

Computing the minimum distance between two planar algebraic curves

Xiao-Diao Chen, Jun-Hai Yong, Guozhao Wang

► **To cite this version:**

Xiao-Diao Chen, Jun-Hai Yong, Guozhao Wang. Computing the minimum distance between two planar algebraic curves. *Journal of Computer Aided Design*

Computer Graphics, Hujun Bao, 2008. <inria-00518427>

HAL Id: inria-00518427

<https://hal.inria.fr/inria-00518427>

Submitted on 17 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

平面代数曲线间最近距离的计算

陈小雕¹⁾, 雍俊海²⁾, 汪国昭³⁾

¹⁾(浙江大学宁波理工学院, 宁波, 315100)

²⁾(清华大学软件学院, 北京, 100084)

³⁾(浙江大学数学系图形图像研究所, 杭州, 310027)

摘要 本文以平面二次曲线为例, 利用基于等距思想的最近距离计算方法, 来求解两条平面代数曲线间的最近距离。对于平面二次曲线, 本文方法得到的单变量多项式方程次数比已有类似方法中结果方程的次数更低, 从而可以降低方程求解的计算复杂度或提高求解的稳定性。

关键词 最近距离; 平面代数曲线; 等距方法
中图法分类号 TP391 72

Computing the minimum distance between two planar algebraic curves

Xiao-Diao Chen¹⁾, Jun-Hai Yong²⁾, Guo-Zhao Wang³⁾

¹⁾ Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo, 315100

²⁾ School of Software, Tsinghua University, Beijing, 100084

³⁾ Institute of Computer Graphics and Image Processing, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou, 310027

Abstract An offset-based method is presented for computing the minimum distance between two planar algebraic curves. The new method is illustrated by using planar quadratic curves. For planar quadratic curves, the degree of the resulting univariate polynomial equation in our method is much lower than that of the equations in previous comparable methods, which may lead to lower computation complexity or higher robustness of the solutions.

Key words Minimum distance; Planar algebraic curves; Offset method

1 引言

最近距离的计算问题, 有很多应用。比如在机器人运动规划中, 距离信息被用来计算物体间的相互作用力以及惩罚系数 [1]。在CAD/CAM中, 距离信息被用于碰撞干涉检测中 [2]。计算机图形学中的碰撞检测与动画模拟, 也经常需要用到物体间的距离信息 [3, 4, 5]。

最近很多文章讨论了 \mathbb{R}^3 空间中二次曲面间的最近距离 [3, 6, 7]。文献 [3, 7]没有专门讨论平面曲线间的最近距离计算。实际上, 由于一次消多元方法的限制, 在 \mathbb{R}^2 空间中代数曲

本课题得到国家自然科学基金(60625202, 60533070, 60473130)和宁波市自然科学基金(2007A610046)资助。
陈小雕, 男, 博士, 主要研究方向为计算机图形学与几何造型。雍俊海, 男, 教授, 博士, 主要研究方向为CAGD、CAD和计算机图形学。汪国昭, 男, 教授, 主要研究方向为CAGD、CAD和计算机图形学。

线的情形下，这些代数曲面情形中的方法得到的最终结果间可能会存在较大的差异。例如，对于一个2次曲面 $f(x, y, z) = 0$ 和一个3次曲面 $g(x, y, z) = 0$ 间的最近距离，文献 [3]中的方法不容易直接求解 x, y, z 关于其他两个变量的表达式，从而影响最终消元后得到单变量多项式方程的次数；而同样对于一个2次曲线 $F(x, y) = 0$ 和一个3次曲线 $G(x, y) = 0$ 间的最近距离，本文的方法可以直接给出 x, y 关于另外两个变量的表达式，从而提高了消元的效率，最终的结果也优于类似的已有方法。本文仅讨论平面物体间的最近距离。椭圆、抛物线等平面代数曲线经常被用于各种平面造型系统中，用来表示平面物体。如AutoCAD，经常要计算两条曲线之间最近距离的信息。通过将曲线离散成若干条直线段，两条曲线间的最近距离也可以转化为若干条直线段间的最近距离问题。直线段间的最近距离容易求解。在高精度要求下，曲线可能需要被分解成很多条直线段，这时对应的计算量比较大，可能无法满足实时计算的要求。这时候就需要曲线间最近距离的直接求解方法。

若两条代数曲线相交，则相应的最近距离为零。他们之间的任何一个交点，都可以当作相应的最近点。关于两条曲线间的求交问题，可以参看文献 [9, 10, 11, 12]。本文不再详细讨论求交方法的细节。

本文假设两条代数曲线不相交。两条不相交的平面代数曲线间最近距离的计算问题，往往被转化为一个多项式方程组的求解，或一个次数较高的单变量多项式方程的求根问题 [6, 7]。2002年，Lennerz等提出了基于Langrange乘子法的方法，讨论了二次曲线曲面间最近距离的计算问题 [6]。他们可以得到两个双变量的多项式方程，或一个次数相对较高的单变量多项式方程。为了防止涉及的矩阵出现奇异性，[6]的方法需要区分是否中心曲线，以便分别讨论求解。Sohn等人提出了基于直线几何的方法讨论了二次曲面、圆环面间的最近距离计算问题 [7]。[7]的方法可以用来求解二次曲线间的最近距离。他们需要事先计算出曲线法向一致性所满足的方程，不同类型的曲线，其对应的方程需要分别计算。他们的方法得到两个双变量的多项式方程，其次数甚至比 [6]中的方程相应的次数更高 [3]。本文稍后结果单变量多项式方程的次数比较时，省略了与 [7]方法的相应比较。

本文提出了一个基于等距思想的计算方法，可以统一地计算两条平面代数曲线间的最近距离。最后可以得到两个双变量的方程，或一个单变量的方程。本文方法理论上也适用于计算平面上一条代数曲线和一条参数曲线间的最近距离。对于两条二次曲线间的最近距离计算问题，本文方法得到的单变量多项式方程的次数，低于 [6, 7]中方法得到的单变量多项式方程的相应次数。

2 最近距离计算的等距方法

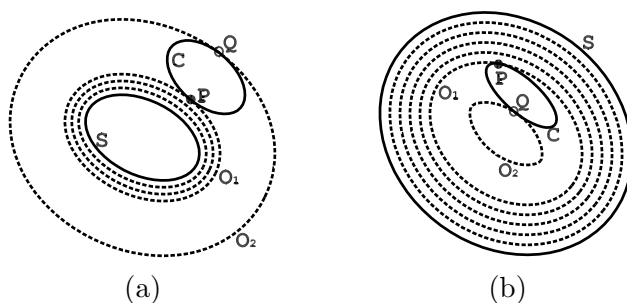


图 1. [3] 曲线S的等距曲线 O_1 、 O_2 与曲线C相切于P和Q (a) 往外的等距曲线或(b) 往内的等距曲线。

本文的等距方法理论上可以用来解决两条代数曲线间的最近距离。若两条平面代数曲线相交，则相应最近距离为零，交点为对应的最近点。求交的方法可以参看 [9, 10, 11, 12]。本文假设给定的两条代数曲线不相交。设两条平面代数曲线的方程分别

为 $\mathbf{C}_1 : f(x, y) = 0$ 和 $\mathbf{C}_2 : g(x, y) = 0$ 。若点 $\mathbf{p} = (x_0, y_0)^T$ 为曲线 \mathbf{C}_1 上的最近点, 最近距离为 d 。曲线 \mathbf{C}_1 位移为 d 的等距线刚好与曲线 \mathbf{C}_2 相切于点 \mathbf{q} (如图1)。则点 \mathbf{q} 是曲线 \mathbf{C}_2 上对应的最近点, 且有

$$\mathbf{q} = (x_0 + df_x(x_0, y_0)/k, y_0 + df_y(x_0, y_0)/k)^T, \quad (1)$$

其中 $k = \sqrt{f_x(x_0, y_0)^2 + f_y(x_0, y_0)^2}$ 。点 \mathbf{p} 和 \mathbf{q} 的连线方向既是曲线 \mathbf{C}_1 在点 \mathbf{p} 处的法向, 也是曲线 \mathbf{C}_2 在点 \mathbf{q} 处的法向。综上所述, 令 $\alpha = d/k$, 有

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) & = 0, \\ g(x_0 + \alpha f_x(x_0, y_0), y_0 + \alpha f_y(x_0, y_0)) & = 0, \\ g_x(x_0 + \alpha f_x(x_0, y_0), y_0 + \alpha f_y(x_0, y_0)) + \mu f_x(x_0, y_0) & = 0, \\ g_y(x_0 + \alpha f_x(x_0, y_0), y_0 + \alpha f_y(x_0, y_0)) + \mu f_y(x_0, y_0) & = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中, f_x 、 f_y 、 g_x 和 g_y 分别为 f 和 g 关于 x 和 y 的偏导数。

方程组(2)共有4个多项式方程和4个变量 x_0 、 y_0 、 α 和 μ , 消去其中三个变量 x_0 、 y_0 和 μ , 得到一个关于单变量 α 的多项式方程。从理论上来说, [13, 14]中的结式理论可以用来消去多项式方程组的任意多个变量。单变量多项式方程的求解, 可以参看[12], 本文不作详细讨论。求解出 α 后, 代入方程组(2)中, 可以求解出 x_0 、 y_0 和 μ , 从而求解出最近距离 $d = \alpha k$ 。相应的另一个最近点可由式子(1)得到。

若第一条曲线 $f(x_0, y_0) = 0$ 为参数曲线 $\mathbf{C}(t) = (X(t), Y(t))^T$, 则在方程组(2)中, 将第一个式子去除, 同时将代数曲线的法向 $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))^T$ 替换成参数曲线的法向表示式 $(Y'(t), -X'(t))^T$, 可以得到三个关于 t 、 α 和 μ 的方程。类似的, 消去两个变量 t 、 μ , 得到一个关于单变量 α 的多项式方程。然后, 同样可以求解出最近距离以及相应的最近点。

3 平面二次曲线间的最近距离

本节中, 一般平面二次曲线的方程为

$$g(x, y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (3)$$

3.1 椭圆/双曲线与一般平面二次曲线间的最近距离

设椭圆或双曲线的方程可以表示为 $f(x, y) = x^2/m + y^2/n - 1 = 0$, 一般平面二次曲线由式子(3)确定。则方程组(2)变为

$$\begin{cases} 0 = x_0^2/m + y_0^2/n - 1, \\ 0 = A(1 + 2\alpha/m)^2 x_0^2 + B(1 + 2\alpha/n)^2 y_0^2 + 2C(1 + 2\alpha/m)(1 + 2\alpha/n)x_0 y_0 \\ \quad + 2D(1 + 2\alpha/m)x_0 + 2E(1 + 2\alpha/n)y_0 + F, \\ 0 = 2A(1 + 2\alpha/m)x_0 + 2C(1 + 2\alpha/n)y_0 + 2D + 2\mu x_0/m, \\ 0 = 2B(1 + 2\alpha/n)y_0 + 2C(1 + 2\alpha/m)x_0 + 2E + 2\mu y_0/n. \end{cases} \quad (4)$$

方程组(4)中的第3、4两个方程是关于 x_0 和 y_0 的线性方程, 求解得到

$$\begin{aligned} x_0 &= -m(-nCE + nBD + \mu D - 2C\alpha E + 2B\alpha D)/\beta_1, \\ y_0 &= -n(\mu E - DCm - 2DC\alpha + AmE + 2A\alpha E)/\beta_1, \end{aligned}$$

其中 $\beta_1 = 2nBA\alpha + nB\mu - nC^2m + nBAm + 2\mu A\alpha - 2C^2\alpha m - 4C^2\alpha^2 + \mu Am + 2B\alpha Am + 4B\alpha^2 A + 2B\alpha\mu - 2nC^2\alpha + \mu^2$ 。将上式代入到方程组(4)中, 整理后, 得到两个关于 μ 和 α 的多项式方程, 消去变量 μ , 得到一个关于 α 的次数至多为12次的多项式方程。

3.2 抛物线与一般平面二次曲线间的最近距离

设抛物线的方程可以表示为 $f(x, y) = x^2 - 2py$ ，一般平面二次曲线由式子(3)确定。则方程组(2)变为

$$\begin{cases} 0 = x_0^2 - 2py_0, \\ 0 = A(x_0 + 2\alpha x_0)^2 + B(y_0 - 2\alpha p)^2 + 2C(x_0 + 2\alpha x_0)(y_0 - 2\alpha p) \\ \quad + 2D(x_0 + 2\alpha x_0) + 2E(y_0 - 2\alpha p) + F, \\ 0 = 2A(x_0 + 2\alpha x_0) + 2C(y_0 - 2\alpha p) + 2D + 2\mu x_0, \\ 0 = 2B(y_0 - 2\alpha p) + 2C(x_0 + 2\alpha x_0) + 2E - 2\mu p. \end{cases} \quad (5)$$

方程组(5)中的第3、4两个方程是关于 x_0 和 y_0 的线性方程，求解得到

$$\begin{aligned} x_0 &= -(BD + C\mu p - CE)/(BA + 2BA\alpha + B\mu - C^2 - 2C^2\alpha), \\ y_0 &= \beta_2/(BA + 2BA\alpha + B\mu - C^2 - 2C^2\alpha), \end{aligned}$$

其中 $\beta_2 = CD + 2C\alpha D + 2B\alpha pA + 4B\alpha^2 pA + 2B\alpha p\mu - 2\alpha pC^2 - 4\alpha^2 pC^2 - EA - 2EA\alpha - E\mu + \mu pA + 2\mu pA\alpha + \mu^2 p$ 。将上式代入到方程组(5)中，整理后，得到两个关于 μ 和 α 的多项式方程，消去变量 μ ，得到一个关于 α 的次数至多为9次的多项式方程。

3.3 抛物线与抛物线间的最近距离

设抛物线的方程可以表示为 $f(x, y) = x^2 - 2py$ ，第二条抛物线方程由式子

$$(Ax + By + C)^2 + (Dx + Ey + F) = 0$$

确定。则方程组(2)变为

$$\begin{cases} 0 = x_0^2 - 2py_0, \\ 0 = (A(x_0 + 2\alpha x_0) + B(y_0 - 2\alpha p) + C)^2 + D(x_0 + 2\alpha x_0) + E(y_0 - 2\alpha p) + F, \\ 0 = 2(A(x_0 + 2\alpha x_0) + B(y_0 - 2\alpha p) + C)A + D + 2\mu x_0, \\ 0 = 2(A(x_0 + 2\alpha x_0) + B(y_0 - 2\alpha p) + C)B + E - 2\mu p. \end{cases} \quad (6)$$

方程组(6)中的第3、4两个方程是关于 x_0 和 y_0 的线性方程，求解得到

$$\begin{aligned} x_0 &= -(BD - AE + 2A\mu p)/(2B\mu), \\ y_0 &= \beta_3/(2B^2\mu), \end{aligned}$$

其中 $\beta_3 = ABD - A^2E + 2A^2\mu p + 2A\alpha BD - 2\alpha A^2E + 4\alpha A^2\mu p - 2BC\mu - E\mu + 4B^2\alpha p\mu + 2\mu^2 p$ 。将上式代入到方程组(6)中，整理后，得到两个关于 μ 和 α 的多项式方程，消去变量 μ ，得到一个关于 α 的次数至多为5次的多项式方程。

3.4 直线与一般平面二次曲线间的最近距离

设直线的方程可以表示为 $f(x, y) = ax + by + c$ ，一般平面二次曲线由式子(3)确定。则方程组(2)变为

$$\begin{cases} 0 = ax_0 + by_0 + c, \\ 0 = A(x_0 + \alpha a)^2 + B(y_0 + \alpha b)^2 + 2C(x_0 + \alpha a)(y_0 + \alpha b) \\ \quad + 2D(x_0 + \alpha a) + 2E(y_0 + \alpha b) + F, \\ 0 = A(x_0 + \alpha a) + 2C(y_0 + \alpha b) + 2D + \mu a, \\ 0 = 2B(y_0 + \alpha b) + 2C(x_0 + \alpha a) + 2E + \mu b. \end{cases} \quad (7)$$

方程组(7)中的第3、4两个方程是关于 x_0 和 y_0 的线性方程，求解得到

$$\begin{aligned} x_0 &= (2DB + 2A\alpha aB - 2\alpha aC^2 - 2CE - C\mu b + \mu aB)/(-2(AB - C^2)), \\ y_0 &= (2CD - 2AB\alpha b - 2AE - A\mu b + 2C^2\alpha b + C\mu a)/(2(AB - C^2)). \end{aligned}$$

将上式代入到方程组(7)中，整理后，得到两个关于 μ 和 α 的多项式方程，消去变量 μ ，得到一个关于 α 的次数至多为2次的多项式方程。

3.5 直线与抛物线间的最近距离

设直线的方程可以表示为 $f(x, y) = ax + by + c$ ，抛物线的方程可以表示为 $g(x, y) = x^2 - 2py$ 。则方程组(2)变为

$$\begin{cases} 0 = ax_0 + by_0 + c, \\ 0 = (x_0 + \alpha a)^2 - 2p(y_0 + \alpha b), \\ 0 = 2x_0 + 2\alpha a + \mu a, \\ 0 = -2p + \mu b. \end{cases} \quad (8)$$

从方程组(8)中的第3、4两个方程中求解得到

$$x_0 = -a(\alpha b + p)/b.$$

代入程组(8)中，得到

$$\begin{cases} -a^2(\alpha b + p)/b + by_0 + c = 0, \\ (-a(\alpha b + p)/b + \alpha a)^2 - 2p(y_0 + \alpha b) = 0. \end{cases}$$

将上式消去变量 y_0 ，得到一个关于 α 的次数为1次的多项式方程

$$2b\alpha a^2 + pa^2 - 2bc + 2b^3\alpha = 0.$$

表1综合了上述关于平面二次曲线各种情形的结果。表1中， M_1 [6] 表示文献 [6]中的方法， M_2 表示本文中的等距方法，表中的数字表示得到的单变量多项式方程的次数。从表1中可以看出，除直线/直线情形两个方法的次数均为1外，本文方法得到的单变量方程次数均低于文献 [6]中相应方程的次数。

表 1. 平面二次曲线情形下的结果单变量多项式方程的次数比较

曲线/曲线	椭圆/双曲线		抛物线		直线	
	M_1 [6]	M_2	M_1 [6]	M_2	M_1 [6]	M_2
椭圆/双曲线	16	12	12	9	4	2
抛物线	12	9	9	5	3	1
直线	4	2	3	1	1	1

4 例子与结论

本节以椭圆为例，说明本文的等距方法。本文的例子都用Maple软件实现。

例1. 给定两椭圆 $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ 和 $2(x - 10)^2 + (y - 2)^2 - 1 = 0$ 。方程组(4)变为

$$\begin{cases} 0 = x_0^2 + 2y_0^2 - 1, \\ 0 = 2(x_0 + 2\alpha x_0 - 10)^2 + (y_0 + 4\alpha y_0 - 2)^2 - 1, \\ 0 = 4x_0 + 8\alpha x_0 - 40 + 2\mu x_0, \\ 0 = 2y_0 + 8\alpha y_0 - 4 + 4\mu y_0. \end{cases}$$

由第3、4个式子求解出 x_0 和 y_0 ，并代入第1、2个式子中，得到两个关于 α 和 μ 的方程，利用结式理论消去 μ ，得到关于 α 的12次方程。

$$0 = 4194304\alpha^{12} + 25165824\alpha^{11} - 764411904\alpha^{10} - 3747086336\alpha^9 + 51195183104\alpha^8 + 186626736128\alpha^7 - 1387171545088\alpha^6 - 3323267602432\alpha^5 + 12891063802432\alpha^4 + 14865544006272\alpha^3 + 5932203099600\alpha^2 + 1041198915888\alpha + 68569798833.$$

例2. 给定椭圆 $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$ 和4次曲线 $(x - 3)^4 + (y - 5)^4 - 1 = 0$ 。得到方程组

$$\begin{cases} 0 = x_0^2 + 2y_0^2 - 1, \\ 0 = (x_0 + 2\alpha x_0 - 3)^4 + (y_0 + 4\alpha y_0 - 5)^4 - 1, \\ 0 = 4(x_0 + 2\alpha x_0 - 3)^3 + 2\mu x_0, \\ 0 = 4(y_0 + 4\alpha y_0 - 5)^3 + 4\mu y_0. \end{cases}$$

利用结式理论消去变量 x_0 、 y_0 和 μ ，得到一个关于 α 的50次单变量多项式方程。

本文提出了一个基于等距思想的最近距离计算方法。本文方法可以统一直接求解两条不相交的平面代数曲线间的最近距离。对于平面二次曲线间的最近距离，本文方法得到的单变量多项式方程的次数，比 [6, 7]中方法得到的多项式的相应次数都要低，从而可以降低求解方程过程中的计算复杂度或提高求解的稳定性。理论上，本文方法也适用于求解平面上一条代数曲线与一条参数曲线间的最近距离。

参考文献

- [1] Latombe J. C. Robot motion planning[M]. Boston: Kluwer Academic Publishers, MA, 1991.
- [2] Kim K-J. Minimum distance between a canal surface and a simple surface [J]. Computer-Aided Design, 2003, 35(10):871–879.
- [3] Chen X. D., Yong J. H., Zheng G. Q. , Paul J. C. and Sun J. G. Computing minimum distance between two implicit algebraic surfaces [J]. Computer-Aided Design, 2006, 38(10):1053–1061.
- [4] Jiménez P., Thomas F., and Torras C. 3D collision detection: a survey [J]. Computers & Graphics, 2001, 25(2):269 – 285.
- [5] Johnson D. E., Cohen E. A framework for efficient minimum distance computations [C]. In IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1998, pages 3678 – 3684.
- [6] Lennerz C., Schömer E. Efficient distance computation for quadratic curves and surfaces. In Proceeding of Geometric Modeling and Processing,2002, pages 60–69.
- [7] Sohn K-A, Jüttler B., Kim M-S, and Wang W. Computing distances between surfaces using line geometry [C]. In Pacific Conference on Computer Graphics and Applications, 2002, pages 236–245.
- [8] Chen X.D., Yong J.H., Zheng G.Q., and Sun J.G. Torus/Sphere intersection algorithm [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(6):1202–1206 (in chinese).
(陈小雕,雍俊海, 郑国勤,孙家广.圆环面/球面求交算法[J].计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(6):1202–1206.)

