

## Un modèle mathématique de la prolifération du Typha

Mamadou Lamine Diagne, Papa Ibrahima N'Diaye, Tewfik Sari, Mary Teuw  
Niane

► **To cite this version:**

Mamadou Lamine Diagne, Papa Ibrahima N'Diaye, Tewfik Sari, Mary Teuw Niane. Un modèle mathématique de la prolifération du Typha. CARI 2010, Oct 2010, Yamoussoukro, Côte d'Ivoire. 2010. <inria-00505247>

**HAL Id: inria-00505247**

**<https://hal.inria.fr/inria-00505247>**

Submitted on 23 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Un modèle mathématique de la prolifération du Typha

Mamadou Lamine Diagne <sup>ac\*</sup> — Papa Ibrahima N'diaye <sup>b</sup> — Tewfik Sari <sup>c</sup>  
— Mary Teuw Niane <sup>a</sup>

<sup>a</sup> UMMISCO-Saint-Louis, Laboratoire d'Analyse Numérique  
Université Gaston Berger de Saint-Louis, BP 234, Saint-Louis, Sénégal  
diagne12@yahoo.fr, mtniane@gmail.com

<sup>b</sup> Université de Bambey, UMMISCO-Saint-Louis, LANI-UGB, Sénégal  
papaibra@yahoo.com

<sup>c</sup> Université de Haute Alsace, 4 rue des frères Lumière, 68093 Mulhouse, France  
& EPI MERE INRIA-INRA, UMR MISTEA,  
SupAgro Bât 21, 2, place Pierre Viala, 34060 Montpellier, France  
Tewfik.Sari@uha.fr

\* Corresponding author.

**RÉSUMÉ.** On propose un modèle mathématique de la prolifération du *Typha* qui est une plante d'eau douce qui se développe grâce à deux modes de reproduction pouvant s'effectuer simultanément. Il s'agit d'une part d'une reproduction sexuée caractérisée par la production de graines et d'autre part d'une multiplication végétative assurée par des rhizomes. On analyse les équilibres et leur stabilité des modèles mathématiques obtenus en considérant les quatre combinaisons correspondant à ces deux mécanismes de reproduction. On analyse par des simulations numériques le comportement du système hybride correspondant à l'alternance de périodes avec reproduction sexuée et de périodes sans cette forme de reproduction.

**ABSTRACT.** Our main interest, which was the original motivation of the present work is to propose a mathematical model for the proliferation of *Typha*. The latter one is growing thanks to two modes of reproduction which may performed simultaneously. It is both, a sexual reproduction characterized by production of seeds, and a vegetatively one due to rizophomes. Stability and Equilibrium of the obtained mathematical model are analyzed by considering the four combination corresponding to these two mechanism of reproduction. By means of Numerical Simulation, we investigate the behavior of the hybrid system corresponding to alternating periods with sexed reproduction or not.

**MOTS-CLÉS :** Dynamique de croissance, stabilité, système hybride, Typha

**KEYWORDS :** Growth dynamics, stability, hybrid system, Typha

## 1. Introduction

Après l'ouverture du barrage hydro-agricole de Diama en 1986, le changement du régime hydrographique du fleuve Sénégal a modifié l'écosystème de son bassin. La modification de cet écosystème est marquée par la réapparition ou la prolifération d'une plante, appelée *Typha*, aux abords de certains plans d'eau douce connectés au fleuve Sénégal. En particulier, certains lacs et marigots du Parc National des oiseaux de Djoudj, une zone humide d'importance internationale, patrimoine de l'humanité et lieu de rencontre d'oiseaux migrateurs paléarctiques et afro tropicales [10], connaît une forte présence de cette plante.

Le typha est une plante d'eau douce qui se développe suivant des conditions écohydrologiques modestes. Sa prolifération est possible grâce à deux modes de reproduction pouvant s'effectuer simultanément. Il s'agit d'une reproduction sexuée caractérisée par la production de graines et d'une multiplication végétative assurée par des rhizomes (racines). La présence du Typha dans le delta du fleuve sénégal contribue à l'économie des populations locales. Il est fortement commercialisé pour être utilisé dans la fabrication de nattes, de brin d'allumettes, de clôtures de maisons, etc. Mais la forte prolifération du Typha dans le Parc National des Oiseaux du Djoudj (PNOD) a eu des conséquences néfastes sur la biodiversité, l'économie et la santé des populations locales par l'obstruction des voies d'accès à l'eau. Par exemple, elle gêne les activités de pêche, réduit la production agricole et favorise la persistance de certaines maladies hydriques telles que la bilharziose et le paludisme [9].

Le typha colonise une parcelle grâce à deux modes de reproduction pouvant être combinés à certaines périodes de l'année. Il s'agit de la reproduction sexuée et de la multiplication végétative. La reproduction sexuée donne naissance à des graines. Elle se déroule entre les mois de mars et de juin. La multiplication végétative, appelée aussi reproduction asexuée, se fait à partir des racines de la plante adulte appelées rhizomes. Pour une plante donnée, ce dernier mode de reproduction débute entre 3 à 6 mois après la germination de ses graines. Pour plus de détails, voir [2].

---

## 2. Modèle mathématique

Pour transcrire toutes ces connaissances expérimentales en équations mathématiques, nous considérons une zone admissible de développement du typha au voisinage d'un ouvrage hydraulique. Soit  $K$  la capacité d'accueil de cette zone, c'est-à-dire, le nombre maximal de plantes de typha que peut contenir la zone. Pour un instant  $t$  fixé, soient  $E_g(t)$  le nombre de jeunes pousses provenant de la reproduction sexuée,  $E_r(t)$  celui des jeunes

pousses provenant de la multiplication végétative,  $A(t)$  le nombre de plantes adultes capables d'observer l'un au moins de deux types de reproduction et

$$X(t) = E_g(t) + E_r(t) + A(t)$$

le nombre total de plantes dans la zone considérée. Considérons le système d'équations différentielles ordinaire suivant (pour plus de détails, voir [3]) :

$$\begin{cases} \dot{E}_g = c_g(t)A \left(1 - \frac{X}{K}\right) - (\gamma_g + \mu_g)E_g \\ \dot{E}_r = c_r A \left(1 - \frac{X}{K}\right) - (\gamma_r + \mu_r)E_r \\ \dot{A} = \gamma_g E_g + \gamma_r E_r - \mu A \end{cases}$$

où  $\gamma_g$  (resp.  $\gamma_r$ ) désigne le taux de passage de  $E_g$  (resp.  $E_r$ ) vers  $A$ ,  $\mu_g$ ,  $\mu_r$  et  $\mu$  désignent les taux constants de mortalité respectifs des compartiments  $E_g$ ,  $E_r$  et  $A$ . Le paramètre  $c_g(t)$  est le taux potentiel maximal de jeunes pousses provenant des graines produites par un Typha adulte et  $c_r$  le taux potentiel maximal de jeunes pousses provenant des rhizomes produits par un Typha adulte. Compte tenu de la reproduction sexuée saisonnière, le taux de  $c_g(t)$  est la fonction  $T$  périodique (avec  $T = 12$  mois) définie sur  $[0, T]$  par

$$c_g(t) = \begin{cases} c_g & \text{si } t \in [0, \alpha T[ \\ 0 & \text{si } t \in [\alpha T, T[ \end{cases}$$

où  $\alpha T$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ , est la fraction de l'année pendant laquelle il y a une reproduction sexuée.

En posant  $e_g = \frac{E_g}{K}$ ,  $e_r = \frac{E_r}{K}$  et  $a = \frac{A}{K}$ , nous obtenons le modèle adimensionnel suivant

$$\begin{cases} \dot{e}_g = c_g(t)a(1 - x) - (\gamma_g + \mu_g)e_g \\ \dot{e}_r = c_r a(1 - x) - (\gamma_r + \mu_r)e_r \\ \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g - \mu a \end{cases} \quad [1]$$

avec  $x(t) = e_g(t) + e_r(t) + a(t)$ . On considère ce système dans le domaine

$$\Omega = \{(e_g, e_r, a) \in \mathbb{R}_+^3, \quad e_g + e_r + a \leq 1\}$$

**Proposition 2.1** *Le domaine  $\Omega$  est positivement invariant pour le système (1).*

*Preuve.* On a les implications suivantes

$$\begin{aligned} e_g = 0 &\Rightarrow \dot{e}_g = c_g(t)a(1 - e_r - a) \geq 0 && \text{si } e_r + a \leq 1 \\ e_r = 0 &\Rightarrow \dot{e}_r = c_r a(1 - e_g - a) \geq 0 && \text{si } e_g + a \leq 1 \end{aligned}$$

$$a = 0 \Rightarrow \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g \geq 0$$

$$x = 1 \Rightarrow \dot{x} = -\mu_g e_g - \mu_r e_r - \mu a \leq 0$$

Donc  $\Omega$  est positivement invariant ■

### 3. Equilibres du modèle et leur stabilité

Cette section s'intéresse au système autonome qui découle du système (1) non autonome présenté dans la section 2 lorsque  $c_g(t)$  est constant.

- le cas  $c_r = 0$  et  $c_g = 0$  modèle sans reproduction sexuée et asexuée.
- le cas  $c_r = 0$  et  $c_g > 0$  modèle avec la reproduction sexuée, mais sans la reproduction asexuée.
- Le cas  $c_r > 0$  et  $c_g = 0$  modèle sans reproduction sexuée, mais avec reproduction asexuée.
- Le cas  $c_r > 0$  et  $c_g > 0$  modèle à la reproduction sexuée et asexuée.

Pour chacun de ces cas, on discute en fonction des paramètres les équilibres du système ainsi que leur stabilité. (pour les preuves de ces résultats, voir [3]). On définit pour cela les taux de reproduction de base :

$$\lambda_g = \frac{c_g \gamma_g}{\mu(\gamma_g + \mu_g)}, \quad \lambda_r = \frac{c_r \gamma_r}{\mu(\gamma_r + \mu_r)}$$

comme étant le nombre moyen de jeunes pousses provenant des reproductions sexuée et asexuée respectivement produit par un typha durant sa phase reproductive. Notons

$$\lambda = \lambda_g + \lambda_r.$$

#### 3.1. Le cas $c_r = 0$ et $c_g = 0$

On obtient le système

$$\begin{cases} \dot{e}_g = -(\gamma_g + \mu_g)e_g \\ \dot{e}_r = -(\gamma_r + \mu_r)e_r \\ \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g - \mu a \end{cases} \quad [2]$$

**Proposition 3.1** *Le système (2) admet l'unique point d'équilibre  $E_0 = (0, 0, 0)$  qui est globalement asymptotiquement stable.*

### 3.2. Le cas $c_r = 0$ et $c_g > 0$

On obtient le système

$$\begin{cases} \dot{e}_g = c_g a(1 - e_g - e_r - a) - (\gamma_g + \mu_g)e_g \\ \dot{e}_r = -(\gamma_r + \mu_r)e_r \\ \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g - \mu a \end{cases} \quad [3]$$

**Proposition 3.2** Si  $\lambda_g \leq 1$ , il existe un unique point équilibre  $E_0 = (0, 0, 0)$  qui est exponentiellement stable si et seulement si  $\lambda_g < 1$ . Si  $\lambda_g > 1$ , il existe deux points d'équilibres pour le système (3) : l'équilibre trivial  $E_0$  qui est instable et l'équilibre non trivial  $E_1 = (e_g^*, 0, a^*)$  avec

$$e_g^* = \frac{\mu}{\gamma_g + \mu} \frac{\lambda_g - 1}{\lambda_g}, \quad a^* = \frac{\gamma_g}{\gamma_g + \mu} \frac{\lambda_g - 1}{\lambda_g}$$

qui est asymptotiquement stable.

### 3.3. Le cas $c_r > 0$ et $c_g = 0$

On obtient le système

$$\begin{cases} \dot{e}_g = -(\gamma_g + \mu_g)e_g \\ \dot{e}_r = c_r a(1 - e_g - e_r - a) - (\gamma_r + \mu_r)e_r \\ \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g - \mu a \end{cases} \quad [4]$$

**Proposition 3.3** Si  $\lambda_r \leq 1$ , il existe un unique point équilibre  $E_0 = (0, 0, 0)$  qui est exponentiellement stable si et seulement si  $\lambda_r < 1$ . Si  $\lambda_r > 1$ , il existe deux points d'équilibres pour le système (4) : l'équilibre trivial  $E_0$  qui est instable et l'équilibre non trivial  $E_2 = (0, e_r^*, a^*)$  avec

$$e_r^* = \frac{\mu}{\gamma_r + \mu} \frac{\lambda_r - 1}{\lambda_r}, \quad a^* = \frac{\gamma_r}{\gamma_r + \mu} \frac{\lambda_r - 1}{\lambda_r}$$

qui est asymptotiquement stable.

### 3.4. Le cas $c_r > 0$ et $c_g > 0$

On obtient le système

$$\begin{cases} \dot{e}_g = c_g a(1 - e_g - e_r - a) - (\gamma_g + \mu_g)e_g \\ \dot{e}_r = c_r a(1 - e_g - e_r - a) - (\gamma_r + \mu_r)e_r \\ \dot{a} = \gamma_r e_r + \gamma_g e_g - \mu a \end{cases} \quad [5]$$

**Proposition 3.4** Si  $\lambda \leq 1$ , il existe un unique point équilibre  $E_0 = (0, 0, 0)$  qui est exponentiellement stable si et seulement si  $\lambda < 1$ . Si  $\lambda > 1$ , il existe deux points d'équilibres pour le système (5) : l'équilibre trivial  $E_0$  qui est instable et l'équilibre non trivial  $E_3 = (e_g^*, e_r^*, a^*)$  avec

$$e_g^* = \frac{c_g \mu (\gamma_r + \mu_r)}{c_g (\gamma_g + \mu) (\gamma_r + \mu_r) + c_r (\gamma_r + \mu) (\gamma_g + \mu_g)} \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

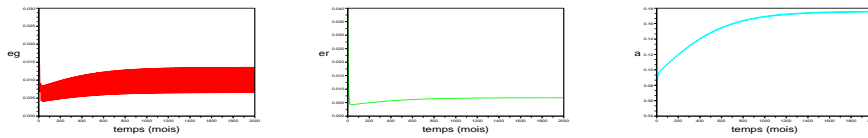
$$e_r^* = \frac{c_r \mu (\gamma_g + \mu_g)}{c_g (\gamma_g + \mu) (\gamma_r + \mu_r) + c_r (\gamma_r + \mu) (\gamma_g + \mu_g)} \frac{\lambda - 1}{\lambda}$$

$$a^* = \frac{\mu (\gamma_g + \mu_g) (\gamma_r + \mu_r)}{c_g (\gamma_g + \mu) (\gamma_r + \mu_r) + c_r (\gamma_r + \mu) (\gamma_g + \mu_g)} (\lambda - 1)$$

qui est asymptotiquement stable.

Les résultats de stabilité des systèmes (2)-(5) sont résumés dans le tableau suivant

	$c_r = 0$	$c_r > 0$
$c_g = 0$	$E_0$ est GAS	si $\lambda_r < 1$ alors $E_0$ est l'unique équilibre. Il est LAS si $\lambda_r > 1$ alors $E_0$ est instable et $E_1$ est LAS
$c_g > 0$	si $\lambda_g < 1$ alors $E_0$ est l'unique équilibre. Il est LAS si $\lambda_g > 1$ alors $E_0$ est instable et $E_2$ est LAS	si $\lambda < 1$ alors $E_0$ est l'unique équilibre. Il est LAS si $\lambda > 1$ alors $E_0$ est instable et $E_3$ est LAS



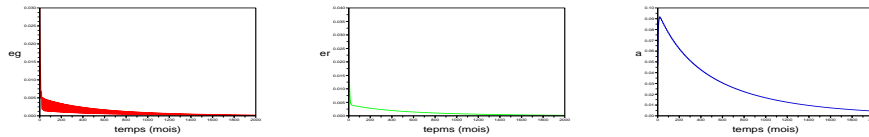
**Figure 1.** Solutions numériques du système hybride pour  $\alpha = \frac{2}{3}$ .

#### 4. Simulations numériques du système hybride

Nous avons fait des simulations numériques du système hybride avec la valeurs suivantes des paramètres :

Symbole	$c_g$	$c_r$	$\gamma_g$	$\gamma_r$	$\mu_g$	$\mu_r$	$\mu$	$\lambda_g$	$\lambda_r$
valeurs	0.02	0.01	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{72}$	1.08	0.576

La Fig. 1 montre que la solution numérique du système hybride converge vers un cycle limite pour un  $\alpha = \frac{2}{3}$ , tandis que la Fig. 2 montre une convergence vers l'équilibre sans plante pour un  $\alpha = \frac{1}{3}$ .



**Figure 2.** Solutions numériques du système hybride pour  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

---

#### 5. Conclusions

Nous avons proposé un modèle mathématique de la prolifération du Typha, une plante envahissante du fleuve Sénégal, par un système dynamique hybride, obtenu en alternant deux systèmes dynamiques autonomes de dimension 3. Nous avons distingué deux cas, celui où il y a une reproduction végétative ( $c_r > 0$ ) et celui où il n'y a pas de reproduction végétative ( $c_r = 0$ ) et dans chacun des cas nous avons considéré le système dynamique hybride obtenu en alternant les deux systèmes dynamiques autonomes correspondant à  $c_g > 0$  (c'est-à-dire la saison où il y a une reproduction par graines) et à  $c_g = 0$  (c'est-à-dire la saison où il n'y a pas de reproduction par graines). Nous avons fait l'analyse mathématique complète de chacun de ces 4 systèmes autonomes en dimension 3 et avons déterminé ses équilibres et leur stabilité. Nous avons pour cela mis en évidence deux taux de reproduction de base, notés  $\lambda_g$  et  $\lambda_r$  tels que ces deux nombres et leur somme  $\lambda = \lambda_g + \lambda_r$  caractérisent complètement l'existence et la stabilité de l'équilibre positif.



Ce nombre rappelle le taux  $\mathcal{R}_0$  des modèles épidémiologiques, mais il faut noter que notre système n'est pas du type des modèles épidémiologiques auxquels la théorie générale s'applique [5].

Nous avons montré, par des simulations numériques que le comportement du système hybride est assez complexe. Il est bien connu qu'un environnement fluctuant, comme c'est le cas de notre modèle qui alterne deux périodes, la première correspondant à la croissance sexuée et la deuxième correspondant à l'absence de croissance sexuée, peut conduire à des comportements paradoxaux [6]. En particulier, l'alternance de deux environnements défavorables à une espèce, peut donner lieu à un environnement favorable. On se propose dans la suite [4] d'approfondir ces questions en utilisant la théorie des perturbations singulières, lorsque l'alternance des deux environnements se fait très lentement [1, 7], et la théorie de la moyennisation, lorsque cette alternance est rapide [8].

**Remerciements :** Les auteurs remercient les projets UNESCO (C.B 32 12 31 10 DDK) et AIRESUD qui ont financé ces recherches.

---

## 6. Bibliographie

- [1] H. BOUDJELLABA, T. SARI, « Dynamic transcritical bifurcations in a class of slow-fast predator-prey models », *J. Differential Equations* 246 (2009), no. 6, 2205–2225.
- [2] M.L. DIAGNE, P. I. N'DIAYE, P.D. HANNE, K. NOBA, M. T. NIANE, « Modélisation de la prolifération du Typha au voisinage d'un ouvrage hydraulique », *En préparation*.
- [3] M.L. DIAGNE, T. SARI, P. I. N'DIAYE, « Sur un modèle mathématique de la prolifération du Typha : les équilibres et leur stabilité », *En préparation*.
- [4] M.L. DIAGNE, T. SARI, « Un système dynamique hybride modélisant la prolifération du Typha », *En préparation*.
- [5] J.C. KAMGANG, G. SALLET, « Computation of threshold conditions for epidemiological models and global stability of the disease-free equilibrium (DFE) », *Math. Biosci.* 213 (2008), no. 1, 1–12.
- [6] C. LOBRY, A. SCIANDRA, P. NIVAL, « Paradoxical effects on growth and competition induced by fluctuations in environment », *C. R. Acad. Sci.*, 317 (1994), 102-107.
- [7] C. LOBRY, T. SARI « The peaking phenomenon and singular perturbations. » *ARIMA Rev. Afr. Rech. Inform. Math. Appl.* 9 (2008), 487–516.
- [8] T. SARI, « Averaging for ordinary differential equations and functional differential equations », *The strength of nonstandard analysis*, 286–305, SpringerWienNewYork, Vienna, 2007.
- [9] N.L. SARR, « Aspects socio-économiques de la prolifération de Typha domingensis dans le delta du fleuve Sénégal. », *Mémoire de DEA.*, ISE, UCAD Dakar, 49 p. 2003.
- [10] B. TRECA, « Les dégâts aux semis de riz causés par les oiseaux d'eau dans le Delta du fleuve Sénégal. », *Dakar. OSTOM*, 13p, 1989.