



HAL
open science

Des modèles de plus en plus complexes par Agnès Sulem. Forces et faiblesses des mathématiques financières, entretien avec Éric Briys, propos recueillis par Dominique Chouchan.

Agnès Sulem, Eric Briys

► **To cite this version:**

Agnès Sulem, Eric Briys. Des modèles de plus en plus complexes par Agnès Sulem. Forces et faiblesses des mathématiques financières, entretien avec Éric Briys, propos recueillis par Dominique Chouchan.. Les Cahiers de l'INRIA - La Recherche, INRIA, 2009, L'avenir des langues. inria-00527579

HAL Id: inria-00527579

<https://hal.inria.fr/inria-00527579>

Submitted on 19 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MATHÉMATIQUES FINANCIÈRES

Des modèles de plus en plus complexes

Non seulement les organismes financiers se disputent les meilleurs mathématiciens, mais la finance est devenue source de problèmes théoriques inédits en mathématiques.

L'intérêt des mathématiciens pour la finance date de quelques dizaines d'années seulement. Auparavant, le contenu mathématique des problèmes financiers était considéré comme élémentaire. De nos jours, presque toutes les universités scientifiques ont leur programme de mathématiques financières. Ce changement est notamment lié aux avancées en analyse stochastique. Celles-ci ont en effet permis de combiner l'analyse mathématique classique (intégrales, dérivées...) et la théorie moderne des probabilités telle qu'elle avait été développée par le Russe Andreï Kolmogorov dans les années 1930. A la faveur de la complexification croissante des produits financiers, ces mathématiques sont devenues incontournables. Du chemin reste toutefois à parcourir avant de pouvoir répondre à tous les défis soulevés par les problèmes liés à la gestion des risques.

Parmi les avancées en analyse stochastique sur lesquelles va s'édifier la théorie financière ⁽¹⁾, il faut citer les travaux de l'Américain Norbert Wiener (1894-1964), qui élaborera une formalisation rigoureuse du mouvement brownien* (baptisé depuis processus de Wiener). Le Français Paul Lévy (1886-1971) en a exploré les caractéristiques. Il donnera aussi son nom à des processus stochastiques plus généraux

et susceptibles de présenter des discontinuités (des « sauts »). Puis le calcul stochastique s'est développé grâce à la théorie de l'intégrale stochastique, mise au point par le Japonais Kiyoshi Itô (1915-2008). Enfin, c'est à l'Américain Joseph Leo Doob (1910-2004) que l'on doit le concept de martingale*, abondamment



Fig. 1 : « Portraits à la Bourse » : ce tableau, réalisé par Edgar Degas vers 1878-79, est exposé au musée d'Orsay, à Paris.

utilisé en finance. Doob a notamment établi, avec le probabiliste français Paul-André Meyer (1934-2003), les fondements de la théorie moderne des semi-martingales*, dont l'une des applications est la modélisation des processus représentant l'évolution des prix des actifs financiers.

Armés de tous ces outils, les mathématiciens pouvaient donc s'attaquer aux questions financières, en particulier à partir des années 1970 avec la création à Chicago du premier marché organisé de produits dérivés (options).

* On appelle **mouvement brownien** le mouvement désordonné de particules en suspension dans un liquide, chacune n'étant soumise qu'aux seuls chocs avec les autres particules.

* Une **martingale** est un processus stochastique dont l'espérance mathématique de sa valeur future (la valeur « espérée » à une date future), compte tenu de son histoire jusqu'à la date présente, est égale à la valeur présente.

* Les **semi-martingales** sont des processus stochastiques par rapport auxquels l'intégrale stochastique peut être définie. Elles offrent un cadre adapté à cette théorie grâce à leurs propriétés de stabilité pour l'intégrale stochastique et d'autres opérations.

* **Premia** est une plate-forme logicielle mise au point par l'équipe-projet Mathfi de l'Inria (www.premia.fr) et enrichie chaque année de nouveaux algorithmes. Elle fait l'objet d'un partenariat avec des banques telles que Calyon, Société Générale, Natixis, Bank Austria, Raiffeisen Zentralbank Österreich AG (RZB).

Typiquement, une option d'achat sur un actif dit sous-jacent (monnaie, matière première, action, etc.) est un contrat qui permet à son détenteur d'acheter cet actif à une date donnée (appelée échéance) et à un prix fixé à l'achat du contrat (fig. 2). Pour honorer ce contrat à ladite échéance, le vendeur de l'option (une banque en général) doit élaborer une stratégie pour se couvrir contre les fluctuations du cours de cet actif. L'option permet ainsi un transfert de risque de l'investisseur vers le vendeur.

Mais quel est le « juste prix » à payer pour ce contrat et quelle stratégie de couverture le vendeur a-t-il intérêt à mettre en place ? C'est à ces questions qu'en 1973, le mathématicien américain Fisher Black et son collègue économiste Myron Scholes, puis l'ingénieur et économiste Robert Merton, ont proposé une réponse, valable dans le cas où le prix du titre sous-jacent est modélisé par un mouvement brownien géométrique⁽²⁾. Ils se sont rendus célèbres par une formule, dite *Option Pricing Formula*, destinée à évaluer les prix des options et à calculer une couverture dynamique des risques. Cette formule explicite, qui vaudra le prix Nobel d'économie à Scholes et Merton en 1997 (Black étant mort en 1995), est encore aujourd'hui à la base du calcul financier. Son succès fut largement dû au fait que les prix ainsi estimés étaient cohérents avec ceux fixés empiriquement depuis déjà plusieurs années. La recherche en mathématiques financières n'a alors cessé de monter en puissance. La formule de Black, Scholes et Merton est certes robuste, mais elle s'appuie sur des hypothèses très fortes et généralement loin d'être satisfaites dans la réalité. Elle présuppose en effet l'existence d'un marché financier idéal, avec de bonnes conditions de liquidité et sans aucun coût pour les transactions (achats et ventes). Un tel marché est dit complet, c'est-à-dire qu'une stratégie de couverture parfaite du risque peut être mise en place. Or le marché réel est typiquement incomplet : le calcul de la couverture dynamique du risque reste souvent un problème ouvert⁽³⁾. Le cas des produits dérivés de crédits, tels que les subprimes américains, constitue un exemple paradigmatique de crise à laquelle peut conduire cette absence de couverture, dès lors qu'elle est couplée à une complexification des produits en question et surtout à une dérive spéculative croissante.

L'un des défis majeurs est donc de mieux prendre en compte les différents risques et de raffiner les outils mathématiques pour les évaluer (mesures de risques, risques extrêmes, etc.). Il s'agit de développer des modèles plus

sophistiqués, d'analyser plus précisément les produits dérivés complexes et de mieux appréhender les fluctuations des marchés, en particulier les fluctuations soudaines ou à caractère exceptionnel. D'où, par exemple, les recherches menées sur les processus de Lévy et le contrôle stochastique de ces processus, notamment dans notre équipe. En parallèle, la calibration des modèles reste une étape importante et nécessite des techniques d'optimisation et de calcul performants. Elle consiste à ajuster la dynamique des actifs sous-jacents à partir d'options cotées sur le marché : c'est le problème « inverse » du problème de calcul des prix d'options. Enfin, les questions d'asymétrie d'information sont également au cœur de nos préoccupations : l'idée est de tenir compte des différences d'accès à l'information par les acteurs du marché.

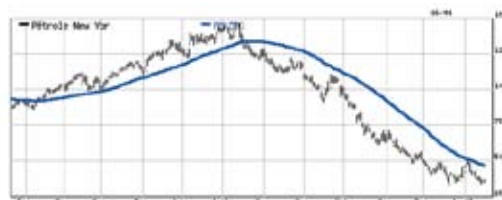


Fig. 2 : Vu l'évolution du prix du pétrole en 2008, une option d'achat sur cet actif contractée en février avec échéance juillet, pour un prix d'exercice de cette option (*strike*) de 100, aurait été profitable à son détenteur. En effet, le baril était monté à 130. Le détenteur de l'option pouvait ainsi le revendre 130 et réaliser un profit de 30. Si l'échéance de l'option avait été décembre, alors il n'aurait pas intérêt à exercer son droit à acheter. C'est l'inverse pour une option de vente. (d'après un graphique Boursorama)

Ces recherches conduisent, soit à des avancées mathématiques en amont, soit à de nouveaux algorithmes numériques. Ce sont de tels algorithmes que nous avons mis en œuvre dans le logiciel de calcul Premia* pour les options financières. Cette plateforme fournit des outils numériques et documentés pour évaluer le prix et la couverture de produits financiers dérivés. Mais les mathématiciens ne sont pas au bout de leur peine, même si leur apport dans le domaine de la finance se limitera toujours à une aide à la décision et ne pourra jamais se substituer à des choix économiques ou de société. A noter enfin que les problèmes posés par la finance ont favorisé une recherche foisonnante dans la théorie des processus stochastiques.

Agnès Sulem, directrice de recherche Inria, est responsable de l'équipe projet Mathfi. Elle est notamment coauteur, avec Bernt Øksendal, de l'ouvrage : *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*, Springer, Universitext, 2nd ed., 2007.

⁽¹⁾ R. Jarrow and Ph. Protter, *A Short History of Stochastic Integration and Mathematical Finance: the early years, 1880-1970*. IMS Lecture Notes Monograph Series, vol. 45, 2004.

⁽²⁾ F. Black and M. Scholes, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81 (3), 1973.

⁽³⁾ N. El Karoui, *Gestion des risques financiers dans un monde dynamique*, in *Leçons de Mathématiques d'aujourd'hui*, vol. 3, Cassini, 2007.



D.R.

Depuis plus d'un an, médias et politiques sont prolixes en analyses critiques du système financier et plus particulièrement de la dérégulation. Mais, même dans l'éventualité d'un changement de cap, dispose-t-on des outils nécessaires ?

La finance souffre-t-elle d'un «trop» ou d'un «pas assez» de mathématiques ?

Eric Briys : La question ne se pose pas tant en termes de « quantité » que de « pertinence »

Entretien avec Eric Briys

Forces et faiblesses des mathématiques financières

des mathématiques utilisées. Celles mises en œuvre sont souvent inadéquates compte tenu de la nature des marchés financiers et des paramètres qui interviennent. Comment les agents interagissent ? Comment s'influencent-ils les uns les autres et influencent-ils le marché ? ... Autant d'aspects trop négligés mais déterminants dans le fonctionnement de la finance et qui imposent le recours à des mathématiques complexes. Ne nous trompons donc pas d'adversaire : les mathématiques sont indispensables, comme le sont la finance et les produits dérivés. Tout le problème est de partir des bonnes prémisses.

Les erreurs sur les prémisses que vous invoquez doivent-elles être imputées aux analystes financiers ou aux mathématiciens ?

E. B. : Aux deux. En amont se pose la question de la compréhension profonde de ce que sont

un marché, ses acteurs et les instruments échangés. Pour simplifier, on peut dire que depuis une cinquantaine d'années, la finance académique s'est obstinée à suivre deux voies parallèles, en ignorant quasiment leurs évidentes interactions. La première (finance de marché) s'intéresse exclusivement aux actifs financiers* et à leur valorisation. Ce faisant, elle fait l'impasse sur l'intermédiation financière : tout se passerait comme si les agents accédaient directement aux actifs, comme s'il n'y avait pas de banques, d'assurances... Inversement, la seconde voie (finance d'entreprise) traite des institutions et des agents (entreprises, actionnaires, créanciers...) sans vraiment se préoccuper de leur impact sur la valorisation des actifs. Ce divorce revient à appréhender le risque comme un phénomène exogène, ce qui est absurde car les agents s'adaptent à leur environnement, donc le modifient par leurs réactions. L'exemple des subprimes* est à cet égard emblématique.

Et au plan mathématique ?

E. B. : Il va de soi, au vu de la remarque précédente, que les mathématiques doivent prendre en compte le caractère endogène du risque. Mais un autre aspect mérite d'être sou-

Eric Briys, professeur associé au Centre d'étude et de recherche en économie, gestion, modélisation et informatique appliquée (Ceregmia, université des Antilles et de la Guyane), a passé plusieurs années chez Lehman Brothers, Merrill Lynch et Deutsche Bank. Il vient de publier avec Henri Bourguinat : *L'Arrogance de la finance. Comment la théorie financière a produit le krach* (La Découverte).

ligné. Pour modéliser les variables aléatoires que sont les prix financiers, les financiers et nombre de mathématiciens supposent que leur comportement est gaussien*. Le premier à avoir formalisé cette hypothèse fut le Français Louis Bachelier, au début du XX^e siècle. L'avantage de la loi de Gauss (dite normale) tient à ce qu'elle est particulièrement simple à manipuler. Le raisonnement se fondait sur le constat suivant : les prix évoluant sous l'effet de la conjonction d'une multitude de petites causes, on peut leur appliquer le théorème central limite*. Les trois mathématiciens américains Fisher Black, Myron Scholes et Robert Merton ont enrichi ce modèle au début des années 1970, mais en partant du même postulat. Quant aux modèles stochastiques actuels, ils ont à leur tour complexifié celui de Black, Scholes et Merton, mais la philosophie n'a pas changé. Or on peut lui opposer deux objec-

tions. La première est que, dans la réalité, les événements théoriquement rares (peu probables au sens de la loi normale) sont plus fréquents que prévu, avec des conséquences parfois colossales. Mais surtout, Black, Scholes et Merton présupposaient un risque exogène, c'est-à-dire doté d'une dynamique indépendante des agents financiers: on retrouve l'erreur de prémisse déjà soulignée.

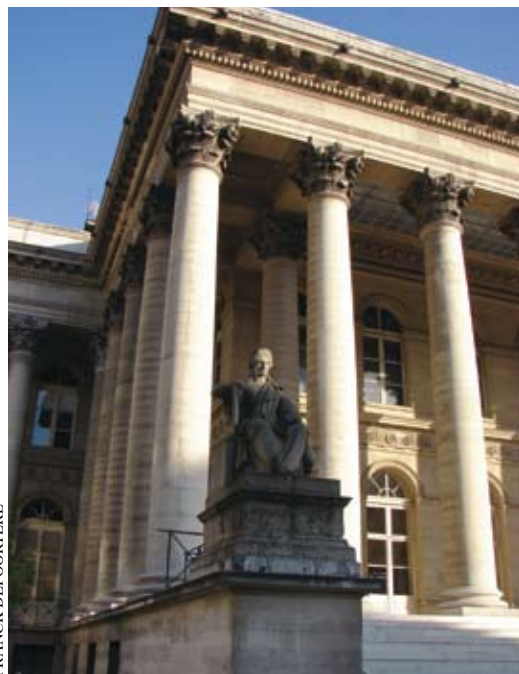
Dans l'ouvrage que vous avez écrit avec Henri Bourguinat, vous utilisez une métaphore génétique pour parler de finance. Quel rapport ?

E. B. : En premier lieu, il faut comprendre le pourquoi d'un marché financier. Prenons l'exemple d'un entrepreneur. Il possède des machines, des employés, du stock... : toutes ces valeurs sont « illiquides ». S'il émet des actions, celles-ci deviennent échangeables (plus ou moins liquides). C'est une bonne chose, l'un des arguments majeurs pour créer une Bourse étant de faire circuler de l'information: les échanges de titres s'opèrent sur la base de l'information qu'ils véhiculent (notamment sur l'avenir de l'entreprise). Mais la titrisation conduit parfois à un vrai dilemme. Ainsi, les banques ont pris l'habitude de sortir de leur bilan les prêts immobiliers qu'elles consentent, autrement dit de les titriser, pour réduire leurs besoins de fonds propres. Elles ont en effet été autorisées à céder ces prêts à des entités ad hoc qui, pour les acheter, ont vendu des titres plus ou moins risqués aux investisseurs. Leurs conditions d'octroi de prêt se sont alors progressivement relâchées (le risque était transféré aux investisseurs) et, parallèlement, la titrisation, via l'agrégation de titres de toutes sortes, s'est paradoxalement traduite par une perte d'information. La cupidité aidant, la machine s'est emballée: la moindre défaillance dans un tel système se dissémine immédiatement, d'où notre analogie avec certains phénomènes de contamination en génétique.

N'est-ce alors pas la question du mode d'utilisation des modèles qui est posée, à savoir la perte d'un certain sens du réel au profit d'une sorte de boîte noire, comme peut-être dans d'autres domaines ?

E. B. : A mon sens, la foi dans un modèle financier peut être de deux natures: soit aveugle, soit intéressée. Pour avoir une foi intéressée, il suffit d'y être incité. L'incitation chez les agents financiers s'appelle l'appât du gain. Par exemple, si un agent est rémunéré par une banque sur la base des fonds propres qu'il engage (et d'autant mieux que les fonds

engagés sont faibles), alors il a tout intérêt à utiliser les faiblesses des modèles, qui tendent justement à sous-estimer les fonds propres (du fait des hypothèses gaussiennes en particulier). Il y a donc ceux qui ne comprennent rien aux modèles et ceux qui s'en servent à leur profit.



FRANK DEPOORTERE

La Bourse de Paris, dont la première pierre fut posée en 1808 par Napoléon 1^{er}, a été conçue par Alexandre-Théodore Brongniart (Palais Brongniart). Depuis la fin des années 1980, elle est relativement désertée, le marché des transactions s'étant informatisé.

L'Inria semble avoir joué un rôle de pionnier dans les mathématiques financières...

E. B. : En effet, j'ai eu la chance de rencontrer Denis Talay*, à Sophia Antipolis, au début des années 1980. Alors qu'il organisait un séminaire sur les processus de diffusion appliqués aux bactéries, donc sans grand rapport avec la finance, j'ai pris contact avec lui et lui ai communiqué le modèle de Black et Scholes. Il a été frappé par la similitude d'approche et a commencé à se passionner pour la finance. De fil en aiguille, l'idée a germé d'organiser, à Sophia Antipolis, un séminaire réunissant les meilleurs financiers, économistes et mathématiciens de la finance de la planète. Ce séminaire, auquel Pierre Bernhard* et Alain Bensoussan* ont eux aussi participé activement, s'est tenu en juin 1984. Ce fut un véritable lieu de confrontations, mais aussi le point de départ pour de nombreux mathématiciens. L'équipe projet Omega de Denis Talay est née dans la foulée de cette dynamique.

Propos recueillis par Dominique Chouhan

* Un **actif financier** désigne toute créance sur un revenu futur, que cette créance soit liquide et échangeable quotidiennement sur un marché (par exemple une action), ou qu'elle soit « illiquide » (par exemple la propriété d'un immeuble pour laquelle la créance est le loyer).

* Le **crédit immobilier** subprime désigne un prêt consenti à des ménages de solvabilité fragile, sur la base d'une majoration de taux d'intérêt.

* La **loi de Gauss**, également dite « normale », est représentée graphiquement par la fameuse courbe en cloche, plus ou moins aplatie selon la dispersion des valeurs de la variable aléatoire considérée: elle exprime notamment que la probabilité d'occurrence des valeurs de cette variable éloignées de la valeur moyenne (parties gauche et droite de la « cloche ») est très faible.

* Le **théorème central limite** exprime schématiquement que la loi normale constitue une approximation acceptable de la loi de probabilité d'une variable aléatoire résultant de l'addition d'un très grand nombre de petites contributions indépendantes.

* **Denis Talay** est responsable de l'équipe-projet Tosca, anciennement Omega.

* **Pierre Bernhard** a fondé le centre Inria Sophia Antipolis et l'a dirigé de 1981 à 1996.

* **Alain Bensoussan**, membre de l'Académie des sciences et de l'Académie des technologies, a dirigé l'Inria de 1984 à 1996.