simulations numériques du système (1-4) pour des valeurs des paramètres biologiques suivantes

Par.	$m_1$	$K_1$	$m_2$	$K_2$	$K_i$	$\alpha$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
Val. de [3]	1.2	7.1	0.74	9.28	256	0.5	42.14	116.5	268
ET.		5	0.9	13.7	320	0.4	18.94	113.6	52.31
Val. uti.	0.5 – 0.55 – 0.6	2.1	1.5	30	50	0.5	25	250	268

qui sont dans les gammes des valeurs identifiées dans [3]. On utilise les valeur suivantes des paramètres que l'on peut fixer arbitrairement dans une expérimentation :

$$D = 0.8, \quad S_{1in} = 10, \quad S_{2in} = 5.$$

## 2.1. Equilibres du modèle (1-4)

On utilise dans la suite les notations suivantes. Soit  $\alpha D < m_1$ . On note par  $\lambda_1$  la solution de l'équation  $\mu_1(S_1) = \alpha D$ . Si  $\alpha D \geq m_1$ , cette équation n'a pas de solution et on pose  $\lambda_1 = +\infty$ . Si  $\lambda_1 < S_{1in}$  on note par

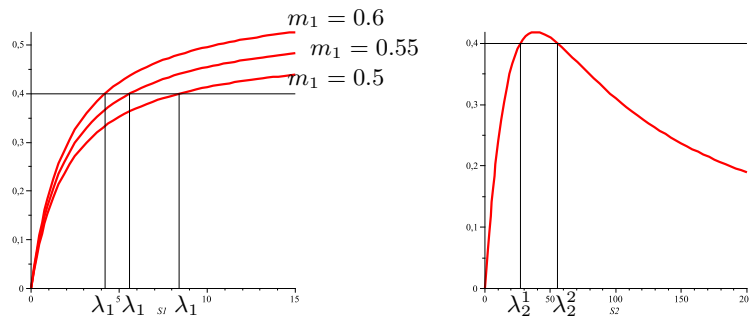
$$S_{2in}^* = S_{2in} + \frac{k_2}{k_1}(S_{1in} - \lambda_1).$$

Soit  $\alpha D < \mu_2^M$ . On note  $\lambda_2^1 < \lambda_2^2$  les solutions de l'équation  $\mu_2(S_2) = \alpha D$ . Si  $\alpha D = \mu_2^M$ , cette équation n'a qu'une solution et on pose  $\lambda_2^1 = \lambda_2^2$ . Si  $\alpha D > \mu_2^M$ , cette équation n'a pas de solution et on pose  $\lambda_2^1 = +\infty$ .

Pour les valeurs des paramètres indiquées dans la section précédentes, les valeurs de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2^1$  et  $\lambda_2^2$  sont représentées sur la Fig. 1.

Nous verrons dans les simulations numériques que pour ces valeurs assez proches de  $m_1$  égales respectivement à 0.5, 0.55 et 0.6, le système présente un comportement asymptotique radicalement différent : lessivage de  $X_2$  dans le premier cas (Fig. 2), convergence

vers un équilibre positif dans le second cas (Fig. 3), et bistabilité dans le troisième cas, c'est à dire que selon la condition initiale, il peut y avoir soit convergence vers un équilibre positif (Fig. 4), soit lessivage de  $X_2$  (Fig. 5). Il est donc d'un grand intérêt pour les applications de bien identifier les paramètres biologiques et de disposer d'indices fiables pour évaluer le risque de déstabilisation du système (marge de stabilité et indice de risque de déstabilisation) [6, 7].



**Figure 1.** *A gauche, les fonctions  $\mu_1(S_1)$  pour  $m_1 = 0.5$  ( $\lambda_1 = 8.4$ ),  $m_1 = 0.55$  ( $\lambda_1 = 5.6$ ) et  $m_1 = 0.6$  ( $\lambda_1 = 4.2$ ). A droite, la fonction  $\mu_2(S_2)$  ( $\lambda_2^1 = 27.052$ ,  $\lambda_2^2 = 55.447$ ).*

**Proposition 2.1** *Le système (1-4) a au plus six points d'équilibre :*

- $E_1^0 = (S_{1in}, 0, S_{2in}, 0)$  qui existe toujours.
- $E_1^i = (S_{1in}, 0, \lambda_2^i, X_2^i)$  où  $X_2^i = \frac{1}{k_3\alpha}(S_{2in} - \lambda_2^i)$ ,  $i = 1, 2$ , qui existe si et seulement si  $S_{2in} > \lambda_2^i$ .
- $E_2^0 = (\lambda_1, X_1^*, S_{2in}^*, 0)$  où  $X_1^* = \frac{1}{k_1\alpha}(S_{1in} - \lambda_1)$ , qui existe si et seulement si  $S_{1in} > \lambda_1$ .
- $E_2^i = (\lambda_1, X_1^*, \lambda_2^i, X_2^{i*})$  où  $X_2^{i*} = \frac{1}{k_3\alpha}(S_{2in}^* - \lambda_2^i)$ ,  $i = 1, 2$ , qui existe si et seulement si  $S_{1in} > \lambda_1$  et  $S_{2in}^* > \lambda_2^i$ .

## 2.2. Points d'équilibres hyperboliques

L'existence et la stabilité des points d'équilibre dépend des positions relatives des deux nombres  $S_{1in}$  et  $\lambda_1$  et de celles des quatre nombres  $\lambda_2^1$ ,  $\lambda_2^2$ ,  $S_{2in}$ , et  $S_{2in}^*$ . Dans le cas hyperbolique où la matrice jacobienne a des valeurs propres de parties réelles non nulles l'existence et la stabilité des points d'équilibre sont résumés dans les tableaux suivants [2]. Le symbole  $S$  se lit localement stable, le symbole  $I$  se lit instable. S'il n'y a pas de symbole, cela signifie que le point d'équilibre n'existe pas dans ce cas.

**Théorème 2.1** *S'il y a lessivage de  $X_1$ , alors*

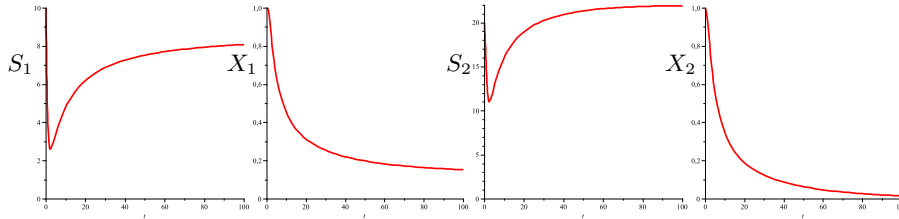
1	$S_{1in} < \lambda_1$	$E_1^0$	$E_1^1$	$E_1^2$
<b>1.1</b>	$S_{2in} < \lambda_2^1$	$S$		
<b>1.2</b>	$\lambda_2^1 < S_{2in} < \lambda_2^2$	$I$	$S$	
<b>1.3</b>	$\lambda_2^2 < S_{2in}$	$S$	$S$	$I$

**Théorème 2.2** *S'il n'y a pas de lessivage de  $X_1$ , alors*

2	$S_{1in} > \lambda_1$	$E_1^0$	$E_1^1$	$E_1^2$	$E_2^0$	$E_2^1$	$E_2^2$
<b>2.1</b>	$S_{2in}^* < \lambda_2^1$	$I$			$S$		
<b>2.2</b>	$S_{2in} < \lambda_2^1 < S_{2in}^* < \lambda_2^2$	$I$			$I$	$S$	
<b>2.3</b>	$S_{2in} < \lambda_2^1 < \lambda_2^2 < S_{2in}^*$	$I$			$S$	$S$	$I$
<b>2.4</b>	$\lambda_2^1 < S_{2in} < S_{2in}^* < \lambda_2^2$	$I$	$I$		$S$		
<b>2.5</b>	$\lambda_2^1 < S_{2in} < \lambda_2^2 < S_{2in}^*$	$I$	$I$		$I$	$S$	
<b>2.6</b>	$\lambda_2^1 < \lambda_2^2 < S_{2in}$	$I$	$I$	$I$	$S$	$S$	$I$

Lorsque  $m_1 = 0.5$ ,  $S_{2in}^* = 21$ , donc c'est le cas **2.1** qui se produit et le système possède un seul équilibre stable  $E_2^0 = (8.4, 0.128, 21, 0)$ . La Fig. 2 représente une solution numérique convergente vers cet équilibre.

Lorsque  $m_1 = 0.55$ ,  $S_{2in}^* = 49$ , donc c'est le cas **2.2** qui se produit et le système pos-

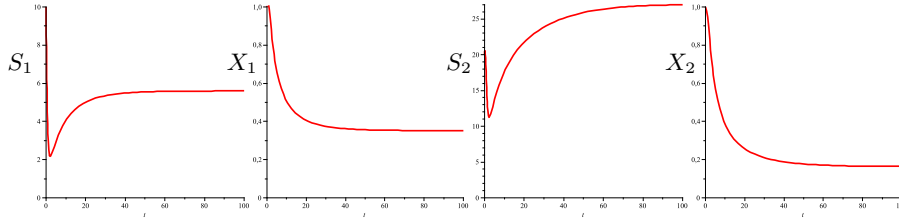


**Figure 2.** Solutions numériques pour  $m_1 = 0.5$  convergent vers  $E_2^0$ .

sède un seul équilibre stable  $E_2^1 = (5.6, 0.352, 27.053, 0.164)$ . La Fig. 3 représente une solution numérique convergent vers cet équilibre.

Lorsque  $m_1 = 0.6$ ,  $S_{2in}^* = 63$ , donc c'est le cas **2.3** qui se produit et le système possède deux équilibres stables  $E_2^0 = (4.2, 0.464, 63, 0)$  et  $E_2^1 = (4.2, 0.464, 55.447, 0.268)$ . La Fig. 4 représente une solution numérique convergent vers  $E_2^1$ . La Fig. 5 représente une solution numérique convergent vers  $E_2^0$ .

Lorsque certains parmi les nombres  $\lambda_2^1$ ,  $\lambda_2^2$ ,  $S_{2in}$ , et  $S_{2in}^*$  sont égaux, des équilibres du système (1-4) confluent et l'une au moins des valeurs propres de la matrice jacobienne



**Figure 3.** Solutions numériques pour  $m_1 = 0.55$  convergeant vers  $E_2^1$ .

est de partie réelle nulle. Pour la description des divers cas qui peuvent se présenter, voir [2].

### 2.3. Comportement asymptotique global

Le modèle (1-4) a une structure en cascade, ce qui en simplifie l'étude. Tout d'abord, il faut noter que le système

$$\begin{cases} \dot{S}_1 &= D(S_{1in} - S_1) - k_1\mu_1(S_1)X_1 \\ \dot{X}_1 &= [\mu_1(S_1) - \alpha D]X_1 \end{cases} \quad [5]$$

formé par les équations (1) et (2) est indépendant des autres équations. Par ailleurs le système composé par (3) et (4) peut être considéré comme un système indépendant dont les entrées sont données par le système (5) :

$$\begin{cases} \dot{S}_2 &= D(f(t) - S_2) - k_3\mu_2(S_2)X_2 \\ \dot{X}_2 &= [\mu_2(S_2) - \alpha D]X_2 \end{cases} \quad [6]$$

avec

$$f(t) = S_{2in} + \frac{k_2}{D}\mu_1(S_1(t))X_1(t) \quad [7]$$

où  $(S_1(t), X_1(t))$  est une solution de (5). Le système (5) correspond au modèle classique du chemostat avec un cinétique de type Monod et une mortalité spécifique de  $X_1$ . Son comportement est bien connu ([9]). Supposons qu'il n'y a pas de lessivage de  $X_1$ . Alors  $(S(t), X_1(t))$  converge vers  $(\lambda_1, X_1^*)$ . Par conséquent la limite de  $f(t)$  quand  $t \rightarrow +\infty$  existe et est égale à  $S_{2in}^*$ . Ainsi le système non autonome (6) converge vers le système autonome

$$\begin{cases} \dot{S}_2 &= D(S_{2in}^* - S_2) - k_3\mu_2(S_2)X_2 \\ \dot{X}_2 &= [\mu_2(S_2) - \alpha D]X_2 \end{cases} \quad [8]$$

Le système (8) correspond au modèle classique du chemostat avec une cinétique de type Haldane et une mortalité spécifique de  $X_2$ . Dans le cas où  $\alpha = 1$  son comportement est

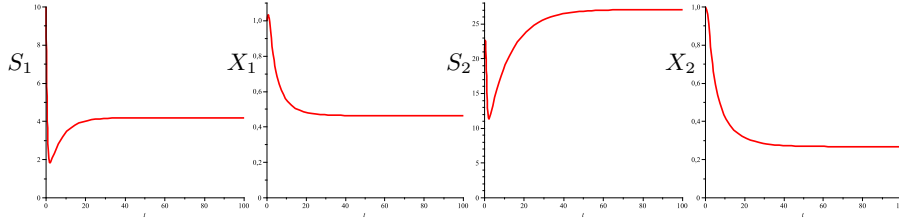


Figure 4. Solutions numériques pour  $m_1 = 0.6$  convergeant vers  $E_2^1$ .

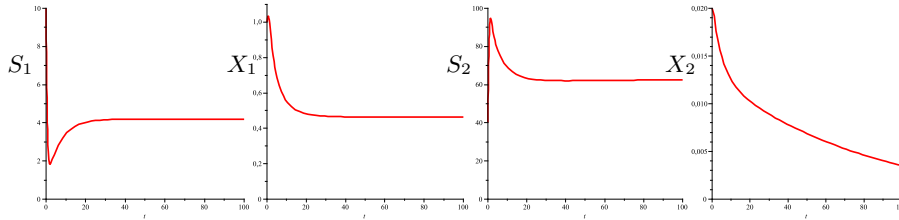


Figure 5. Solutions numériques pour  $m_1 = 0.6$  convergeant vers  $E_2^0$ .

bien connu ([9], Section 2.5) : Lorsque  $\lambda_2^1 < \lambda_2^2 < S_{2in}^*$ , il y a trois points d'équilibre, un équilibre positif et localement stable, un deuxième équilibre localement stable (le lessivage,  $X_2 = 0$ ) et un troisième équilibre positif qui est un col dont les séparatrices stables séparent le cône positif en deux régions qui sont les bassins d'attraction des deux équilibres stables. Lorsque  $\alpha \neq 1$ , les simulations numériques avec une fonction  $\mu_2(S_2)$  de Haldane montrent que l'on obtient toujours un comportement de bistabilité, où l'équilibre de lessivage et l'équilibre opérationnel positif sont stables et leurs bassins d'attraction sont séparés par les deux séparatrices stables du deuxième équilibre positif (voir aussi [6, 7]). Le comportement du système (1-4) se déduit des résultats de Thieme [10] sur les systèmes asymptotiquement autonomes.

**Théorème 2.3** *Supposons que  $S_{1in} > \lambda_1$  et  $\lambda_2^1 < \lambda_2^2 < S_{2in}^*$ , alors toutes les solutions du système (1-4) convergent vers  $E_2^0$ ,  $E_2^1$  ou  $E_2^2$  et l'ensemble des conditions initiales des solutions qui convergent vers le point selle  $E_2^2$  est de mesure nulle. Plus précisément la variété stable de  $E_2^2$  est une sous-variété de dimension 3 qui sépare le cône positif de (1-4) dans les deux bassins d'attraction des points d'équilibre stables  $E_2^0$  et  $E_2^1$ .*



### 3. Conclusions

Cet article a présenté une analyse mathématique du modèle AM2 de digestion anaérobie proposé dans [3]. Nous avons montré qu'une petite modification de l'un des paramètres biologiques du système peut en modifier radicalement le comportement. Dans [2], nous proposons de modifier les indices de stabilité proposés dans [6] et de caractériser le domaine de fonctionnement dans lequel le système AM2 évolue. Parmi les perspectives de ce travail on peut signaler l'analyse mathématique du modèle AM2 modifié présenté dans [1] pour tenir compte de la présence des SMP (en anglais Soluble Microbial Products) comme nouvelle variable.

**Remerciements** : Les auteurs remercient les projets TREASURE (projet INRIA Euro-med 3+3, <http://www.treasure.fr>) et COADVISE (projet FP7-PEOPLE-IRSES-2008 No. 230833) qui ont financé ces recherches.

---

### 4. Bibliographie

- [1] B. BENYAHIA, A new model for the optimal control of AnMBRs. *LBE-INRA, Internal Report* (2009).
- [2] B. BENYAHIA, T. SARI, B. CHERKI, J. HARMAND, Equilibria of an anaerobic wastewater treatment process and their stability. *Submitted*.
- [3] O. BERNARD, Z. HADJ-SADOCK, D. DOCHAIN, A. GENOVESI, AND J.-P. STEYER, Dynamical Model Development and Parameter Identification for an Anaerobic Wastewater Treatment Process. *Biotechnology and Bioengineering*, 75 : 424–438, 2001.
- [4] J.P. GARCIA, D. DOCHAIN, AND V. GONZALEZ-ALVAREZ. Cascade nonlinear control for bistable systems. *Submitted*.
- [5] N. DIMITROVA, M. KRASTANOV. Nonlinear stabilizing control of an uncertain bioprocess model. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 19 :3, 441–454, 2009.
- [6] J. HESS, AND O. BERNARD, Design and Study of a risk management criterion for an unstable anaerobic wastewater treatment process. *J. Process Control*, 18 : 71–79, 2007.
- [7] J. HESS, AND O. BERNARD, Advanced Dynamical Risk Analysis for Monitoring Anaerobic Digestion Process. *American Institute of Chemical Engineers Biotechnol. Prog.*, 25 : 643-653, 2009
- [8] P. LE-CLECH, V. CHEN, AND T.A.G. FANE, Fouling in membrane bioreactors used in wastewater treatment, *Journal of Membrane Science*. *Journal of Membrane Science*, 284, 17–53, 2006.
- [9] H.L. SMITH AND P. WALTMAN, *The theory of the chemostat : Dynamics of microbial competition*. Cambridge University Press, 1995.
- [10] H.R. THIEME, Asymptotically Autonomous Differential Equations in the Plane. *Rocky Mountain J. Math.*, 24, no. 1 : 351–380, 1993.