



## Constrained Interpolation with Biarcs

Xu-Zheng Liu, Jun-Hai Yong, Guo-Qin Zheng, Jia-Guang Sun

► **To cite this version:**

Xu-Zheng Liu, Jun-Hai Yong, Guo-Qin Zheng, Jia-Guang Sun. Constrained Interpolation with Biarcs. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, Hujun Bao, 2007. <inria-00519197>

**HAL Id: inria-00519197**

**<https://hal.inria.fr/inria-00519197>**

Submitted on 18 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# 约束双圆弧插值

刘续征<sup>1,2</sup>, 雍俊海<sup>1</sup>, 郑国勤, 孙家广<sup>1,2</sup>

1. 清华大学软件学院, 北京, 100084

2. 清华大学计算机科学与技术系, 北京, 100084

(E-mail: liu-xz02@mails.tsinghua.edu.cn)

**摘要:** 提出一种构造双圆弧的算法, 该双圆弧的两个端点为给定的点, 在端点处的两个切向量为给定的切向量, 而且该双圆弧完全位于一条给定直线的一侧。这里的双圆弧包括C-型双圆弧和S-型双圆弧两种。对于C-型双圆弧, 分十二种情况给出不等式直接判断双圆弧是否满足位于给定直线一侧的约束条件。如果存在多个同时满足插值条件和直线约束条件的双圆弧, 则通过求解一个最小值问题, 选出最优的双圆弧。否则, 通过添加一个额外的点构造两段双圆弧。对于S-型双圆弧, 同时也给出一些带直线约束的插值结果。

**关键词:** 约束插值; 双圆弧; 直线约束

中图法分类号: TP391

## Constrained Interpolation with Biarcs

Liu Xu-Zheng<sup>1,2</sup>, Yong Jun-Hai<sup>1</sup>, Zheng Guo-Qin<sup>1</sup> and Sun Jia-Guang<sup>1,2</sup>

1 School of Software, Tsinghua University, Beijing, 100084

2 Department of Computer Science and Technology, Tsinghua University, Beijing, 100084

(E-mail: liu-xz02@mails.tsinghua.edu.cn)

**Abstract:** An algorithm to construct biarcs that not only match the interpolation requirement of the point positions and tangent vectors but also lie on one side of the constraint line is proposed. For C-type biarc interpolation with the line constraint, firstly twelve inequalities in total are provided according to different position relationships between the constraint line and the interpolation requirement. These inequalities are used to check if biarcs lie on one side of the constraint line. If there exist many biarcs satisfying both the interpolation requirement and the line constraint, the optimal biarc can be obtained by solving a minimum problem. Otherwise, one extra point is added to make it possible to obtain biarcs. For S-type biarc interpolation with the line constraint, some results are also listed.

**Keyword:** constrained interpolation; biarc; straight line constraint

### 0 引言

在曲线设计中, 插值方法占据着很重要的地位。当我们考虑一个插值问题时, 除了曲线通过给定的插值点外, 一般还要考虑满足其它的约束条件。根据不同的需求, 约束条件可以分为保形插值约束<sup>[1]</sup>、正约束<sup>[2]</sup>等等。当利用插值方法在一块多边形材料上设计加工边界时, 插值曲线必须完全位于多边形区域内, 此约束条件称为区域约束。区域约束可以视为正约束的推广, 还可以分解为多个直线约束。Goodman等<sup>[3]</sup>最早考虑带直线约束的有理三次样条插值问题; 对于同一问题, Ong等<sup>[4]</sup>给

出非参数的插值格式；在2004年，张彩明等<sup>[5]</sup>研究带直线约束的三次样条插值问题；Meek等<sup>[6-7]</sup>研究了利用有理样条构造插值曲线位于多义线围成的区域内。

三次样条插值曲线作为加工边界曲线进行数控加工之前，必须预处理，因为三次样条的offset曲线不能在CAD系统中精确表示。如果边界曲线是圆弧样条，则其偏移曲线可以在CAD系统中精确表示，这也就是圆弧样条应用比较广泛的原因。Bolton<sup>[8]</sup>较早研究了双圆弧，并应用在数控加工领域。孙家昶等<sup>[9-10]</sup>给出了广义双圆弧方法，拓广了双圆弧方法的应用范围。相继出现很多利用圆弧或者双圆弧插值或者逼近曲线的研究工作<sup>[11-14]</sup>。但是，据我们了解，带直线或者区域约束的圆弧样条插值问题的研究工作很少。Held等<sup>[14]</sup>研究了在给定误差条件利用双圆弧逼近多边形的问题。

双圆弧可以分为C型和S型双圆弧两类，一般地，利用C型双圆弧插值可以得到光滑的插值曲线，所以大多数的研究工作也集中在C型双圆弧插值问题。本文的研究重点在于带直线约束的C型双圆弧插值问题。如果存在多个同时满足插值条件和直线约束条件的双圆弧，首先结合传统的选优规则<sup>[15]</sup>选取最优的双圆弧。如果这个规则构造的双圆弧不满足直线约束，则通过求解一个极小值问题，选择最优的双圆弧。文中同时给出了求解极小值问题的近似算法。如果不存在满足约束条件的双圆弧，则通过增加一个额外的点，构造两段双圆弧。在实际应用中，S型双圆弧往往是不可避免的，文中同时给出带直线约束S型双圆弧插值问题的一些结果。与文献[14]中的工作相比，本文算法利用不等式直接判定双圆弧是否与约束直线相交，避免了求交计算；另一方面，得到的插值曲线不需要后处理就是 $G^1$ 连续的。

## 1 带直线约束的 C-型双圆弧插值

**定义1 带直线约束的双圆弧插值：**带直线约束的双圆弧插值是指构造满足下述条件的的双圆弧：双圆弧的两个端点为给定的点，两端点处的切向量为给定的切向量，并且完全位于给定直线的一侧。位于直线一侧的约束条件简称为直线约束条件，给定的直线称为约束直线。

假设给定两点  $A$ 、 $B$  和两切向  $T_A$ 、 $T_B$  插值条件，如果  $T_A$  和  $T_B$  不平行，分别使用  $A$ 、 $B$  和两向量  $T_A$ 、 $T_B$  为方向构造直线，记  $C$  为两直线的交点。如果  $T_A$  和  $T_B$  平行， $C$  则位于  $\infty$ 。令  $\angle CAB = \theta_1$ ， $\angle CBA = \theta_2$ 。利用插值条件构造一个双圆弧，记双圆弧的连接点为  $E$ 。连接点  $E$  从  $A$  到  $B$  的运动轨迹称为轨迹圆弧<sup>[16]</sup>，记  $O$  为轨迹圆弧的圆心，则连接点  $E$  可以由角度  $\beta = \angle EOB$  唯一确定。称  $E$  点左侧的圆弧为左圆弧，右侧的圆弧为右圆弧，并记右圆弧的圆心  $O_r$ ，如图1所示。利用这些符号，我们有下述性质。

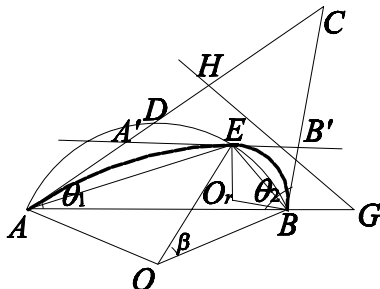


图1带直线约束的双圆弧插值

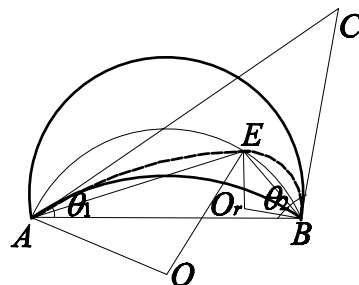


图2双圆弧的圆弧包围盒

**定理1** 对于满足插值条件的双圆弧，如果连接点  $E$  位于  $\triangle ABC$  内部，我们有：

- (1) 如果  $\theta_1 < \theta_2$ ，左圆弧位于轨迹圆弧下方，右圆弧位于轨迹圆弧上方；如果  $\theta_1 > \theta_2$ ，左圆弧位于轨迹圆弧上方，右圆弧位于轨迹圆弧下方；
- (2) 如果  $\theta_1 = \theta_2$ ，左圆弧和右圆弧均与轨迹圆弧重合。

如果  $\theta_1 = \theta_2$ ，带直线约束的双圆弧插值问题可以简称为两点对称插值问题（TPSI: two point symmetrical interpolation）。如果  $\theta_1 \neq \theta_2$  简称为两点不对称插值问题（TPNI: two point

non-symmetrical interpolation)。对于带直线约束的TPNI问题，不失一般性，我们假设 $\theta_1 < \theta_2$ ，如果 $\theta_1 > \theta_2$ ，可以得到类似的结论。

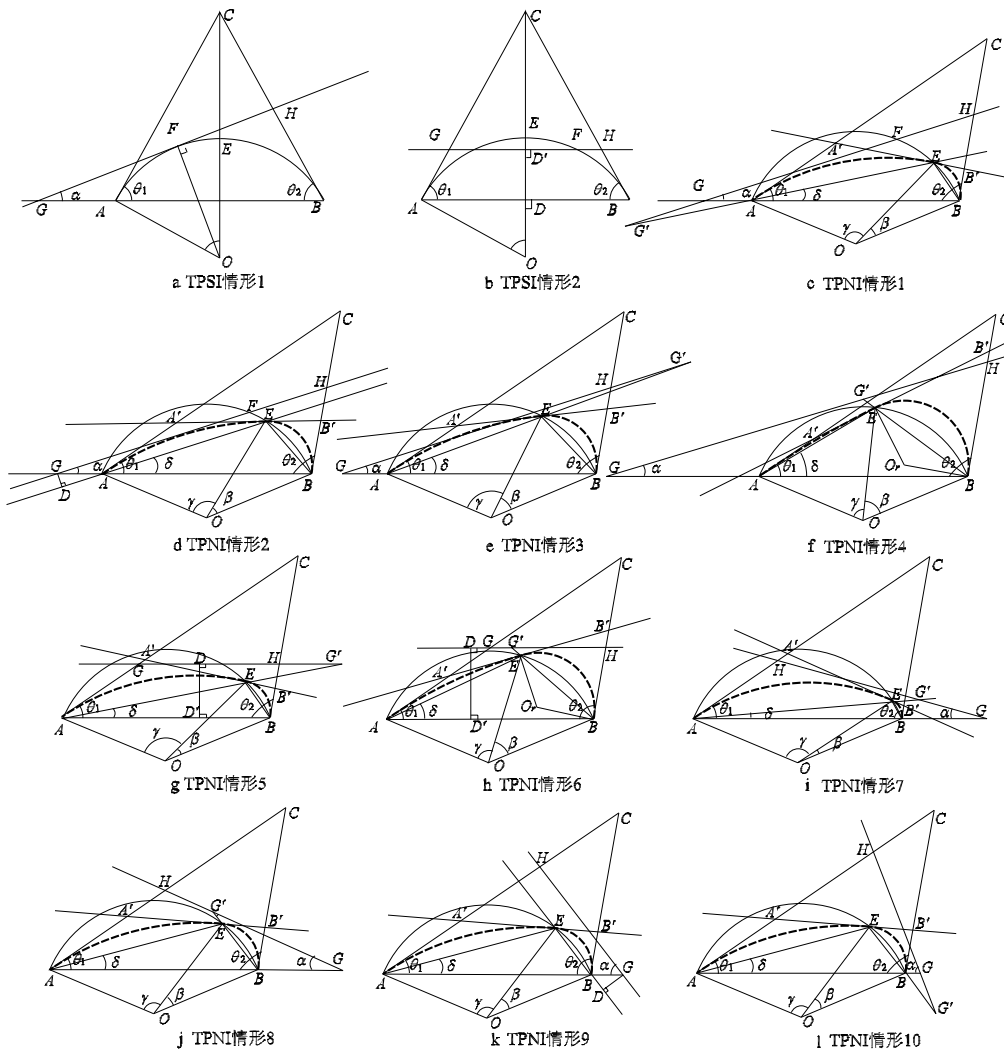


图3 带直线约束的C-型双圆弧插值

我们分两步判断一个双圆弧是否与直线相交。首先，分别使用一个点及其切向构造一个大圆弧和一个小圆弧作为双圆弧的包围盒<sup>[7]</sup>，利用包围盒性质排除部分不相交的情形。如图2所示，利用A点和方向AC为切向、B点和方向BC为切向分别可以构造两粗线圆弧，虚线表示的双圆弧位于两粗线圆弧组成的包围盒中。如果约束直线不与大小圆弧相交，则带直线约束的C-型双圆弧插值问题退化为无直线约束的情况。如果约束直线与大圆弧相交，但是不与 $\triangle ABC$ 相交，则带直线约束的C-型双圆弧插值问题也是退化的。如果约束直线与 $\triangle ABC$ 相交，由于插值点位于直线一侧，所以只可能与线段AC和BC相交。所以，这里我们只考虑约束直线与线段AC和BC相交的情形。

本节中记约束直线为GH，如果GH平行于AB，记G、H分别为约束直线与AC、BC的交点，且平行线间的距离记为 $|DD'|=h$ ；如果GH与AB相交，记G为GH与AB的交点，如果G位于A点的左侧，则记H为GH与BC的交点；如果G位于B点的右侧，则记H为GH与AC的交点。记左、右圆弧在连接点E处的公切线A'B'分别交线段AC、BC于A'、B'。如果约束直线与轨迹圆弧不相交，记F和约束直线与AC的交点重合，例如图1中，F与H重合；如果约束直线与轨迹圆弧相交一点，记交点为F，如图3(a)所示；如果约束直线与轨迹圆弧有两个交点，记位于右边的交点为F，如图3(b)所示。

### 1.1带直线约束的TPSI问题

记  $d = |AB|$ ，如果约束直线不平行于  $AB$ ，令  $G$  为约束直线与  $AB$  的交点，记  $d_1 = |GA|$ ， $\alpha = \angle HGA$ ，如图3(a)所示，双圆弧满足直线约束的充要条件是不等式(1)成立：

$$(2d_1 + d) \sin \theta_1 \sin \alpha + d \cos \theta_1 \cos \alpha \geq d \quad (1)$$

如果约束直线平行于  $AB$ ，令  $h = |DD'|$ ，如图3(b)所示，双圆弧满足直线约束的充要条件是不等式(2)成立：

$$d(1 - \cos \theta_1) \leq 2h \sin \theta_1 \quad (2)$$

## 1. 2带直线约束的TPNI问题

如图1所示，双圆弧的连接点  $E$  给定以后，公切线  $A'B'$  将被确定，左、右圆弧分别位于  $\triangle AA'E$  和  $\triangle BB'E$  的内部，如果约束直线与线段  $AE$  或者  $BE$  相交，则不存在双圆弧满足约束条件。因此，连接点  $E$  的选择应满足：约束直线不能与线段  $AE$  和  $BE$  相交。根据前面  $F$  点的定义，圆弧  $FB$  上任意一点作为连接点  $E$  可以满足上述条件。选定连接点  $E$  之后，根据公切线与约束直线的位置关系，仅需要判定左圆弧或者右圆弧是否与约束直线相交即可判定双圆弧是否与直线相交。

**定理2** 根据上述规则选取连接点  $E$  后，双圆弧以及公切线被唯一确定。约束直线至多与  $\triangle AA'E$  和  $\triangle BB'E$  之一相交。如果约束直线与  $\triangle AA'E$  相交，仅需要判断左圆弧是否与约束直线相交；如果约束直线与  $\triangle BB'E$  相交，仅需要判断右圆弧是否与约束直线相交。

本节我们不加说明使用下列记号： $d = |AB|$ ， $\theta_1 = \angle CAB$ ， $\theta_2 = \angle CBA$ ， $G$  为约束直线与  $AB$  的交点。当  $G$  位于  $A$  点左侧时，引入记号  $d_1 = |GA|$ ， $\alpha = \angle HGA$ 。分别对应图3(c)-(f)的四种不同的位置关系，则双圆弧满足直线约束的充要条件分别满足不等式(3)-(6)：

$$[2d_1 \sin \alpha \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + d \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin(\alpha - \frac{\beta}{2})] \sin(\theta_1 - \frac{\beta}{2}) \sin(\alpha - \frac{\beta}{2}) + \frac{d}{2} \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \cos(\theta_1 - \frac{\beta}{2}) \sin(2\alpha - \beta) \geq d \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin(\alpha - \frac{\beta}{2}) \quad (3)$$

$$d(1 - \cos(\theta_1 - \frac{\beta}{2})) \leq 2d_1 \sin \alpha \sin(\theta_1 - \frac{\beta}{2}) \quad (4)$$

$$[2d_1 \sin \alpha \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - d \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin(\frac{\beta}{2} - \alpha)] \sin(\theta_1 - \frac{\beta}{2}) \sin(\frac{\beta}{2} - \alpha) + \frac{d}{2} \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \cos(\theta_1 - \frac{\beta}{2}) \sin(\beta - 2\alpha) \geq d \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin(\frac{\beta}{2} - \alpha) \quad (5)$$

$$[2(d + d_1) \sin \alpha \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - d \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{2\alpha + \beta + \theta_2 - \theta_1}{2}] \sin \frac{2\alpha + \theta_1 + \theta_2 - \beta}{2} \sin \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} + d \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} \cos \frac{2\alpha + \beta + \theta_2 - \theta_1}{2} \sin \frac{2\alpha + \theta_1 + \theta_2 - \beta}{2} \geq d \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{2\alpha + \theta_1 + \theta_2 - \beta}{2} \quad (6)$$

当约束直线平行  $AB$  时，引入记号  $h = |DD'|$ 。我们有对应图3(g)和(h)两种位置关系，则双圆弧满足直线约束的充要条件分别满足不等式(7)、(8)：

$$[2h \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - d \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin \frac{\beta}{2}] \sin \frac{\beta}{2} \sin(\theta_1 - \frac{\beta}{2}) + \frac{d}{2} \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin \beta \cos(\theta_1 - \frac{\beta}{2}) \geq d \sin \frac{\beta}{2} \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \quad (7)$$

$$[2h \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - d \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin \frac{\beta}{2}] \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} + \frac{d}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2 - \beta) \cos \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} \geq d \sin \frac{\beta}{2} \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \quad (8)$$

当  $G$  位于  $B$  点右侧时，引入记号  $d_1 = |GB|$ ， $\alpha = \angle HGB$ 。分别对应图3(i)-(l)有四种不同的位置关系，相应的双圆弧满足直线约束的充要条件是分别满足不等式(9)-(12)：

$$[2(d + d_1) \sin(\frac{\beta}{2} + \alpha) \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - d \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin \alpha] \sin \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} \sin(\frac{\beta}{2} + \alpha) + d \sin \frac{\theta_1 + \theta_2 - \beta}{2} \sin \alpha \cos(\frac{\beta}{2} + \alpha) \cos \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} \geq d \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{\beta}{2}) \sin \alpha \quad (9)$$

$$[2d_1 \sin \alpha \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - d \sin \frac{\beta}{2} \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2 - \beta}{2} - \alpha)] \sin \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2 - \beta}{2} - \alpha) + \frac{d}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} \sin(\theta_1 + \theta_2 - \beta - 2\alpha) \geq d \sin \frac{\beta}{2} \sin(\frac{\theta_1 + \theta_2 - \beta}{2} - \alpha) \quad (10)$$

$$d(1 - \cos \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2}) \leq 2d_1 \sin \alpha \sin \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & [2d_1 \sin \alpha \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + d \sin \frac{\beta}{2} \sin(\alpha - \frac{\theta_1 + \theta_2 - \beta}{2})] \sin \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} \sin(\alpha - \frac{\theta_1 + \theta_2 - \beta}{2}) \\ & + \frac{d}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin(2\alpha + \beta - \theta_1 - \theta_2) \cos \frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2} \geq d \sin \frac{\beta}{2} \sin(\alpha - \frac{\theta_1 + \theta_2 - \beta}{2}) \end{aligned} \quad (12)$$

## 2 最优 C-型双圆弧

当添加直线约束之后,有可能不存在双圆弧同时满足插值条件和直线约束,也有可能存在无穷多个双圆弧满足条件。这里我们先讨论存在无穷多个双圆弧的情况。无穷多个双圆弧的选优问题可以转化为求解一个极小值问题。首先,我们采用一个传统的选优规则<sup>[15]</sup>进行优选,即求解极小值问题  $\min | \frac{R_l}{R_r} - 1 |$ , 其中  $R_l$ 、 $R_r$  分别是左、右圆弧的半径。该方法具有明显的几何意义,即最优双圆弧的连接点是  $\Delta ABC$  的内心。利用不等式(3)-(12)中的符号,极小值问题可以表示为  $\beta$  的函数:

$$f(\beta) = \min | \frac{R_l}{R_r} - 1 |, \quad (13)$$

其中  $R_l = d \sin \frac{\theta_1 + \theta_2 - \beta}{2} / (2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \sin(\theta_1 - \frac{\beta}{2}))$ 、 $R_r = d \sin \frac{\beta}{2} / (2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \sin(\frac{\theta_2 + \beta - \theta_1}{2}))$ 。可以证明对任意的  $\beta \in [0, \theta_1]$ , 函数  $f$  是递减的。在无直线约束条件下,根据传统规则,利用角度  $\beta = \theta_1$  可以构造最优的双圆弧。如果利用  $\beta = \theta_1$  构造的双圆弧不满足直线约束,选取满足直线约束条件的最大角度  $\beta$  构造最优的双圆弧。在满足直线约束条件下,最大角度  $\beta$  使式(13)达到极小值。

为了判断带直线约束的C-型双圆弧插值问题是否存在解,我们有下述性质:

**定理3** 利用角度  $\beta = 0$ , 可以构造一个C-型双圆弧, 如果这个双圆弧满足直线约束, 则存在无穷多个满足约束的双圆弧, 否则不存在满足直线约束条件的双圆弧。

为简化直线约束条件下式(13)的计算, 我们提出了角度二分算法:

### 算法1: 角度二分算法

- (1) 令  $\beta = 0$ , 如果  $\beta$  不能满足不等式(3)-(12)之一, 则令  $\beta = -1$ , 返回;
  - (2) 计算初始角度
    - (a) 如果约束直线与轨迹圆弧没有交点, 记  $F$  为约束直线与  $AC$  的交点;
    - (b) 如果约束直线与轨迹圆弧有一个交点, 记交点为  $F$ ;
    - (c) 如果约束直线与轨迹圆弧有两个交点, 记右边的交点为  $F$ ;
    - (d) 令  $\beta_1 = \angle FOB$ , 如果  $\beta_1 \geq \theta_1$ , 令  $\beta = \theta_1$ , 返回; 否则, 令  $\beta_0 = 0$ ,  $N$  是一正常数;
  - (3) 计算最大角度
    - (a) 如果  $\beta_1$  满足不等式(3)-(12)之一, 令  $\beta = \beta_1$ , 返回;
    - (b) 令  $\beta_{Mid} = (\beta_1 + \beta_0) / 2$ ,  $\beta = -1$
- for i = 1:N
- if  $\beta_{Mid}$  满足条件,
- $\beta_0 = \beta_{Mid}$ ;  $\beta_{Mid} = (\beta_1 + \beta_0) / 2$ ;  $\beta = \beta_{Mid}$
- else
- $\beta_0 = \beta_{Mid}$ ;  $\beta_{Mid} = (\beta_1 + \beta_0) / 2$ ;

在算法1中,  $N$  是指定的正常数, 实际计算中可以选取  $N \in [5, 10]$ 。

给定插值条件和直线约束, 并不总是存在C-型双圆弧同时满足两个条件。例如, 当  $\theta_1 = \theta_2$ , 并且约束直线与轨迹圆弧有两个交点时, 从定理1可知, 不存在双圆弧同时满足插值条件和直线约束。对于不存在双圆弧的情况, 通过增加额外的点及点的切向构造一对双圆弧。但是即使每一段双圆弧是最优的, 这两个双圆弧组成的曲线也不一定是最优的。这就涉及到如何选择最优额外点的问题。选优规则兼顾组合双圆弧曲线的光顺性以及约束直线的逼近程度。首先, 把额外点选在约束直线上, 切向为约束直线的方向, 则组合双圆弧曲线与约束直线相切。在约束直线上进一步选点可以转

化求解极小值问题。但是为了简化计算，我们在实际计算中采用算法2计算额外点。

**算法2：额外点选择算法**

- (1) 分别计算约束直线与线段  $AC$  ,  $BC$  的交点，记为  $G'$ 、 $H'$ ；
- (2) 选择线段  $G'H'$  的中点作为额外点，记为  $P$ ；
- (3) 定义  $P$  点的切向为约束直线的方向。

总结上述分析，给定两点  $A$ 、 $B$  两切向  $T_A$ 、 $T_B$  和约束直线  $L$ ，算法3可以构造同时满足插值条件和直线约束且近似最优的双圆弧。

**算法3：C-型双圆弧构造算法**

- (1) 计算  $A$ 、 $B$  的距离  $d$ ；
- (2) 如果约束直线  $L$  平行线段  $AB$ ，计算平行线间的距离记为  $h$ ；否则，计算  $L$  与  $AB$  的夹角  $\alpha$  和距离  $d_1$ ；
- (3) 选择最优的C-型双圆弧：
  - (a) 令  $\beta = \theta_1$ ，如果双圆弧同时满足插值条件和直线约束，转(4)；
  - (b) 使用算法1计算最大角度  $\beta$ ，如果  $\beta > 0$ ，转(4)；
  - (c) 如果  $\beta = -1$ ，利用算法2计算额外的点，构造一对双圆弧，返回；
- (4) 构造C-型双圆弧。

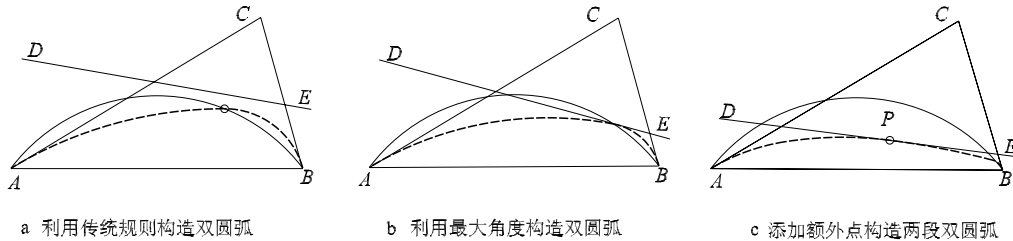


图4 构造C-型双圆弧的例子

图4给出了构造C-型双圆弧的三个例子。在图中  $A$  和  $B$  是两个插值点， $AB$ 、 $BC$  为对应点的切向， $DE$  为约束直线。实线圆弧为轨迹圆弧，虚线为算法3计算得到的双圆弧。在图4(a)中，令  $\beta = 0$ ，不等式(9)成立，由定理3，存在无限多个双圆弧满足条件。然后令  $\beta = \angle CAB$ ，不等式(7)成立，所以可以使用角度  $\beta = \angle CAB = 31.1339^\circ$  构造最优的双圆弧。在图4(b)中，采用类似的流程， $\beta = 0$  时，不等式(9)成立；接着利用角度  $\beta = \angle CAB$  测试不满足条件；我们使用算法1计算出最大角度  $\beta = 19.5070^\circ$ ，构造出最优的双圆弧。在图4(c)中，角度  $\beta = 0$ ，不满足任何的不等式，由定理3，不存在双圆弧同时满足插值条件和直线约束。利用算法2选择额外的一个点，构造两段双圆弧。

**3 带直线约束的 S-型双圆弧插值**

不同于 C-型双圆弧插值问题是，给定插值条件和直线约束总是存在无穷多个 S-型双圆弧同时满足条件。因为 S-型双圆弧引入了一个形变点，一般地，我们不要求 S-型双圆弧曲线的光顺性，这里仅给出几个构造 S-型双圆弧的例子，如图 5。图 5(a)、(b) 分别给出了约束直线  $GH$  与直线  $AB$  相交且交点位于  $A$  点左侧、约束直线与直线  $AB$  平行两种情况下构造 S-型双圆弧的示意图。与 C-型双圆弧插值问题类似，只需要检测左圆弧就可以判断双圆弧的是否与约束直线相交。因为在给定插值条件和直线约束总是存在无穷多个 S-型双圆弧同时满足条件，如果选定的角度  $\beta$  不能构造同时满足插值条件和直线约束的双圆弧，可以选择较小的角度构造 S-型双圆弧。如图 5(c)，利用角度  $\beta_1$  构造的 S-型双圆弧与约束直线相交，另一个较小的角度  $\beta_2$  构造的 S-型双圆弧满足直线约束。

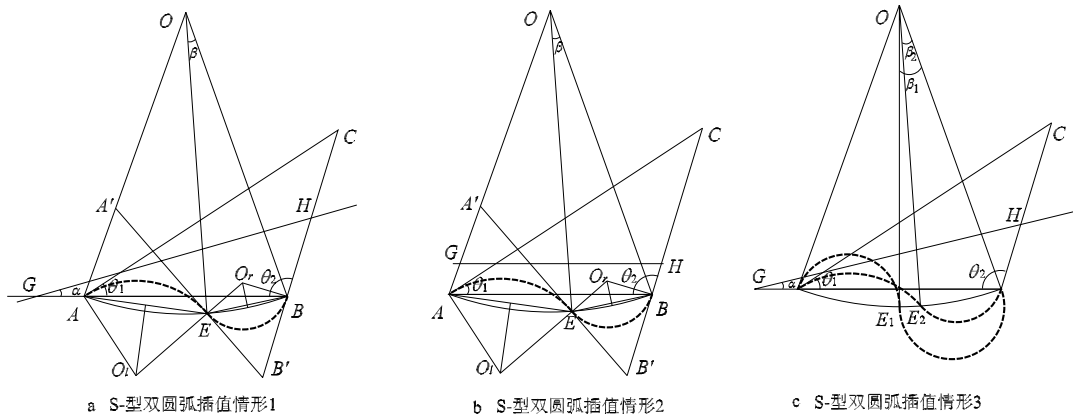


图5 构造S-型双圆弧的例子

#### 4 实验例子和结论

带直线约束的双圆弧插值问题可以直接推广到处理带区域约束的插值问题。例如引言中提到的多边形材料加工问题可以抽象为一个带区域约束的插值问题。这个问题分解为多个带直线约束的双圆弧插值问题。利用图6的例子，图6(a)的凸多边形区域内，有8个插值点，利用算法3可以构造出 $G^1$ 连续的圆弧样条边界曲线。图6(b)中有9个插值点且多边形区域是非凸的，我们引入一个S-型双圆弧（虚线表示），构造 $G^1$ 连续的圆弧样条曲线。

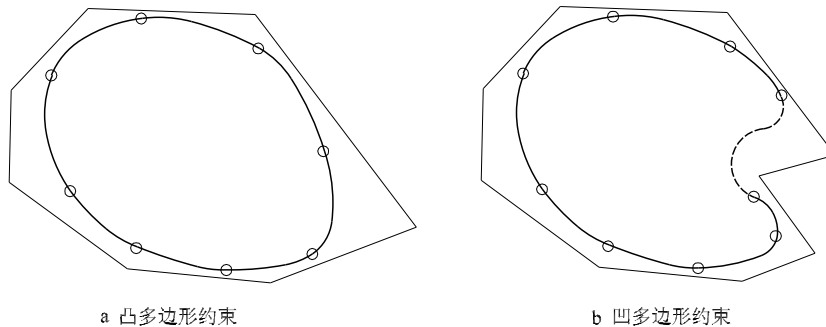


图6 多边形约束下的双圆弧插值

本文研究了带直线约束的双圆弧插值问题，对C-型双圆弧提出同时满足插值条件和直线约束的构造算法。算法中利用不等式直接检测双圆弧是否满足直线约束，并结合传统选优规则，得到近似最优的双圆弧；对S-型双圆弧列举了一些结果。今后的工作中还将讨论带复杂曲线约束的双圆弧插值问题。

#### 参考文献

[1] Goodman T N T. Shape preserving interpolation by curves [C] //Levesley J, Anderson I J, Mason J C. Algorithms for Approximation IV. Huddersfield: University of Huddersfield Press, 2002:24-35

[2] Lahtinen A, Positive Hermite interpolation by quadratic splines [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1993, 24(1):223-233

[3] Goodman T N T, Ong B H, Unsworth K. Constrained interpolation using rational cubic splines [C] //Farin G. Nurbs for Curve and Surface Design II. Philadelphia: Society for Industrial and Applied



- Mathematics, 1991:59-74
- [4] Ong H, Unsworth K. On non-parametric constrained interpolation [C] //Lyche T, Schmaker L L. Mathematical Methods in CAGD. Boston: Academic Press, 1992:419-430
- [5] Zhang C M, Yang X Q, Wang J Y. Approaches for constrained parametric curve interpolation [J]. Journal of Computer Science and Technology, 2003, 18(5):592-597
- [6] Meek D S, Ong B H, Walton D J. Constrained interpolation with rational cubics [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(5):253-275
- [7] Meek D S, Ong B H, Walton D J. A constrained guided  $G^1$  continuous spline curve [J]. Computer-Aided Design, 2003, 35(6):591-599
- [8] Bolton K M. Biarc curves [J]. Computer-Aided Design, 1975, 7(2):89-92
- [9] Sun J C, Zheng H L, On arc and biarc curve approximation [J], Mathematica Numerica Sinica, 1981, 2:97-112 (in Chinese)  
(孙家昶, 郑会琳, 曲线的圆弧逼近与双圆弧逼近[J], 计算数学, 1981, 2: 97-112)
- [10] Sun J C, Spline functions and Computational geometry [M], Beijing: Scientific Press, 1982 (in Chinese)  
(孙家昶, 样条函数与计算几何[M], 北京: 科学出版社, 1982)
- [11] Yong J H, Hu S M, Sun J G. A note on approximation of discrete data by arc splines [J]. Computer-Aided Design, 1999, 31(14):911-915
- [12] Yong J H, Hu S M, Sun J G. Bisection algorithms for approximating quadratic Bezier curves by  $G^1$  arc splines [J]. Computer-Aided Design, 2000, 32(4):253-260
- [13] Chen X D, Yong J H, Zheng G Q, Sun J G. Automatic  $G^1$  arc spline interpolation for closed point set [J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(12):1205-1218
- [14] Held M, Eibl J. Biarc approximation of polygons within asymmetric tolerance bands [J]. Computer-Aided Design, 2005, 37(4):357-371
- [15] Su B Q, Liu D Y. Computational geometry [M]. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1981(in Chinese)  
(苏步青, 刘鼎元, 计算几何, 上海: 上海科学技术出版社, 1981)
- [16] Sabin M A. The use of piecewise forms for the numerical determination of shape [D]. Budapest: Hungarian Academy of Sciences, 1977
- [17] Meek D S, Walton D J. Approximation of discrete data by arc splines [J]. Computer-Aided Design, 1992, 24(6):301-306

### 作者简介



刘续征 男, 1972 年生, 博士研究生, 主要研究方向为 CAD & CG、计算数学.



雍俊海 男, 1973 年生, 博士, 副教授, 主要研究方向为 CAD & CG、计算机动画、软件工程.



郑国勤 男，1967 年生，博士，副教授，主要研究方向为 CAD.



孙家广 男，1946 年生，教授，博士生导师, 中国工程院院士，主要研究方向为 CAD & CG、PDM、CIMS.

**作者联系方式:**

刘续征: 电话: 13641375335 E-mail: liu-xz02@mails.tsinghua.edu.cn

邮寄地址: 清华大学软件学院 (中央主楼 825 房间), 北京, 100084