Symétries dans les logiques non monotones

Belaïd Benhamou, Tarek Nabhani, Pierre Siegel

Symétries dans les logiques non monotones

Belaïd Benhamou **Tarek Nabhani** **Pierre Siegel** [1]

[1] Université de Provence
Laboratoire des Sciences de l'Information et des Systèmes (LSIS)
Centre de Mathématiques et d'Informatique.
39, rue Joliot Curie - 13453 Marseille cedex 13, France.
{Belaid.Benhamou;Tarek.Nabhani;siegel}@cmi.univ-mrs.fr

Résumé

La symétrie a été bien étudiée dans les logiques classiques et dans la programmation par contraintes depuis une décennie. Toutefois, en Intelligence Artificielle, nous avons l'habitude de manipuler des informations incomplètes qui nécessitent d'inclure l'incertitude dans le raisonnement sur la connaissance avec exceptions et la non-monotonie. Plusieurs logiques non classiques sont mises en place à cet effet, mais, selon nos connaissances, la symétrie dans ces logiques n'a pas encore été étudiée. Ici, nous nous sommes intéressés à étendre la notion de la symétrie à des logiques non classiques telles que les logiques préférentielles, X-logiques et les logiques des défautss, puis donner des nouvelles règles d'inférence par symétrie pour les X-logiques et les logiques des défauts. Enfin, nous avons montré comment le raisonnement par symétrie est rentable pour ces logiques et comment elles gèrent certaines symétries qui n'existent pas dans des logiques classiques.

Abstract

Symmetry had been well studied in classical logics and constraint programming since a decade. However, in Artificial Intelligence, we usually manipulate incomplete information and need to include uncertainty to reason on knowledge with exceptions and non-monotonicity. Several non classic logics are introduced for that purpose, but as far as we know, symmetry for these frameworks had not been studied yet. Here, we are interested in extending the notion of symmetry to that non classical logics such as Preferential logics, X-logics and Default logics, then give new symmetry inference rules for the X-logics and the Default logics. Finally, we show how symmetry reasoning is profitable for these logics and how they handle some symmetries that do not exist in classical logics.

1 Introduction

La symétrie est par définition un concept multidisciplinaire. Il apparaît dans de nombreux domaines allant des mathématiques à l'intelligence artificielle, la chimie et la physique. En général, elle revient à une transformation, ce qui laisse invariant (ne modifie pas sa structure fondamentale et/ou ses propriétés) d'un objet (un chiffre, une molécule, un système physique, une formule ou d'un réseau de contraintes ...). Par exemple, la rotation d'un échiquier 180 degrés donne un état qui ne se distingue pas de celui d'origine. La symétrie est une propriété fondamentale qui peut être utilisée pour étudier ces différents objets, analyser finement ces systèmes complexes ou pour réduire la complexité de calcul lorsqu'il s'agit de problèmes combinatoires.

Le principe de la symétrie dans l'IA a été introduit par Krishnamurthy [19] pour améliorer la résolution en logique propositionnelle. Les symétries des contraintes booléennes sont étudiées en profondeur dans [5, 6, 7]. Les auteurs ont montré comment détecter les symétries et ont prouvé que leur exploitation est une réelle amélioration de l'efficacité des plusieurs algorithmes de déduction automatique. Ensuite, de nombreux travaux de recherche sur les symétries ont apparu. Par exemple, l'approche statique utilisée par James Crawford et al. [11] pour les théories de logiques propositionnelles consiste à ajouter des contraintes qui exprime les symétries globales du problème. Cette technique a été améliorée dans [1] et étendu à "0-1 Integer Logic Programming" dans [2]. La notion d'interchangeabilité dans les problèmes de satisfaction de contraintes (CSPs) est introduite dans [14] et la symétrie pour les CSPs est étudiée plus tôt dans [21, 4]. Comme il faut ajouter un grand nombre de contraintes dans l'approche statique dans le domaine de CSPs, certains chercheurs ont proposé d'ajouter les contraintes lors de la recherche. Dans [3, 16, 17], les auteurs ajoutent certaines contraintes conditionnelles qui suppriment la symétrie de l'interprétation partielle en cas de retour arrière. Dans [13, 12, 22, 15], les auteurs ont proposé d'utiliser chaque sous-arbre comme un "no-good" pour éviter l'exploration de certaines interprétations symétriques [24]. Ensuite, Walsh, dans [27], a étudié des nouvelles propagateurs divers pour couper différentes symétries, parmi elles la symétrie agit simultanément sur les variables et les valeurs à la fois. En revanche, dans le cadre de l'intelligence artificielle, un paradigme important est de tenir compte des informations incomplètes (données incertaines, des informations révisables ...). Une composante essentielle de l'intelligence (qui est humaine, animale ou artificielle) est, en effet, liée à une certaine capacité d'adaptation du raisonnement. Contrairement à ce mode de raisonnement formalisé par une logique conventionnelle ou classique, le résultat déduit d'une information (à partir des connaissances, ou des croyances) n'est pas vrai, mais seulement probable dans le sens où il peut être invalide ou révisée lors de l'ajout d'une nouvelle information. Par exemple, il est admis qu'un oiseau normale vole. Ainsi, si l'on sait que Titi est un oiseau, alors on en conclut que, naturellement, Titi vole. Si on apprend par la suite que Titi est un pingouin, cette conclusion devra être révisée. Ceci est impossible dans une logique classique ayant la propriété de la monotonie : une information déduite d'une base de connaissances C, elle sera toujours vraie, si C est augmentée.

Pour gérer le problème des exceptions, plusieurs approches logiques ont été introduites dans l'intelligence artificielle. De nombreux formalismes non-monotones ont été présentés depuis une trentaine d'années, mais le problème de la symétrie dans ce cadre n'a pas été étudié. Le raisonnement en utilisant la symétrie est cependant pertinent pour la représentation des connaissances et le raisonnement non-monotone. Par exemple, dans l'exemple précédent, il est intéressant de considérer que les oiseaux normaux appartiennent à la même classe en respectant certaines propriétés de base, puis ils sont tous symétriques dans ce sens.

Dans ce travail, nous étudions la symétrie dans trois logiques non-classiques : la logique préférentielle [9, 10, 25, 8, 18], la X-logique [26] et la logique des défauts [23]. Le reste du papier est organisé comme suit : La section 2 donne les principales définitions de la symétrie dans la logique propositionnelle. Dans la section 3, on va étudier la symétrie dans les logiques préférentielles. Section 4 étend la symétrie au formalisme X-logique. Nous allons présenter dans la section 5 la symétrie dans la logique des défauts. Enfin, la section 6 conclut le travail et donne quelques perspectives.

2 Symétrie dans la logique propositionnelle

Tout d'abord, nous donnons la définition de symétrie sémantique dans la logique propositionnelle :

Définition 1 (Symétrie sémantique) *Soient F une formule propositionnelle sous la forme CNF et L_F son ensemble complet de littéraux* [1]*. Une symétrie sémantique de F est une permutation σ définie sur L_F telle que $F \models \sigma(F)$ et $\sigma(F) \models F$.*

En d'autres termes, une symétrie sémantique d'une formule est une permutation de littéraux qui conserve l'ensemble des modèles de la formule. Elle conserve également l'ensemble des no-goods (contre modèles). Maintenant, nous rappelons la définition d'une symétrie plus restreinte, qui est la symétrie syntaxique [5, 6] et qui peut être calculée de manière efficace.

Définition 2 (Symétrie syntaxique) *Soient F une formule propositionnelle sous la forme CNF et L_F son ensemble complet de littéraux. Une symétrie syntaxique de F est une permutation σ définie sur L_F telle que les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\forall l \in L_F, \sigma(\neg l) = \neg\sigma(l)$,
2. $\sigma(F) = F$

Une symétrie syntaxique d'une formule est une permutation de variables qui laisse invariant la formule. Il est trivial de voir que chaque symétrie syntaxique est une symétrie sémantique mais, en général, l'inverse n'est pas vérifié.

En revanche, Krishnamurthy a introduit la règle de la symétrie ci-dessous pour augmenter le système de preuves par résolution.

Proposition 1 *Si L est la logique propositionnelle, A un ensemble de formules de L, B une formule de L et σ une symétrie syntaxique de A, alors la règle de la symétrie peut être définie comme suit :*

$$\frac{A \vdash B}{A \vdash \sigma(B)}$$

Plusieurs problèmes difficiles de la résolution ont été démontrés polynomiaux en utilisant la symétrie dans la résolution. Nous verrons dans la section 4 comment étendre cette règle à des logiques non-monotones.

Maintenant, nous présentons la contribution principale de ce travail qui consiste à étendre la symétrie aux logiques non-monotones.

1. L'ensemble complet des littéraux de F est un ensemble qui contient toutes les variables de F et leurs négations.

3 Symétrie dans la logique préférentielle

Ici, nous étendons la notion de la symétrie dans le cadre des logiques préférentielles.

Par exemple, il est admis qu'un étudiant normal est jeune. Ainsi, si l'on sait que John est un étudiant, on en conclut assez naturellement que John est jeune. Si on apprend par la suite que John est âgé de cinquante ans, la conclusion "John est jeune" sera révisée.

Il est donc important de considérer que les étudiants normaux appartiennent à la même classe, car ils sont tous symétriques par rapport à la propriété *normal*.

Au départ, le plus simple est de partir d'une approche préférentielle, telle qu'il a été initié par Bossu-Siegel [9, 10], repris aussi par Shoam [25] et Besnard-Siegel [8], puis par Kraus, Lehmann et Magidor dans [18]. Toutes ces approches sont construites sur une logique classique (calcul propositionnel, calcul des prédicats, logique modale), où la sémantique de l'inférence a été donnée par "une formule A implique une formule B si chaque modèle de A est un modèle de B". Cependant, une approche préférentielle, dans sa forme la plus générale, dit "A implique B si tous les modèles préférés de A sont des modèles de B". Les modèles préférés de A sont des modèles qui ont des propriétés utiles pour la gestion des exceptions. Ce concept de préférence peut être défini par une relation de préordre (une relation transitive et réflexive) sur les interprétations. Les modèles préférés étant les modèles minimaux pour cette relation. Pour notre exemple élémentaire, si I et J sont des interprétations et l'information pertinente est "jeune", alors la relation de préordre peut être définie par : $I \prec J$ si et seulement si toute personne jeune en J est jeune dans I.

Définition 3 *Soient L une logique classique et F l'ensemble des formules de L. Si A est un sous-ensemble de formules (ou une formule) de F, alors $\bar{A}$ est l'ensemble des formules logiquement impliquées par A. L'ensemble des formules A est déductivement clos si $A = \bar{A}$.*

Définition 4 *Une relation préférentielle $\prec$ est une relation de préordre (transitive et réflexive) sur les interprétations. Par ailleurs, si la relation $\prec$ est antisymétrique, alors $\prec$ devient un ordre.*

Intuitivement, on peut considérer les étudiants qui ne sont pas jeunes comme des exceptions (étudiants anormaux). Par conséquent, $I \prec J$ si l'ensemble des exceptions de I est inclus dans l'ensemble des exceptions de J.

Définition 5 *Si A est un ensemble de formules, un modèle minimal M de A est une interprétation qui satisfait A (ie $M \vdash A$) et qui est minimale par rapport à la relation $\prec$ définie sur l'ensemble des modèles de A. Autrement dit, si M' est un modèle de A tel que $M' \prec M$, alors $M \prec M'$ (ou de manière équivalente, $M' = M$ si $\prec$ est antisymétrique).*

Définition 6 *De façon classique, si $\prec$ est une relation préférentielle, on définit l'inférence logique de modèles préférentiels $\vdash_\prec$ comme suit : $A \vdash_\prec B$ si et seulement si chaque modèle minimal de A est un modèle de B.*

Nous pouvons trouver dans [26] la proposition suivante :

Proposition 2 *Si un langage L a un ensemble fini de variables, alors chacune de ses formules consistantes F a au moins un modèle minimal, et pour chaque modèle de M de F, il existe un modèle minimal M tel que $M' \prec M$.*

Remarque 1 *La logique propositionnelle satisfait les conditions de la Proposition 2. Chaque formule propositionnelle cohérente F admet au moins un modèle minimal, et pour chaque modèle de M de F, il existe un modèle minimal M' de F tel que $M' \prec M$.*

Exemple 1 *Pour représenter les énoncés "En général, les étudiants sont jeunes" et "Lea est un étudiant", nous pouvons utiliser une approche préférentielle, close pour la circonscription [20]. Un prédicat supplémentaire "anormale" est ajouté et notre premier énoncé est traduit en "Un étudiant qui n'est pas anormal est jeune". Maintenant, si les prédicats St, Ab, et Yo, indique respectivement "étudiants", "anormale" et "jeune", alors, dans la logique de premier ordre, on obtient l'ensemble des formules suivant :*

$$A \equiv \{St(Lea), \forall x(St(x) \wedge \neg Ab(x)) \rightarrow Yo(x)\}$$

Par instanciation de la variable x par la constante Lea, nous traduisons l'ensemble des formules en logique propositionnelle et on obtient l'ensemble suivant de formules :

$$A \equiv \{St(Lea), (St(Lea) \wedge \neg Ab(Lea) \rightarrow Yo(Lea)\}$$

Ainsi :

$$A \equiv \{St(Lea), Ab(Lea) \vee Yo(Lea)\}$$

L'ensemble A possède huit interprétations, parmi aux, les trois suivantes sont des modèles :

$$\begin{aligned} M_1 &= \{St(Lea), Ab(Lea), Yo(Lea)\} \\ M_2 &= \{St(Lea), \neg Ab(Lea), Yo(Lea)\} \\ M_3 &= \{St(Lea), Ab(Lea), \neg Yo(Lea)\} \end{aligned}$$

Dans une logique classique, il est impossible de déduire de A que Lea est jeune. En effet, A possède deux modèles dans lesquels Lea est jeune (M_1 et M_2), et des modèles dans lesquels Lea n'est pas jeune, en particulier ceux où Lea est anormal (M_3). Pour obtenir le résultat "Lea est jeune", on préférera les modèles qui ont moins d'étudiants anormaux. Ainsi, dans une approche de modèles préférentiels, la relation $\prec$ peut être définie comme : $M \prec M'$ si et seulement si "chaque individu qui est anormal dans M est anormal dans M'". Selon cette relation, nous obtenons les préférences suivantes entre les modèles de A : $M_1 \prec M_3$, $M_3 \prec M_1$, $M_2 \prec M_1$, $M_2 \prec M_3$. Par conséquent, A n'a qu'un seul modèle minimal qui est M_2, et

Lea est jeune dans ce modèle. On peut donc en déduire que Lea est jeune dans cette approche préférentielle. Il est alors important d'en déduire toutes les symétriques du littérale $Yo(Lea)$ par rapport à cette relation de préférence.

3.1 Symétrie

Maintenant, on étend la définition de la symétrie sémantique à la logique de modèles préférentiels et on montre comment les littéraux peuvent être symétriques dans cette logique non-classique, mais pas symétrique dans une logique classique.

Définition 7 (Symétrie préférentielle sémantique) *Si $\vdash_{\prec}$ est une inférence de modèles préférentiels, A est un ensemble de formules et σ une permutation définie sur les littéraux de A, alors σ est une symétrie de A, si et seulement si A et $\sigma(A)$ ont le même ensemble de modèles minimaux.*

Définition 8 *Deux littéraux ℓ et ℓ' sont symétriques dans A si et seulement si il existe une symétrie préférentielle sémantique σ de A tel que $\sigma(\ell) = \ell'$.*

Exemple 2 *Si on prend l'exemple précédent et on ajoute le fait que "John est un étudiant", alors on obtient la formule suivante : $A' = \{St(Lea), St(John), Ab(Lea) \vee Yo(Lea), Ab(John) \vee Yo(John)\}$ qui admet neuf modèles. Il est facile de voir que les personnes Lea et $John$ sont symétriques dans les deux logiques : classique et préférentielle. Cela dans le sens que chaque littéral, où Lea apparaît, est symétrique au littéral où l'on remplace $John$ par Lea. Si nous considérons les "anormaux" comme une information pertinente sur laquelle la préférence et la permutation $\sigma = (St(Lea), St(John))(Ab(Lea), Ab(John))$ $(Yo(Lea), Yo(John))$ sont fondées, alors on peut facilement voir que σ est une symétrie préférentielle sémantique de la formule A'. En effet, il existe un modèle minimal qui est $M = \{St(Lea), St(John), \neg Ab(Lea), \neg Ab(John),$ $Yo(Lea), Yo(John)\}$ qui est conservé par σ. Nous pouvons voir que les littéraux $Yo(Lea)$ et $Yo(John)$ sont symétriques ainsi que $Ab(Lea)$ et $Ab(John)$.*

Maintenant, si l'on ajoute à A' l'information "John n'est pas anormal", alors $Yo(Lea)$ et $Yo(John)$ ainsi que $\neg Ab(Lea)$ et $\neg Ab(John)$ restent symétriques deux à deux dans la logique préférentielle. Puisque M reste le seul modèle minimal de la théorie où tous les littéraux sont vraies. Cependant, les littéraux $Yo(Lea)$ et $Yo(John)$ ne sont pas symétriques dans la logique classique. En effet, la nouvelle formule contient les trois modèles étendus suivants :

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{St(Lea), St(John), Ab(Lea), Yo(Lea),\\
&\quad \neg Ab(John), Yo(John)\}\\
M_2 &= \{St(Lea), St(John), \neg Ab(Lea), Yo(Lea),\\
&\quad \neg Ab(John), Yo(John)\}\\
M_3 &= \{St(Lea), St(John), Ab(Lea), \neg Yo(Lea),\\
&\quad \neg Ab(John), Yo(John)\}
\end{aligned}
$$

où ces littéraux ne sont pas symétriques. Nous pouvons voir par exemple que le modèle M_3 ne reste pas un modèle si l'on permute $Yo(Lea)$ et $Yo(John)$.

Il est alors important de voir que certains littéraux pourraient être symétriques dans une approche préférentielle, mais non symétriques dans une logique classique. Cette idée est nouvelle et prometteuse pour le raisonnement en utilisant la symétrie dans des logiques non classiques.

Dans la section suivante, nous essayons d'étendre la notion de la symétrie syntaxique à des logiques non-classiques. Pour ce faire, nous avons choisi la X-logique [26] comme un cadre de référence.

4 Symétrie dans la X-Logique

Nous avons vu qu'il est facile d'étendre la notion de la symétrie sémantique aux logiques de modèles préférentiels, mais la définition de la symétrie syntaxique dans ces logiques semble ne pas être triviale. Pour ce faire, nous allons utiliser la X-logique [26] qui semble avoir quelques propriétés syntaxiques importantes que nous allons utiliser pour étendre la notion de la symétrie syntaxique aux logiques non-classiques.

Définition 9 (X-logique) *Soit X un ensemble de formules de la logique propositionnelle L (X n'est pas nécessairement déductivement clos). La relation d'inférence non-monotones $\vdash_X$ est définie par $A \vdash_X B$ si et seulement si $(\overline{A \cup B}) \cap X \subseteq \bar{A} \cap X$.*

Remarque 2
- *En d'autres termes, $A \vdash_X B$ si tout théorème de $(\overline{A \cup B})$, ce qui est dans X, est aussi un théorème de $\bar{(A)}$. Cela veut dire, en ajoutant la connaissance B à A, l'ensemble des théorèmes qui sont en X n'augmente pas. Comme l'inférence logique classique $\vdash$ est monotone, alors nous avons également $\bar{A} \cap X \subseteq (\overline{A \cup B}) \cap X$, et par conséquent, il est possible de définir l'inférence dans la X-logique par $A \vdash_X B$ si et seulement si $(\overline{A \cup B}) \cap X = \bar{A} \cap X$.*
- *Pour le cas particulier où $X = F$ (l'ensemble de toutes les formules possibles de la logique L), l'inférence $\vdash_X$ est identique à l'inférence classique $\vdash$. En revanche, si X est vide, alors toute formule B peut être déduite par A.*

L'ensemble X peut être considérée comme un potentiomètre qui règle l'inférence. Intuitivement, si une formule

A encode une information (des connaissances, ou de certaines croyances ..), X peut être considéré comme l'ensemble des informations "pertinentes". L'ensemble A implique un ensemble d'information B, pour l'inférence dans la X-logique, si l'ajout de B à A ne produit pas de formules plus pertinentes que celles produites par A seul.

4.1 Symétrie

Maintenant, nous allons traiter la symétrie dans les X-logiques. Nous étendrons la définition de la symétrie syntaxique au cadre de la X-logique et donnerons une règle étendue de la symétrie qui peut être utilisée pour faire des courtes démonstrations en utilisant des formules symétriques dans ce cadre.

Définition 10 *Soient A un ensemble de formules de la logique propositionnelle, X le sous-ensemble de formules pertinentes sur lequel l'inférence $\vdash_X$ de la X-logique est construite et σ une permutation de littéraux. La permutation σ est une symétrie syntaxique de A dans la X-logique considérée, si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. $\sigma(A) = A$,
2. $\sigma(X) = X$

Maintenant, nous étendons la règle de la symétrie de Krishnamurthy au cadre de la X-logique.

Proposition 3 *Soient A et B deux formules ou deux ensembles de formules de la logique classique L et σ une symétrie syntaxique de A dans la X-logique considérée. Nous avons la règle suivante :*

$$\frac{A \vdash_X B}{A \vdash_X \sigma(B)}$$

***Preuve* 1** *Pour prouver que $A \vdash_X \sigma(B)$ nous allons prouver que $\overline{A \cup \sigma(B)} \cap X = \bar{A} \cap X$. Nous avons l'hypothèse $A \vdash_X B$, d'où on a $(\overline{A \cup B}) \cap X = \bar{A} \cap X$. Puisque σ est une symétrie syntaxique de A dans la X-logique, alors il préserve les théorèmes de la logique propositionnelle. Ainsi, nous avons $\sigma(\overline{A \cup B} \cap X) = \sigma(\bar{A} \cap X)$ ce qui équivaut à $\sigma(\overline{A \cup B}) \cap \sigma(X) = \sigma(\bar{A}) \cap \sigma(X)$. Cela donne $\overline{\sigma(A \cup B)} \cap \sigma(X) = \overline{\sigma(A)} \cap \sigma(X)$ ce qui équivaut aussi à $\overline{\sigma(A) \cup \sigma(B)} \cap \sigma(X) = \overline{\sigma(A)} \cap \sigma(X)$. Comme A et X sont invariantes par σ, alors on en déduit $\overline{A \cup \sigma(B)} \cap X = \bar{A} \cap \sigma(X)$. Par conséquent, $A \vdash_X \sigma(B)$.*

Exemple 3 *Prenons l'exemple des étudiants codés par l'ensemble de formules suivant :$A' = \{St(Lea), St(John), Ab(Lea) \vee Yo(Lea), Ab(John) \vee Yo(John)\}$. Considérons l'ensemble $X = \{\neg Ab(Lea), \neg Ab(John)\}$ et la permutation : σ=$(St(Lea), St(John))(Ab(Lea), Ab(John))$ $(Yo(Lea), Yo(John))$. La permutation σ est une symétrie de la X-logique de A'. Nous avons $A' \vdash_X Yo(Lea)$, et par la symétrie, nous avons $A' \vdash_X Yo(John)$ puisque $\sigma(Yo(Lea)) = Yo(John)$.*

Cette règle pout être utilisée pour déduire toutes les formules symétriques d'une formule inferée dans la X-logique considérée. Sa mise en oeuvre dans un démonstrateur permettra de raccourcir les preuves d'un théorème.

Dans la prochaine section, nous étendons la symétrie à une logique plus générale, connue comme une logique non-monotone, qui est la logique des défauts introduit par Reiter [23].

5 Symétrie dans la logique des défauts

Nous étudions dans cette section la notion de la symétrie dans les logiques des défauts. Une logique des défauts est une logique non-monotone qui est introduite par Reiter [23] pour formaliser le raisonnement par des hypothèses de défaut. Avant de traiter la symétrie dans cette logique, nous introduisons cetaines notions préliminaires.

5.1 Préliminaires

Définition 11 *Une théorie des défauts T est une paire $\langle D, W\rangle$ où W est un ensemble de formules logiques de premier ordre, appelé* la théorie de base*, qui formalisent les faits qui sont connus avec certitude. D est un ensemble de* règles de défaut*, chacune étant de la forme :*

$$\frac{Prerequis : Justification_1, \ldots, Justification_n}{Conclusion}$$

Intuitivement, cela signifie que par défaut, si le $Prerequis$ est vrai, et chaque $Justification_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ est consistante avec nos croyances actuelles, alors nous sommes amenés à croire que $Conclusion$ est vraie, et on l'infère (on l'ajoute à la théorie). Pour définir formellement le sens d'une règle de défaut, nous avons besoin d'introduire avant cela, la notion importante d'extensions dans une logique des défauts.

Une extension d'une théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$ est un ensemble de formules déductivement clos E contenant W et qui vérifie : si $\frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_n}{\gamma} \in D$ est un défaut tel que $\alpha \in E$ et $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \neg\beta_i \notin E$, alors $\gamma \in E$. Formellement :

Définition 12 *Si $Th(E)$ est l'ensemble des conséquences logiques de l'ensemble des formules E, alors E est une extension de la théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$ si et seulement si $E = \bigcup_{i=0,\ldots,\infty} E_i$ et les conditions suivantes sont vérifiées : $E_0 = W$, et*
$\forall i \geq 0, E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{\gamma : \frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_n}{\gamma} \in D, \alpha \in E_i, \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \neg\beta_j \notin E\}$

Une règle de défaut $\frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_n}{\gamma}$ peut être appliquée à une théorie donnée des défauts $T = \langle D, W\rangle$ si son prérequis α est dans W, et la négation de chacun de ses justifications $\neg\beta_j$ n'est pas dans l'extension E.

Remarque 3 *1. Lorsque tous les défauts de la théorie sont normaux (i.e. sous la forme $\frac{\alpha:\beta}{\beta}$), la condition de la justification $\neg\beta \notin E$ est simplifiée en $\neg\beta \notin E_i$. Nous obtenons, alors, une méthode plus simple et constructif pour construire l'extension E.*

2. Les règles de défaut peuvent être appliquées dans un ordre différent et cela peut conduire à différentes extensions E pour la même théorie T.

3. Si un défaut contient des formules avec des variables libres, il est considéré comme représentant de l'ensemble de toutes les défauts obtenus en donnant une valeur à toutes ces variables.

Exemple 4 *Prenons par exemple la règle de défaut "généralement, les oiseaux volent "qui est formalisé par le défaut suivant : $D = \left\{\frac{Bird(X):Flies(X)}{Flies(X)}\right\}$. Cette règle signifie que, si X est un oiseau et si l'on peut supposer qu'il vole, alors nous pouvons conclure qu'il vole. Une théorie de base contenant des faits sur les oiseaux est la suivante : $W = \{Bird(Condor),\ Bird(Penguin),\ \neg Flies(Penguin),\ Flies(Eagle)\}$. On obtient alors la théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$.*

Selon cette règle de défaut, un condor vole parce que $Bird(Condor)$ est vrai et la justification $Flies(Condor)$ n'est pas incompatible avec ce qui est actuellement connu. Au contraire, nous savons qu'un pingouin ne vole pas ($\neg Flies(Penguin)$). Ainsi, $Bird(Penguin)$ ne permet pas de conclure $Flies(Penguin)$, même si la prérequis $Bird(Penguin)$ est vrai, car la justification $Flies(Penguin)$ est incompatible avec ce qui est connu. Par conséquent, nous obtenons une extension unique pour la théorie T, ce qui est :
$E = \{Bird(Condor), Bird(Penguin), \neg Flies(Penguin), Flies(Eagle), Flies(Condor)\}$.

La notion la plus importante dans une logique des défauts est le calcul des extensions d'une théorie des défauts. Selon cet ensemble d'extensions, les chercheurs ont défini des sémantiques différentes pour la logique des défauts. L'implication d'une formule depuis d'une théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$ peut être défini en différentes façons :

Définition 13 *étant donné une théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$ et l'ensemble de tous ses extensions E_T.*

- **Approche sceptique :** *une formule f est impliqué de la théorie des défauts T si elle est impliquée de tous ses extensions, c'est-à-dire $T \vdash_S f$ si et seulement si $\forall E \in E_T, E \vdash f$.*
- **Approche crédule :** *une formule f est impliqué de la théorie des défauts T si elle est impliquée au moins d'une de ses extensions, c'est-à-dire $T \vdash_C f$ si et seulement si $\exists E \in E_T : E \vdash f$.*
- **Approche semi-crédule :** *une formule f est impliqué de la théorie des défauts T si elle est impliquée au moins d'une de ses extensions et tous ces extensions n'implique pas sa négation, c'est-à-dire $T \vdash_{SC} f$ si et seulement si $\exists E \in E_T : E \vdash f$ et $\forall E \in E_T, E \nvdash \neg f$.*

5.2 Symétrie

Maintenant, nous introduisons la notion de la symétrie dans la logique des défauts et on montre comment l'implication est améliorée par la propriété de la symétrie. Pour cette logique, nous distinguons deux niveaux de symétrie : la symétrie sémantique et la symétrie syntaxique. On va définir dans ce qui suit les deux symétries et on va étudier leur relation.

Définition 14 (Symétrie sémantique) *étant donné une théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$, L_T est l'ensemble de ses littéraux et E_T l'ensemble de toutes ses extensions. Une symétrie sémantique σ est une permutation de littéraux définie sur L_T telle que $E_T = E_{\sigma(T)}$.*

En d'autres termes, une symétrie sémantique d'une théorie des défauts T est une permutation de variables qui laisse invariant l'ensemble de ses extensions. Il résulte de là que chaque extension $E_i \in E_T$ est transformé par la symétrie σ à une autre extension $E_j = \sigma(E_i)$. Ces extensions sont ce que nous appelons *extensions symétriques*. Il est alors possible d'obtenir une famille des extensions symétriques, sans duplication des efforts, si nous savons que E_i est une extension et nous avons le groupe de symétrie de la théorie T. Malheureusement, le calcul de la symétrie sémantique est coûteux au niveau de temps, car il a besoin de calculer toutes les extensions. Dans ce qui suit, nous allons définir la symétrie syntaxique et on montre qu'il y a une condition suffisante pour cette symétrie et il peut être calculer d'une manière efficace.

Définition 15 (Symétrie syntaxique) *étant donné une théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$. Une symétrie syntaxique est une permutation σ définie sur l'ensemble L_T de littéraux de T, qui laisse la théorie T invariant. C'est-à-dire $\sigma(T) = T$, plus précisément, les conditions suivantes sont vérifiées : $\sigma(D) = D$ et $\sigma(W) = W$.*

Exemple 5 *Prenons l'exemple des étudiants discuté avant et considérer la théorie des défauts suivante $T = (\{\frac{St(X):\neg Ab(X)}{Yo(X)}\}, \{St(Lea), St(John)\})$. La permutation $\sigma = (St(Lea), St(John))(Ab(Lea), Ab(John))$ $(Yo(Lea), Yo(John))$ est une symétrie syntaxique, car* *il laisse invariant T. En considérant toutes les instanciations terminal des variables libres des défauts de la théorie T, nous pouvons voir que T a une extension $E = \{St(Lea), St(John), Yo(Lea), Yo(John)\}$ qui reste invariant sous σ. On peut voir que σ est aussi une symétrie sémantique.*

Maintenant, si nous ajoutons $Yo(John)$ à l'ensemble des faits de la théorie T de l'exemple précédent, nous obtenons une nouvelle théorie T' pour laquelle σ n'est pas une symétrie syntaxique. Cependant, σ reste une symétrie sémantique de T, puisque la nouvelle théorie T' a la même extension E comme T. Cet exemple illustre que la symétrie sémantique contient la symétrie syntaxique.

Nous donnons dans le théorème suivant la relation entre la symétrie syntaxique et la symétrie sémantique d'une logique des défauts.

Théorème 1 *étant donné une théorie des défauts T. Si σ est une symétrie syntaxique de T, alors σ est une symétrie sémantique de T.*

***Preuve* 2** *La preuve est triviale. Puisque σ est une symétrie syntaxique, alors $\sigma(T) = T$. Donc, $E_T = E_{\sigma(T)}$.*

Maintenant, nous pouvons introduire la nouvelle règle d'inférence par symétrie dans les logiques des défauts. Prenons, par exemple, l'inférence sceptique $\vdash_S$.

Proposition 4 *Soient T une théorie des défauts, f une formule et σ une symétrie syntaxique de T, alors on a la règle suivante :*

$$\frac{T \vdash_S f}{T \vdash_S \sigma(f)}$$

***Preuve* 3** *Pour montrer que $T \vdash_S \sigma(f)$, on a besoin de prouver que $\forall E_k \in E_T, E_k \vdash \sigma(f)$. Soit $E_i \in E_T$, par la définition de la symétrie σ, il existe $E_j \in E_T$ telle que $E_i = \sigma(E_j)$. Par hypothèse, nous avons $T \vdash_S f$. Ainsi $E_j \vdash f$, alors $\sigma(E_j) \vdash \sigma(f)$. Par conséquent, $E_i \vdash \sigma(f)$. Nous concluons que $T \vdash_S \sigma(f)$.*

Remarque 4 *La règle précédente est également valable pour les crédules ($\vdash_C$) et les demi-crédules ($\vdash_{SC}$) inférences.*

Exemple 6 *Prenons l'exemple 5. Dans la théorie T, nous avons $T \vdash_S Yo(Lea)$. En impliquant la règle d'inférence par symétrie, nous pouvons faire l'implication $T \vdash_S \sigma(Yo(Lea))$. Ainsi, $T \vdash_S Yo(John)$.*

Maintenant, nous donnons une proposition importante qui utilise la symétrie pour calculer l'ensemble des extensions.

Proposition 5 *étant donné une théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$, un sous-ensemble de formules E et une symétrie syntaxique σ de T, alors E est une extension de T si et seulement si $\sigma(E)$ est une extension de T.*

***Preuve* 4** *Supposons que E est une extension. Comme la permutation σ est une symétrie syntaxique, alors, par le théorème 1, elle est une symétrie sémantique. Elle conserve alors l'ensemble E_T des extensions de T. Il résulte de là que $\sigma(E) \in E_T$. On prouve l'inverse de la même manière en considérant la symétrie inverse σ^{-1} of σ.*

Maintenant, nous discutons la relation entre les extensions symétriques d'une théorie des défauts et leurs sous-ensembles des défauts qui sont utilisés pour les construire.

Proposition 6 *étant donné une théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$, un sous-ensemble $D_1 \subset D$ et une symétrie syntaxique σ, alors il existe une extension E^{D_1} de T obtenue par l'application des défauts de D_1, si et seulement si, il existe une extension $E^{\sigma(D_1)}$ de T obtenue par l'application des défauts de $\sigma(D_1)$.*

***Preuve* 5** *Supposons que E^{D_1} est une extension de $T = \langle D, W\rangle$ obtenue par l'application des défauts de D_1. Nous allons montrer qu'il existe une extension $E^{\sigma(D_1)}$ de T qui peut être obtenue par l'application des défauts de $\sigma(D_1)$. Puisque E^{D_1} est une extension de T et à partir de la définition 12, nous avons ce qui suit : $E^{D_1} = \bigcup_{i=0,\ldots,\infty} E_i$ où : $E_0 = W$ et $\forall i \geq 0, E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{\gamma : \frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_n}{\gamma} \in D_1, \alpha \in E_i, \forall j \in \{1,\ldots,n\}, \neg\beta_j \notin E^{D_1}\}$. Pour montrer l'existence de l'extension $E^{\sigma(D_1)}$ de T, on met $E' = \sigma(E^{D_1})$, $E'_0 = W$ et $\forall i \geq 0$, $E'_{i+1} = Th(E'_i) \cup \{\sigma(\gamma) : \frac{\sigma(\alpha):\sigma(\beta_1),\ldots,\sigma(\beta_n)}{\sigma(\gamma)} \in \sigma(D_1), \sigma(\alpha) \in E'_i, \forall j \in \{1,\ldots,n\}, \neg\sigma(\beta_j) \notin E'\}$ et on va prouver que E' est une extension de T et $E' = E^{\sigma(D_1)}$. Pour montrer que E' est une extension de T, nous devons montrer que $E' = \bigcup_{i=0,\ldots,\infty} E'_i$.*

Pour ce faire, nous devons d'abord montrer que $\forall i \geq 0$, $E'_i = \sigma(E_i)$. Nous démontrons cette propriété par récurrence sur i. Pour la première étape ($i = 0$), nous avons $E'_0 = W$, donc $E'_0 = \sigma(W)$ car σ est une symétrie syntaxique de T. Il en résulte que $E'_0 = \sigma(E_0)$. Maintenant, nous supposons que la propriété est vérifiée jusqu'à l'étape i, c'est-à-dire $E'_i = \sigma(E_i)$ et nous allons montrer que cette propriété est vérifiée à l'étape $i + 1$, c'est-à-dire $E'_{i+1} = \sigma(E_{i+1})$. Par la définition de E'_{i+1}, nous avons $E'_{i+1} = Th(E'_i) \cup \{\sigma(\gamma) : \frac{\sigma(\alpha):\sigma(\beta_1),\ldots,\sigma(\beta_n)}{\sigma(\gamma)} \in \sigma(D_1), \sigma(\alpha) \in E'_i, \forall j \in \{1,\ldots,n\}, \neg\sigma(\beta_j) \notin E'\}$. Par l'hypothèse de récurrence et la définition de E', on peut réécrire E'_{i+1} comme : $E'_{i+1} = Th(\sigma(E_i)) \cup \{\sigma(\gamma) : \frac{\sigma(\alpha):\sigma(\beta_1),\ldots,\sigma(\beta_n)}{\sigma(\gamma)} \in \sigma(D_1), \sigma(\alpha) \in \sigma(E_i), \forall j \in \{1,\ldots,n\}, \neg\sigma(\beta_j) \notin \sigma(E^{D_1})\}$. En revanche, nous avons $\sigma(Th(E_i)) = Th(\sigma(E_i))$ puisque la symétrie σ vérifie le suivant : si $A \vdash B$, alors $\sigma(A) \vdash \sigma(B)$. Par conséquent, $E'_{i+1} = \sigma(Th(E_i)) \cup \sigma(\{\gamma : \frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_n}{\gamma} \in D_1, \alpha \in E_i, \forall j \in \{1,\ldots,n\}, \neg\beta_j \notin E^{D_1}\})$.

On en déduit que $E'_{i+1} = \sigma(Th(E_i) \cup \{\gamma : \frac{\alpha:\beta_1,\ldots,\beta_n}{\gamma} \in D_1, \alpha \in E_i, \forall j \in \{1,\ldots,n\}, \neg\beta_j \notin E^{D_1}\})$. Cela im-

plique que $E'_{i+1} = \sigma(E_{i+1})$ et alors, on a prouvé la propriété.

Maintenant, nous allons prouver que E' est une extension de T. Par définition, $E' = \sigma(E^{D_1})$, comme E^{D_1} est, par l'hypothèse, une extension de T ($E^{D_1} = \bigcup_{i=0,\ldots,\infty} E_i$), alors $E' = \sigma(\bigcup_{i=0,\ldots,\infty} E_i)$, donc $E' = \bigcup_{i=0,\ldots,\infty} \sigma(E_i)$. En revanche nous avons montré que $\forall i \geq 0$, $E'_i = \sigma(E_i)$, thus $E' = \bigcup_{i=0,\ldots,\infty} E'_i$, il en résulte que E' est une extension de T. Comme E' est une extension de T obtenue par l'application des défauts de $\sigma(D_1)$, on obtient $E' = E^{\sigma(D_1)}$. Enfin, nous concluons qu'il existe une extension $E^{\sigma(D_1)}$ de T qui peut être obtenue par l'application des défauts de $\sigma(D_1)$.

L'inverse peut être établi de la même manière en considérant la symétrie inverse σ^{-1} de σ.

Maintenant, nous allons montrer que si l'application d'un défaut conduit à une extension de la théorie considérée, alors l'application de chacun de ses défauts symétriques conduit aussi à une extension de la même théorie.

Proposition 7 *Si $T = \langle D, W\rangle$ est une théorie des défauts et σ un de ses symétries syntaxiques. Il existe une extension de T où le défaut d est appliqué, si et seulement si, il existe une extension où le défaut symétrique $\sigma(d)$ est appliqué.*

***Preuve* 6** *Soit E une extension de T où d est appliqué. Cela implique qu'il existe un sous-ensemble $D_1 \subset D$ tel que $d \in D_1$ et $E = E^{D_1}$. Par la proposition 6, on en déduit que $E^{\sigma(D_1)}$ est une extension de T, où $\sigma(d) \in \sigma(D_1)$ est appliqué.*

De la proposition précédente, on déduit la propriété suivante :

Corollaire 1 *étant donné une théorie des défauts $T = \langle D, W\rangle$, un défaut $d \in D$ et une symétrie syntaxique σ de T, alors il n'existe pas une extension de T où le défaut d est appliqué, si et seulement si, il n'existe pas une extension où le défaut symétrique $\sigma(d)$ est appliqué.*

Dans la logique des défauts, nous avons l'avantage, car les deux symétries : syntaxiques et sémantiques, sont définies. La logique des défauts est augmentée avec une règle d'inférence par symétrie qui peut être utilisée pour raccourcir les preuves. Par ailleurs, dans la logique des défauts, la symétrie peut être utilisée pour calculer l'ensemble des extensions. En effet, lorsque l'extension est identifiée lors de l'énumération, on peut déduire toutes ses extensions symétriques, sans effort supplémentaire (Proposition 5). Autrement dit, les branches isomorphes dans l'arbre de recherche correspondant à l'application des sous-ensembles symétriques des défauts conduit à des extensions symétriques, alors nous avons besoin d'explorer une seule branche et élaguer l'espace de recherche correspondant aux autres. En cas d'échec à obtenir une extension lors de l'application de défaut d, le corollaire 1 nous permet de tailler tous les sous-espaces de recherche correspondant aux défaut symétrique $\sigma(d)$, car ils ne conduisent pas à des extensions.

6 Conclusion et perspectives

Le But principal de ces travaux est d'étendre la notion de la symétrie aux formalismes logiques non-classiques. Nous avons défini la notion de la symétrie sémantique dans les logiques préférentielles et avons montré comment certaine information peut être déduite à l'aide de cette définition, alors que ces déductions ne peuvent pas être faites dans une logique classique. L'autre point étudié ici est l'extension de la définition de la symétrie syntaxique dans le cadre de la X-logique où une nouvelle règle de déduction a été introduite. Enfin, nous avons défini à la fois, la symétrie sémantique et syntaxique dans le cadre le plus général de la logique des défauts. Nous avons montré comment la symétrie peut être utilisée pour améliorer la recherche des extensions et nous avons introduit une nouvelle règle d'inférence par symétrie qui peut être utilisée pour faire de courtes démonstrations. En perspectives, on peut essayer d'étudier en profondeur la relation entre la symétrie sémantique en logique préférentielle et la symétrie syntaxique définie dans les X-logiques et d'établir leur relation, en utilisant les définitions de la symétrie introduites dans les logiques des défauts. Un autre point que nous voulons étudier est d'inclure la symétrie dans des algorithmes d'énumération des extensions de la logique des défauts pour les accélérer, en utilisant l'avantage de la nouvelle règle de la symétrie. Enfin, nous cherchons à étudier la relation entre la logique des défauts et les ASPs (Answer Set Programming) afin de calculer les extensions symétriques par des ASs symétriques et des modèles stables.

Références

[1] F. A. Aloul, A.Ramani, I. L. Markov, and K. A. Sakallak. Solving difficult sat instances in the presence of symmetry. *In IEEE Transaction on CAD, vol. 22(9)*, pages 1117–1137, 2003.

[2] F. A. Aloul, A. Ramani, I. L. Markov, and K. A. Sakallak. Symmetry breaking for pseudo-boolean satisfiabilty. *In ASPDAC'04*, pages 884–887, 2004.

[3] R. Backofen and S. Will. Excluding symmetries in constraint-based search. In *Principle and Practice of Constraint Programming - CP'99*, 1999.

[4] B. Benhamou. Study of symmetry in constraint satisfaction problems. *In Proceedings of the 2nd International workshop on Principles and Practice of Constraint Programming - PPCP'94*, 1994.

[5] B. Benhamou and L. Sais. Theoretical study of symmetries in propositional calculus and application. *Ele-*

venth International Conference on Automated Deduction, Saratoga Springs,NY, USA, 1992.

[6] B. Benhamou and L. Sais. Tractability through symmetries in propositional calculus. *Journal of Automated Reasoning (JAR),*, 12 :89–102, 1994.

[7] B. Benhamou, L. Sais, and P. Siegel. Two proof procedures for a cardinality based language. *in proceedings of STACS'94, Caen France*, pages 71–82, 1994.

[8] P. Besnard and P. Siegel. The preferential-models approach in nonmonotonic logics - in non-standard logic for automated reasoning. In *Academic Press*, pages 137–156. ed. P. Smets, 1988.

[9] Genevieve Bossu and Pierre Siegel. Nonmonotonic reasoning and databases. In *Advances in Data Base Theory*, pages 239–284, 1982.

[10] Genevieve Bossu and Pierre Siegel. Saturation, nonmonotonic reasoning and the closed-world assumption. *Artif. Intell.*, 25(1) :13–63, 1985.

[11] James Crawford, Matthew L. Ginsberg, Eugene Luck, and Amitabha Roy. Symmetry-breaking predicates for search problems. In *KR'96 : Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, pages 148–159. Morgan Kaufmann, San Francisco, California, 1996.

[12] T. Fahle, S. Schamberger, and M. Sellmann. Symmetry breaking. In *International conference on constraint programming*, volume 2239 of *LNCS*, pages 93–108. Springer Verlag, 2001.

[13] F. Focacci and M. Milano. Global cut framework for removing symmetries. In *International conference on constraint programming*, volume 2239 of *LNCS*, pages 77–82. Springer Verlag, 2001.

[14] E.C. Freuder. Eliminating interchangeable values in constraints satisfaction problems. *Proc AAAI-91*, pages 227–233, 1991.

[15] I. P. Gent, W. Hervey, T. Kesley, and S. Linton. Generic sbdd using computational group theory. In *Proceedings CP'2003*, 2003.

[16] I. P. Gent and B. M. Smith. Symmetry breaking during search in constraint programming. In *Proceedings ECAI'2000*, 2000.

[17] I.P. Gent, W. Harvey, and T. Kelsey. Groups and constraints : Symmetry breaking during search. In *International conference on constraint programming*, volume 2470 of *LNCS*, pages 415–430. Springer Verlag, 2002.

[18] Sarit Kraus, Daniel J. Lehmann, and Menachem Magidor. Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics. *Artificial Intelligence*, 44(1-2) :167–207, 1990.

[19] B. Krishnamurty. Short proofs for tricky formulas. *Acta informatica*, (22) :253–275, 1985.

[20] J. McCarthy. Circumscription-a form of nonmonotonic reasoning. *Artificial Intelligence*, 13.

[21] J. F. Puget. On the satisfiability of symmetrical constrained satisfaction problems. In *In J. Kamorowski and Z. W. Ras,editors, Proceedings of ISMIS'93, LNAI 689*, 1993.

[22] J.F. Puget. Symmetry breaking revisited. In *International conference on constraint programming*, volume 2470 of *LNCS*, pages 446–461. Springer Verlag, 2002.

[23] Ray Reiter. A logic for default reasoning. *Artificial Intelligence*, pages 81–132, 1980.

[24] C. M. Roney-Dougal, I. P. Gent, T. Kelsey, and S. A. Linton. Tractable symmetry breaking using restricted search trees. *In, proceedings of ECAI'04*, pages 211–215, 2004.

[25] Yoav Shoam. A semantical approach to nonmonotonic logic. In *IJCAI*, pages 388–392, 1987.

[26] P. Siegel, L. Forget, and V. Risch. Preferential logics are x-logics. *Journal of Logic and Computation*, 11(1) :71–83, 2001.

[27] T. Walsh. General symmetry breaking constraints. *In, proceedings of CP'06*, pages 650–664, 2006.