Comparaison des techniques de raccordements de développements asymptotiques et de développements multiéchelles

Monique Dauge, Sébastien Tordeux, Grégory Vial

Comparaison des techniques de raccordements de développements asymptotiques et de développements multiéchelles

Monique Dauge, Sébastien Tordeux, Grégory Vial

Groupe de travail Ondes & Structures, laboratoire MIP

INSA-Toulouse, laboratorie MIP

IRMAR-Université de Rennes 1

Quelques références

- Développements asymptotiques raccordés:

  Van Dyke (1964) Sanchez Palencia, Leguillon (1987) Il'in (1992).

- Techniques multiéchelles

  Maz'ya, Nazarov, Plamenevskii (1991)
  Oleinik, Shamaev, Yosifian (1992)

- Traitement numérique:

  Schwab, Melenk, Babuska (1995)

Introduction

Les méthodes des développements asymptotiques raccordés et des développements multiéchelles sont des méthodes concurrentes de l'analyse asymtptotique

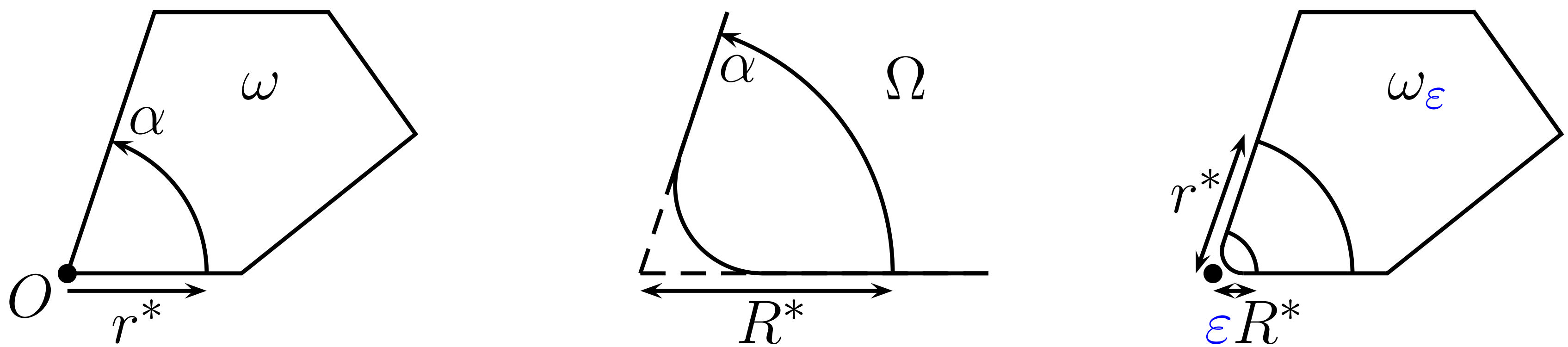
- Deux méthodes concurrentes
- Différence sur le plan "philosophique"
- Similitude sur le plan technique

Plan de l'exposé

- Les développements asymtptotiques raccordés (MAE)
- Les développements multiéchelles
- Comparaison de ces deux méthodes

Présentation du problème

La géométrie



Le problème modèle

$$\text{Trouver } \mathsf{u}_\varepsilon \in \mathsf{H}^1_0(\omega_\varepsilon) \text{ tel que } -\Delta \mathsf{u}_\varepsilon = f \text{ dans } \omega_\varepsilon, \qquad (1)$$

où $f \in \mathsf{L}^2(\omega)$ est à support compact dans ω.

Objectif développement asymtptotique de u^ε pour $\varepsilon \to 0$.

Rac. de dév. asympt.

- C'est un "développement multiéchelle" (?!?)
  - L'asymtptotique de la solution est recherchée par l'introduction de plusieurs échelles.
  - Pas de cohabitation des différentes échelles
- Développements limités généralisés suivant plusieurs jeux d'échelles

$$\begin{cases} & \mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) & = & \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\ \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \\ \mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon\mathbf{X}) \ = & \mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) & = & \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\mathsf{U}^{i}(\mathbf{X}) \end{cases}$$

Ces développements sont alors raccordés.

Les temps de la méthode

- Dérivation des développements asymptotiques:
  - Partie formelle
  - Plusieurs présentations possibles

Les temps de la méthode

- Dérivation des développements asymptotiques:
  - Partie formelle
  - Plusieurs présentations possibles
- Description des développements asymptotiques
  - Partie rigoureuse
  - Définition des termes de développements asymptotiques

Les temps de la méthode

- Dérivation des développements asymptotiques:
  - Partie formelle
  - Plusieurs présentations possibles
- Description des développements asymptotiques
  - Partie rigoureuse
  - Définition des termes de développements asymptotiques
- Validation mathématique du développement asymptotique
  - Partie rigoureuse
  - Estimations d'erreur

Phase 1. Dériv. des dév. asympt.

Dérivation des

- équations volumiques de champ lointain en variables physiques (non dilatées) $\mathbf{x} = (x, y)$
- équations volumiques de champ proche ou de coin en variables dilatées $\mathbf{X} = (\frac{x}{\varepsilon}, \frac{y}{\varepsilon})$.
- raccords (matching conditions) entre champ proche et champ lointain

Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques

Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques
- Pas de changement d'échelle

Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques
- Pas de changement d'échelle
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\; \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \;+\; \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques
- Pas de changement d'échelle
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \;+\; \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

  - avec $\mathsf{f}^0 \equiv 1$, ($\mathsf{f}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ pour $i > 0$) et ($\mathsf{f}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ pour $i < 0$)

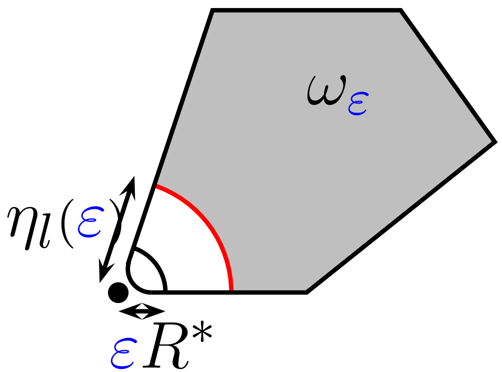
Le champ lointain

- Objectif: décrire l'asymptotique dans le jeu de coordonnées physiques
- Pas de changement d'échelle
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\;\mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \;+\; \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

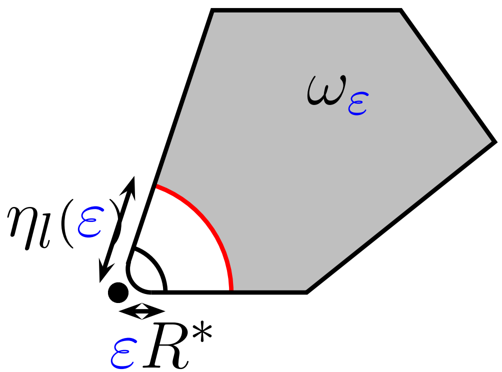
  - avec $\mathsf{f}^0 \equiv 1$, ($\mathsf{f}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ pour $i > 0$) et ($\mathsf{f}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ pour $i < 0$)
  - Les coefficients de ce développement sont des fonctions qui ne dépendent pas de ε.

La zone de validité du champ lointain



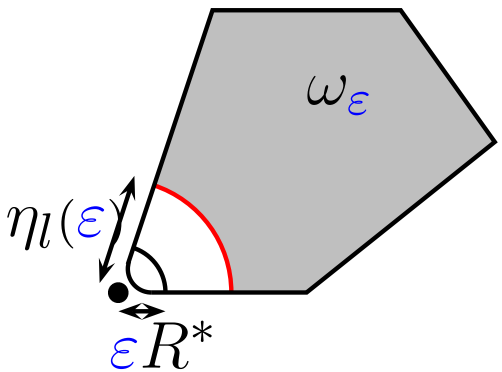
- Un développement en la variable $\mathbf{x}$ ne peut pas saisir la nature de la solution exacte au voisinage du coin

La zone de validité du champ lointain



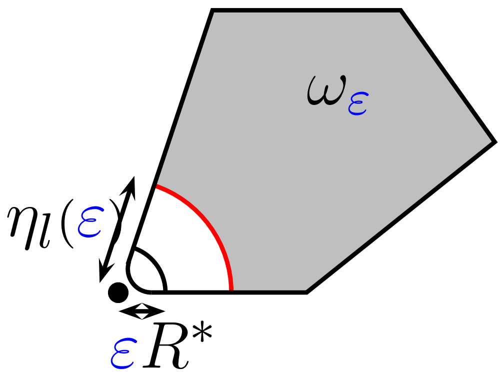
- Un développement en la variable $\mathbf{x}$ ne peut pas saisir la nature de la solution exacte au voisinage du coin
- Toutefois, tant que $\varepsilon = o(|\mathbf{x}|)$, le développement en champ lointain reste une bonne approximation.

La zone de validité du champ lointain



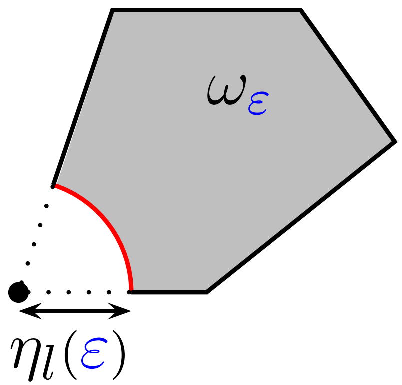
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_l(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- Toutefois, tant que $\varepsilon = o(|\mathbf{x}|)$, le développement en champ lointain reste une bonne approximation.

La zone de validité du champ lointain



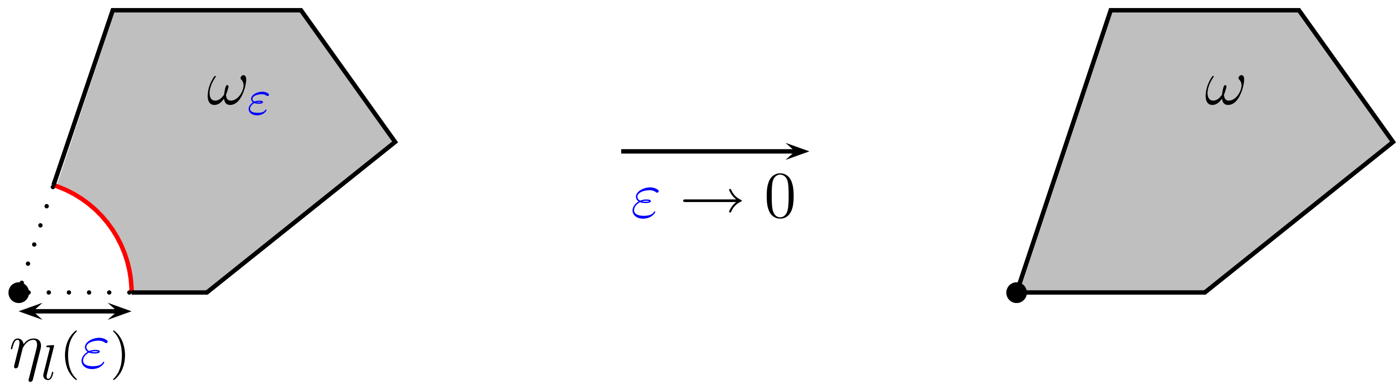
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\eta_l(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \eta_l(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ lointain



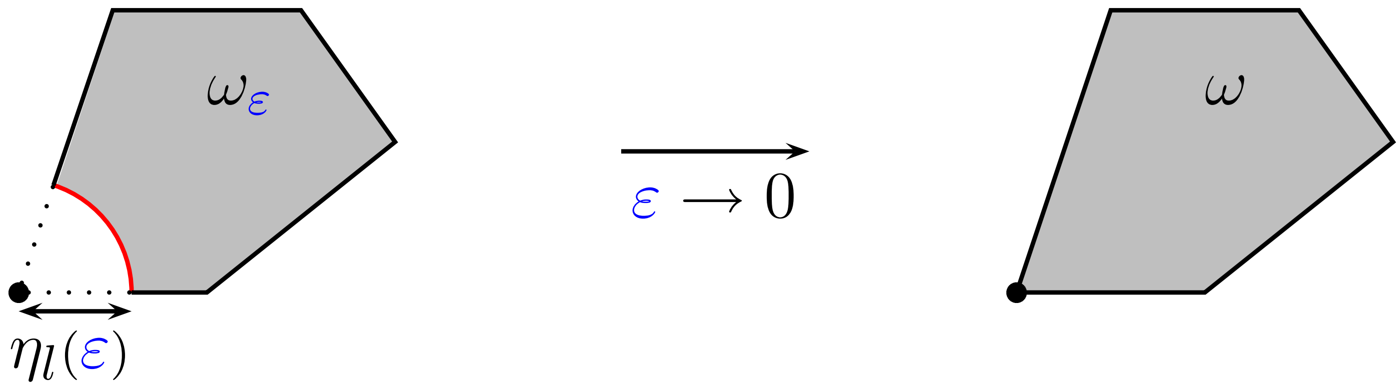
- c.-à-d. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\eta_l(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \eta_l(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ lointain



- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_l(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta_l(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ lointain



Les termes u^i du développement asymtptotique

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\, \mathsf{u}^i(\mathbf{x}) \;+\; \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

sont définis sur ω.

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Les équations de champ lointain

u^ε vérifie

$$-\Delta u^\varepsilon = f \quad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{x} \in \omega$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta u^\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \omega$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta \Big[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon) \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \Big] = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Les équations de champ lointain

u^ε vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^\varepsilon \; = \; f \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{x} \in \omega$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\big[-\Delta \mathsf{u}^i(\mathbf{x})\big] \; = \; f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

Les équations de champ lointain

u^ε vérifie

$$-\Delta u^\varepsilon \;=\; f \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{x} \in \omega$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} f^i(\varepsilon)\big[-\Delta u^i(\mathbf{x})\big] \;=\; f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega.$$

En identifiant terme à terme, il vient

$$-\Delta u^0 = f \quad \text{et} \quad (-\Delta u^i = 0 \quad \text{pour } i \neq 0) \quad \text{dans } \omega.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Les équations de champ lointain

u^ε vérifie

$$\mathsf{u}^\varepsilon \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \partial\omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\mathsf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \; = \; 0 \qquad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \; = \; 0, \qquad \mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Les équations de champ lointain

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; 0 \qquad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}$. Pour ε suffisamment petit, $\mathbf{x} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{u}^{i}(\mathbf{x}) \;=\; 0, \qquad \mathbf{x} \in \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

En identifiant terme à terme, il vient

$$\mathsf{u}^{i} = 0 \qquad \text{sur } \partial\omega \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin

Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin
- Changement d'échelle $\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ c.-à-d. $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{X}$

Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin
- Changement d'échelle $\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ c.-à-d. $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{X}$
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte dilatée

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon \mathbf{X}) = \mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{U}^{i}(\mathbf{X}) + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin
- Changement d'échelle $\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ c.-à-d. $\mathbf{x} = \varepsilon\mathbf{X}$
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte dilatée

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon\mathbf{X}) \;=\; \mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\,\mathsf{U}^{i}(\mathbf{X}) \;+\; \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

  - avec $\mathsf{F}^0 \equiv 1$, ($\mathsf{F}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ pour $i > 0$) et ($\mathsf{F}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ pour $i < 0$)

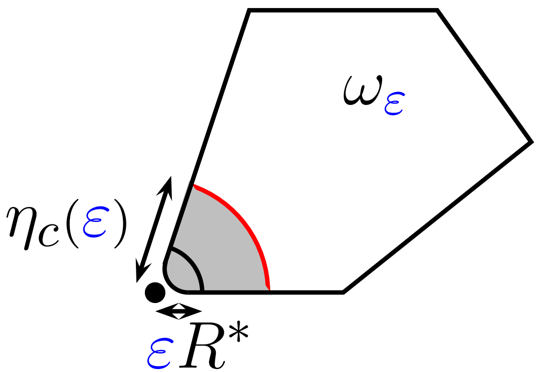
Le champ proche ou de coin

- Objectif: décrire l'asymptotique au voisinage du coin
- Changement d'échelle $\mathbf{X} = \dfrac{\mathbf{x}}{\varepsilon}$ c.-à-d. $\mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{X}$
- On cherche le développement limité généralisé de la solution exacte dilatée

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon \mathbf{X}) = \mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{U}^{i}(\mathbf{X}) + \underset{\varepsilon \to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

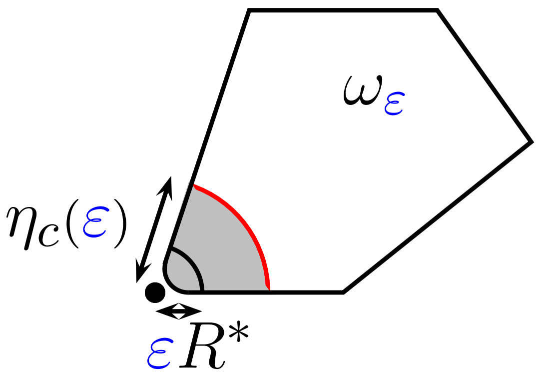
  - avec $\mathsf{F}^0 \equiv 1$, ($\mathsf{F}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ pour $i > 0$) et ($\mathsf{F}^i(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} +\infty$ pour $i < 0$)
  - Les coefficients de ce développement sont des fonctions qui ne dépendent pas de ε.

La zone de validité du champ proche



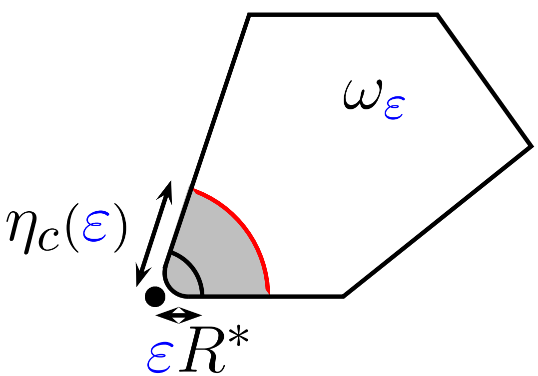
- Un développement en la variable $\mathbf{X}$ ne peut pas saisir la nature de la solution exacte en $\mathbf{x}$ fixe dans ω

La zone de validité du champ proche



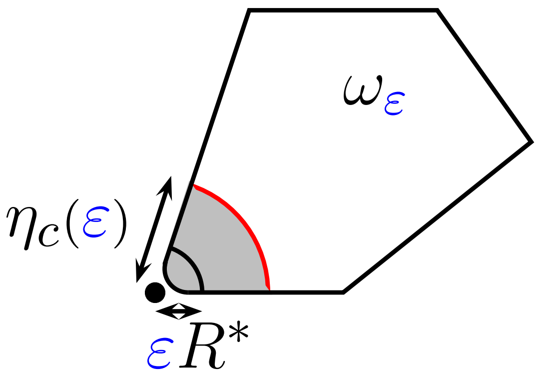
- Un développement en la variable $\mathbf{X}$ ne peut pas saisir la nature de la solution exacte en $\mathbf{x}$ fixe dans ω
- Toutefois, tant que $|\mathbf{x}| = o(1)$, le développement en champ lointain reste une bonne approximation.

La zone de validité du champ proche



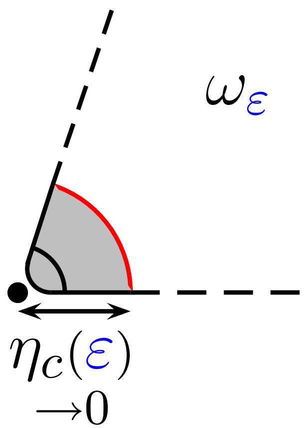
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_c(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- Toutefois, tant que $|\mathbf{x}| = o(1)$, le développement en champ proche reste une bonne approximation.

La zone de validité du champ proche



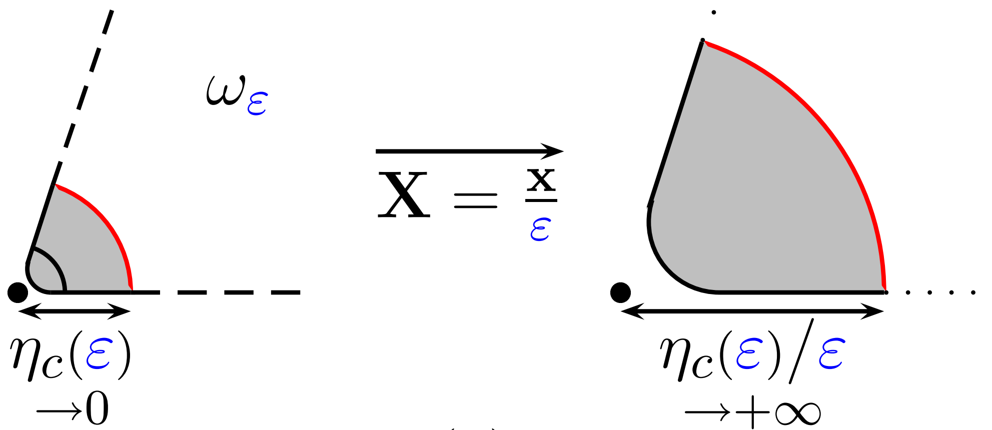
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\eta_c(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim_{\varepsilon \to 0} \eta_c(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ proche



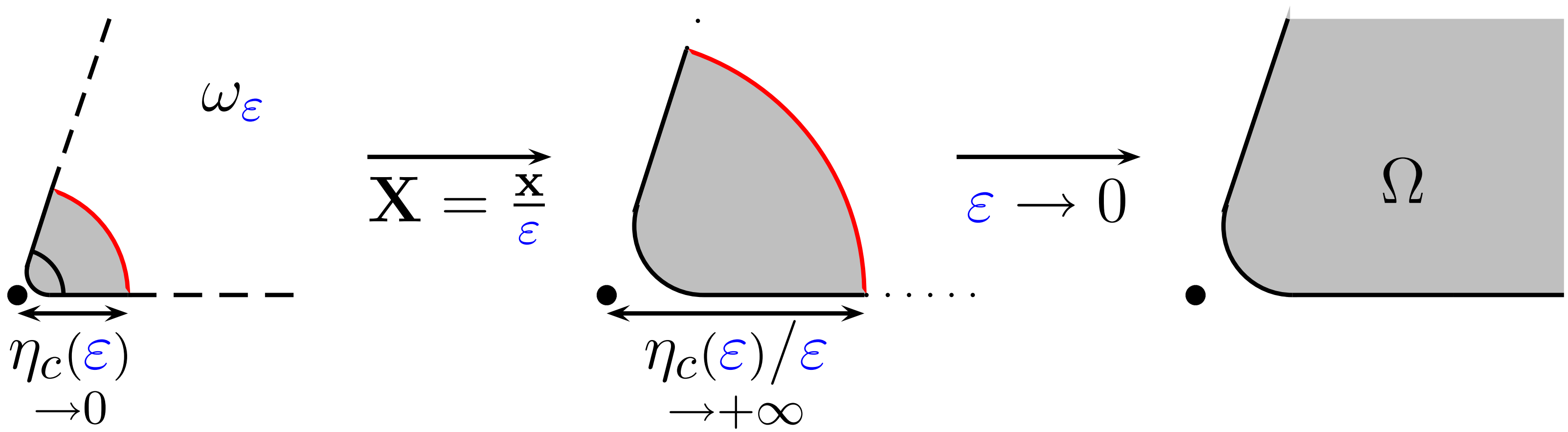
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_c(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta_c(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ proche



- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\eta_c(\varepsilon)}{\varepsilon} = +\infty.$
- c.-à-d. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \eta_c(\varepsilon) = 0.$

La zone de validité du champ proche



Les termes U^i du développement asymtptotique

$$\mathsf{u}^\varepsilon(\varepsilon \mathbf{X}) \;=\; \mathsf{U}^\varepsilon(\mathbf{X}) \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\, \mathsf{U}^i(\mathbf{X}) \;+\; \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{o}(\varepsilon^\infty)$$

sont définis sur Ω.

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathrm{u}^{\varepsilon} = f \quad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Les équations de champ proche

u^ε vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^\varepsilon \;=\; f \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta \mathsf{u}^\varepsilon(\varepsilon\mathbf{X}) \;=\; 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega. \quad (\varepsilon\mathbf{X} \notin \text{supp}(f))$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; f \qquad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta_X \mathsf{U}^{\varepsilon}(\mathbf{X}) \;=\; 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega. \quad (\varepsilon\mathbf{X} \notin \text{supp}(f))$$

Les équations de champ proche

u^ε vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^\varepsilon \; = \; f \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$-\Delta \Big[\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\, \mathsf{U}^i(\mathbf{X}) \Big] \; = \; 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; f \qquad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon \mathbf{X} \in \omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\big[-\Delta \mathsf{U}^{i}(\mathbf{X})\big] \;=\; 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$-\Delta \mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; f \qquad \text{dans } \omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\big[-\Delta \mathsf{U}^{i}(\mathbf{X})\big] \;=\; 0, \quad \mathbf{X} \in \Omega.$$

En identifiant terme à terme, il vient

$$-\Delta \mathsf{U}^{i} = 0 \qquad \text{dans } \Omega.$$

Les équations de champ proche

u^ε vérifie

$$u^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; 0 \quad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \partial\Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\varepsilon\mathbf{X}) \;=\; 0, \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega.$$

Les équations de champ proche

u^ε vérifie

$$u^\varepsilon \;=\; 0 \qquad \text{sur } \partial\omega_\varepsilon.$$

Soit $\mathbf{X} \in \partial\Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \partial\omega_\varepsilon$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$U^\varepsilon(\mathbf{X}) \;=\; 0, \qquad \mathbf{X} \in \partial\Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; 0 \quad \text{ sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \partial\Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{U}^{i}(\mathbf{x}) \;=\; 0, \quad \mathbf{X} \in \partial\Omega.$$

Les équations de champ proche

u^{ε} vérifie

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; 0 \qquad \text{sur } \partial\omega_{\varepsilon}.$$

Soit $\mathbf{X} \in \partial\Omega$. Pour ε suffisamment petit, $\varepsilon\mathbf{X} \in \partial\omega_{\varepsilon}$ (plus précisément à la zone de validité de champ lointain)

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^{i}(\varepsilon)\, \mathsf{U}^{i}(\mathbf{x}) \;=\; 0, \qquad \mathbf{X} \in \partial\Omega.$$

En identifiant terme à terme, il vient

$$\mathsf{U}^{i} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega.$$

Les conditions de raccord

- Objectif: fermer les systèmes définissant les termes de développements asymptotiques.
- Méthode: Raccords des développements singuliers (asymptotique en espace)
- Outil: Opération algébrique sur l'ensemble des séries formelles
- En trois temps

  1) Etude des singularités de champ lointain

  2) Etude des singularités de champ proche

  3) Identification des raccords

Développement singulier

- Nous recherchons les champs lointains vérifiant

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^i \;=\; 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^i \;=\; 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbb{N}), \end{cases}$$

Développement singulier

- Nous recherchons les champs lointains vérifiant

$$\left\{\begin{array}{ll} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^i \;=\; 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^i \;=\; 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbb{N}), \end{array}\right.$$

- Développement singulier (au voisinage du coin)

$$\mathsf{u}^i = \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}^i_{p\lambda}\ \mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta) \right)}_{\text{Terme non variationnel}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{b}^i_{p\lambda}\ \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \right)}_{\text{Terme variationnel}}$$

avec

$$\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) = r^{p\lambda}\ \sin\left(p\lambda\right) \quad p \in \mathbb{Z}^*.$$

Développement singulier

- ~**Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(a_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Développement singulier

- **˜Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{a}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

Développement singulier

- ˜**Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{a}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
  - Si $\mathsf{f} \in \mathsf{L}^2$ est à support compact dans l'ouvert ω

Développement singulier

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{a}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
  - Si $\mathsf{f} \in \mathsf{L}^2$ est à support compact dans l'ouvert ω

alors il existe un unique $u \in \mathsf{H}^1_*(\omega)$ où

$$\mathsf{H}^1_*(\omega) \;=\; \Big\{\mathsf{v}\Big|\chi\mathsf{v} \in \mathsf{H}^1(\omega) \text{ pour tout } \chi \in C^\infty(\overline{\omega}) \text{ avec } \mathbf{0} \notin \mathrm{supp}(\chi)\Big\}. \tag{1}$$

Développement singulier

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{a}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
  - Si $\mathsf{f} \in \mathsf{L}^2$ est à support compact dans l'ouvert ω

alors il existe un unique $u \in \mathsf{H}^1_*(\omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta \mathsf{u} = \mathsf{f} \text{ dans } \omega, \\ \mathsf{u} = 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{0\}, \\ \mathsf{u} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda} \right) \in \mathsf{H}^1(\omega). \end{cases}$$

Développement singulier

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{a}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.
  - Si $\mathsf{f} \in \mathsf{L}^2$ est à support compact dans l'ouvert ω

  alors il existe un unique $u \in \mathsf{H}^1_*(\omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta \mathsf{u} = \mathsf{f} \text{ dans } \omega, \\ \mathsf{u} = 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{0\}, \\ \mathsf{u} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda} \right) \in \mathsf{H}^1(\omega). \end{cases}$$

- Il nous manque les $\mathsf{a}^i_{p\lambda}$ pour déterminer les u^i.

  Notion d'information manquante

Développement singulier (champ proche)

- Nous recherchons les champs proches vérifiant

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{U}^i = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathsf{U}^i = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Développement singulier (champ proche)

- Nous recherchons les champs proches vérifiant

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{U}^i = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathsf{U}^i = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Développement singulier (dans un voisinage de l'infini)

$$\mathsf{U}^i = \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{A}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(\rho,\theta) \Big)}_{\text{Terme non variationnel}} + \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{B}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(\rho,\theta) \Big)}_{\text{Terme variationnel}},$$

avec $s^{p\lambda}(\rho,\theta) \;=\; \rho^{p\lambda}\ \cos\frac{p\pi\theta}{\alpha}, \quad p \in \mathbb{Z}^*$.

Développement singulier (champ proche)

- ˜**Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite qui ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls.

Développement singulier (champ proche)

- **˜Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

Développement singulier (champ proche)

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

alors il existe un unique $\mathsf{U} \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$ où

$$\mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega) = \left\{\mathsf{v}\middle|\chi\mathsf{v} \in \mathsf{H}^1(\Omega) \text{ pour tout } \chi \in C^\infty(\overline{\Omega})\right\}. \qquad (1)$$

Développement singulier (champ proche)

- ˜**Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

alors il existe un unique $\mathsf{U} \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$

Développement singulier (champ proche)

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

alors il existe un unique $\mathsf{U} \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta \mathsf{U} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathsf{U} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}\right) \;=\; \underset{R\to+\infty}{O}(1). \end{cases}$$

Développement singulier (champ proche)

- **Théorème.** (Existence et Unicité)
  - Si $(\mathsf{A}_{p\lambda} \in \mathbb{R})_{p\in\mathbb{N}}$ est presque nulle.

alors il existe un unique $\mathsf{U} \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} -\Delta \mathsf{U} = 0 \text{ dans } \Omega, \\ \mathsf{U} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U} - \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda} \right) \; = \; \underset{R\to+\infty}{O}(1). \end{cases}$$

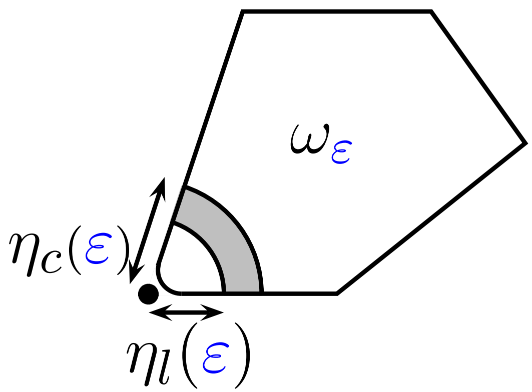
- Il nous manque les $\mathsf{A}^i_{p\lambda}$ pour déterminer les U^i.

Notion d'information manquante

Les raccords

- On se place dans une zone intermédiaire

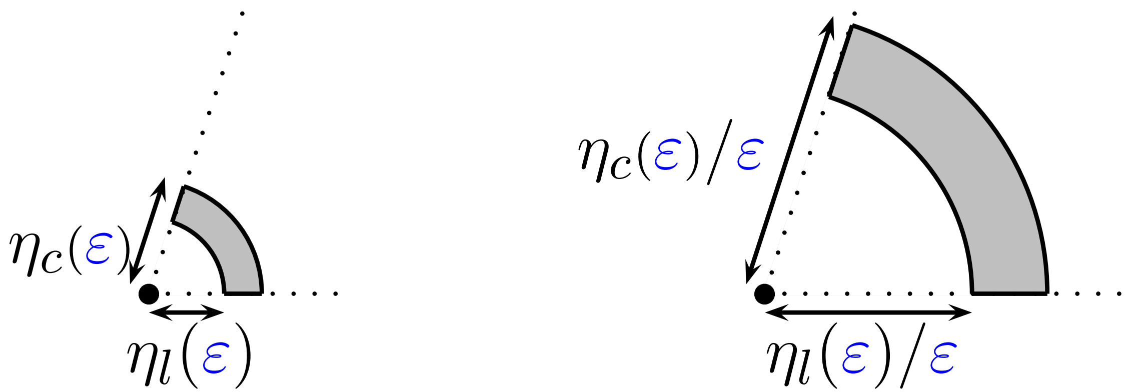
$$\eta_l(\varepsilon) \leqslant r \leqslant \eta_c(\varepsilon) \quad \text{avec } \eta(\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ et } \eta(\varepsilon)/\varepsilon \longrightarrow +\infty.$$



Les raccords

- On se place dans une zone intermédiaire

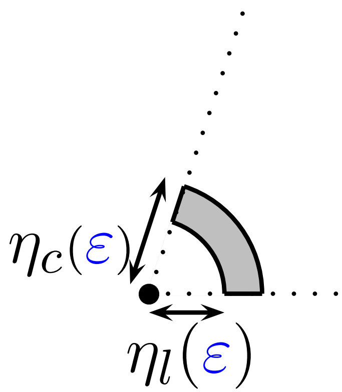
$$\eta_l(\varepsilon) \leqslant r \leqslant \eta_c(\varepsilon) \quad \text{avec } \eta(\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ et } \eta(\varepsilon)/\varepsilon \longrightarrow +\infty.$$

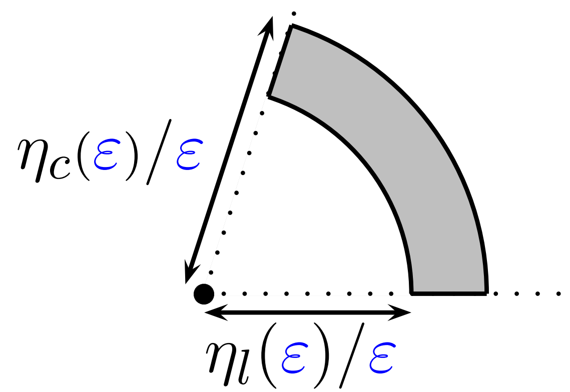


Les raccords

- On se place dans une zone intermédiaire

$$\eta_l(\varepsilon) \leqslant r \leqslant \eta_c(\varepsilon) \quad \text{avec } \eta(\varepsilon) \longrightarrow 0 \text{ et } \eta(\varepsilon)/\varepsilon \longrightarrow +\infty.$$





- En variable lente et rapide, on a

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\, \mathsf{u}^i(r,\theta) = \mathsf{u}^\varepsilon(r,\theta) = \mathsf{U}^\varepsilon(\tfrac{r}{\varepsilon},\theta) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\, \mathsf{U}^i(\tfrac{r}{\varepsilon},\theta)$$

Les raccords

- En variable lente et rapide, on a

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\ \mathsf{u}^i(r,\theta) \ = \ \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\ \mathsf{U}^i(\tfrac{r}{\varepsilon},\theta)$$

Les raccords

- On injecte les développements singuliers de u^i et U^i

$$\left\{\begin{array}{c}
\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon) \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta) \;+\; \mathsf{b}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\right)}_{\mathsf{u}^i(r,\theta)} \\
= \\
\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon) \underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta) \;+\; \mathsf{B}^i_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\right)}_{\mathsf{U}^i(\frac{r}{\varepsilon},\theta)}
\end{array}\right.$$

Les raccords

- On injecte les développements singuliers de u^i et U^i

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\Big(\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{a}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\;+\;\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{b}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big) \\ = \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\Big(\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{A}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\;+\;\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{B}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big) \end{array}\right.$$

Or

$$\left\{\begin{array}{lcl} s^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta) & = & \varepsilon^{-p\lambda}\,s^{p\lambda}(r,\theta), \\ s^{-p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta) & = & \varepsilon^{p\lambda}\,s^{-p\lambda}(r,\theta). \end{array}\right.$$

Les raccords

- On injecte les développements singuliers de u^i et U^i

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{a}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\;+\;\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{b}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\right) \\ = \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\left(\varepsilon^{-p\lambda}\,\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{A}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\;+\;\varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{B}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\right) \end{array}\right.$$

Les raccords

- On injecte les développements singuliers de u^i et U^i

$$\left\{\begin{array}{c} \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\Big(\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{a}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\;+\;\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{b}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big) \\ = \\ \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\Big(\varepsilon^{-p\lambda}\,\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{A}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\;+\;\varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{B}^i_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta)\Big)\end{array}\right.$$

On identifie les termes en $\mathsf{s}^{-p\lambda}$ et $\mathsf{s}^{p\lambda}$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{a}^i_{p\lambda} \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{B}^i_{p\lambda},$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\mathsf{f}^i(\varepsilon)\,\mathsf{b}^i_{p\lambda} \;=\; \varepsilon^{-p\lambda}\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\mathsf{F}^i(\varepsilon)\,\mathsf{A}^i_{p\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- Comment choisir les $\mathrm{f}^i(\varepsilon)$ et $\mathrm{F}^i(\varepsilon)$?

Choix des fonctions de jauge

- Comment choisir les $\mathsf{f}^i(\varepsilon)$ et $\mathsf{F}^i(\varepsilon)$?
- Il nous faut imposer les relations

$$\left\{\begin{array}{rcl}\displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\, \mathsf{a}^i_{p\lambda} & = & \displaystyle\varepsilon^{p\lambda} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\, \mathsf{B}^i_{p\lambda}, \\ \displaystyle\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{f}^i(\varepsilon)\, \mathsf{b}^i_{p\lambda} & = & \displaystyle\varepsilon^{-p\lambda} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \mathsf{F}^i(\varepsilon)\, \mathsf{A}^i_{p\lambda}.\end{array}\right.$$

Il semble suffisant de considérer

$$\mathsf{f}^{\,i}(\varepsilon) = \varepsilon^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{F}^i(\varepsilon) = \varepsilon^{i\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- C'est-à-dire les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

et les relations de couplage

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{(i+p)\lambda}\, \mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda},$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{(i-p)\lambda}\, \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- C'est-à-dire les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

et les relations de couplage

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda},$$

$$\sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{A}_{p\lambda}^{(i+p)\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- C'est-à-dire les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

- En identifiant il vient les relations de couplage

$$\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{A}_{p\lambda}^{(i+p)\lambda}.$$

Choix des fonctions de jauge

- C'est-à-dire les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

- et par conséquent

$$\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{b}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}.$$

Un résultat de stabilité

- Sous forme variationnelle le problème

$$\text{Chercher } u^{\varepsilon} \in H^1_0(\omega_{\varepsilon}) \text{ tel que } \Delta u^{\varepsilon} = -f.$$

s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u^{\varepsilon} \in H^1_0(\omega_{\varepsilon}) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_{\omega_{\varepsilon}} \nabla u^{\varepsilon} \cdot \nabla v = \int_{\omega_{\varepsilon}} f\, v \quad \forall v \in H^1_0(\omega_{\varepsilon}). \end{array} \right.$$

Un résultat de stabilité

- Sous forme variationnelle le problème

$$\text{Chercher } u^\varepsilon \in H^1_0(\omega_\varepsilon) \text{ tel que } \Delta u^\varepsilon \;=\; -f.$$

s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Chercher } u^\varepsilon \in H^1_0(\omega_\varepsilon) \text{ tel que} \\ \displaystyle\int_{\omega_\varepsilon} \nabla u^\varepsilon \cdot \nabla v \;=\; \int_{\omega_\varepsilon} f\, v \quad \forall v \in H^1_0(\omega_\varepsilon). \end{array} \right.$$

- Pour $v = u^\varepsilon$, on montre la stabilité de u^ε

$$\|u^\varepsilon\|_{H^1(\omega_\varepsilon)} \;\leqslant\; C\; \|f\|_{L^2(\omega^\varepsilon)}.$$

Un résultat de stabilité

- Ainsi,

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; \underset{\varepsilon \to 0}{O}(1) \qquad \text{dans } \mathrm{H}^1(\omega_{\varepsilon})$$

Un résultat de stabilité

- Ainsi,

$$\mathrm{u}^{\varepsilon} = \underset{\varepsilon \to 0}{O}(1) \qquad \text{dans } \mathrm{H}^1(\omega_{\varepsilon})$$

- Conséquence sur les Ansatz

$$\mathrm{u}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathrm{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}^{\varepsilon} = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathrm{U}^{i\lambda}.$$

Un résultat de stabilité

- Ainsi,

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}(1) \qquad \text{dans } \mathsf{H}^1(\omega_{\varepsilon})$$

- Conséquence sur les Ansatz

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} \;=\; \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

- Pas de termes d'indice négatif (condition nécessaire à la stabilité)

$$\mathsf{u}^{\varepsilon} \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \quad \text{et} \quad \mathsf{U}^{\varepsilon} \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}.$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ lointain

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^{i\lambda} \ = \ 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^{i\lambda} \ = \ 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbb{N}), \\ \mathsf{u}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{-p\lambda}(r, \theta) \right) \ + \ \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{p\lambda}(r, \theta) \right) & \end{cases}$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ lointain

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^{i\lambda} \ = \ 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^{i\lambda} \ = \ 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbb{N}), \\ \mathsf{u}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta) \right) \ + \ \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \right) & \end{cases}$$

- Relation de couplage

$$\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \ = \ \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda},$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ lointain

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^{i\lambda} \;=\; 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^{i\lambda} \;=\; 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbf{N}), \\ \mathsf{u}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta) \right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \right) & \end{cases}$$

- Relation de couplage ($\mathsf{U}^{(i-p)\lambda} \equiv 0$ pour $p > i$)

$$\begin{cases} \mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \;=\; \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}, & 1 \leqslant p \leqslant i, \\ \mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \;=\; 0, & p > i. \end{cases}$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ lointain

$$\begin{cases} \Delta \mathsf{u}^0 = -\mathsf{f} \text{ et } \Delta \mathsf{u}^{i\lambda} \;=\; 0 \text{ dans } \omega, & (i \geqslant 1) \\ \mathsf{u}^{i\lambda} \;=\; 0 \text{ sur } \partial\omega \setminus \{O\} & (i \in \mathbb{N}), \\ \mathsf{u}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{-p\lambda}(r,\theta) \right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{b}_{p\lambda}^{i\lambda} \, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \right) & \end{cases}$$

- Relation de couplage ($\mathsf{U}^{(i-p)\lambda} \equiv 0$ pour $p > i$)

$$\begin{cases} \mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \;=\; \mathsf{B}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}, & 1 \leqslant p \leqslant i, \\ \mathsf{a}_{p\lambda}^{i\lambda} \;=\; 0, & p > i. \end{cases}$$

- Connaissant les $\mathsf{U}^{j\lambda}$, $j < i$, le terme $\mathsf{u}^{i\lambda}$ est déterminé.

Définition des termes des développements

- Termes en champ proche $(i \in \mathbb{N})$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \multicolumn{4}{l}{\mathsf{U}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(R,\theta)\right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(R,\theta)\right)} \end{array}\right.$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ proche $(i \in \mathbb{N})$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \multicolumn{4}{l}{\mathsf{U}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(R,\theta) \right) + \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(R,\theta) \right)} \end{array}\right.$$

- Relation de couplage

$$\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} = \mathsf{b}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda},$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ proche ($i \in \mathbb{N}$)

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(R,\theta) \right) & + & \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \left(\mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(R,\theta) \right) & \end{array}\right.$$

- Relation de couplage ($\mathsf{u}^{(i-p)\lambda} \equiv 0$ pour $p > i$)

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} & = & \mathsf{b}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}, & 1 \leqslant p \leqslant i, \\ \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} & = & 0, & p > i. \end{array}\right.$$

Définition des termes des développements

- Termes en champ proche $(i \in \mathbb{N})$

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{dans } \omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{U}^{i\lambda} = \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(R,\theta) \Big) & + & \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \Big(\mathsf{B}_{p\lambda}^{i\lambda}\, \mathsf{s}^{-p\lambda}(R,\theta) \Big) & \end{array}\right.$$

- Relation de couplage ($\mathsf{u}^{(i-p)\lambda} \equiv 0$ pour $p > i$)

$$\left\{\begin{array}{rcll} \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} & = & \mathsf{b}_{p\lambda}^{(i-p)\lambda}, & 1 \leqslant p \leqslant i, \\ \mathsf{A}_{p\lambda}^{i\lambda} & = & 0, & p > i. \end{array}\right.$$

- Connaissant les $\mathsf{u}^{j\lambda}$, $j < i$, le terme $\mathsf{U}^{i\lambda}$ est déterminé.

Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

  Chercher $\mathsf{u}^0 \in \mathsf{H}_0^1(\omega)$ tel que $-\Delta \mathsf{u}^0 = f$ et $\mathsf{U}^{i\lambda} \equiv 0.$

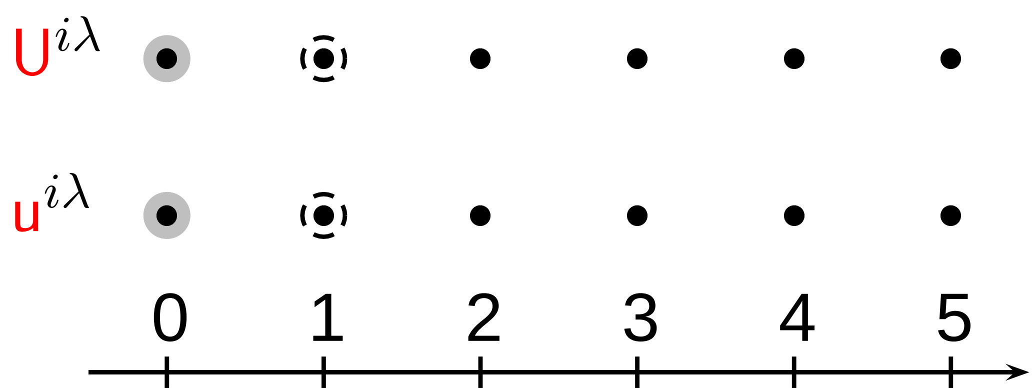
- Construction du terme général

Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

Chercher $\mathsf{u}^0 \in \mathsf{H}^1_0(\omega)$ tel que $-\Delta \mathsf{u}^0 = f$ et $\mathsf{U}^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général

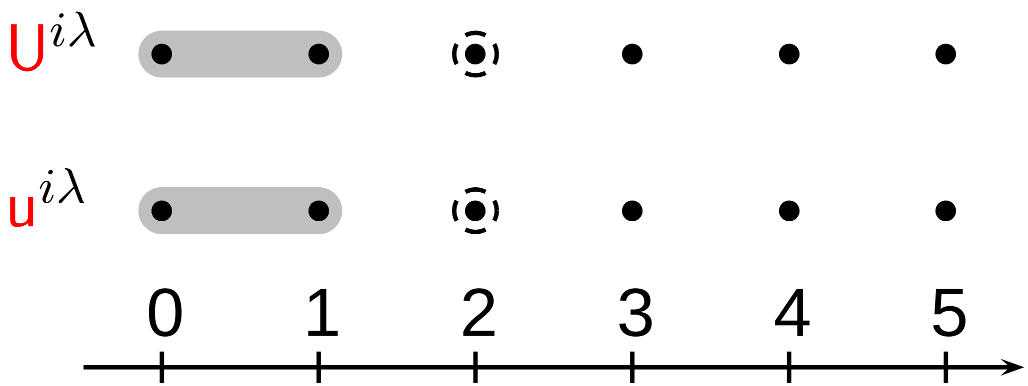


Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

Chercher $u^0 \in H^1_0(\omega)$ tel que $-\Delta u^0 = f$ et $U^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général

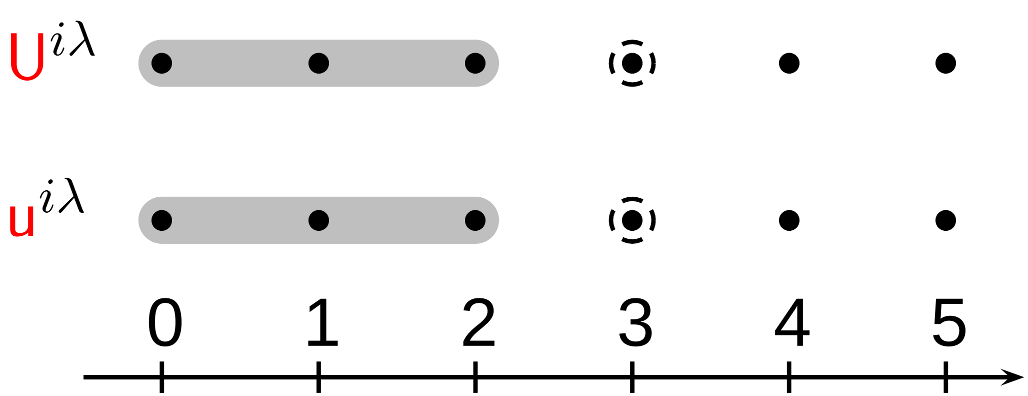


Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

Chercher $\mathsf{u}^0 \in \mathsf{H}^1_0(\omega)$ tel que $-\Delta \mathsf{u}^0 = f$ et $\mathsf{U}^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général

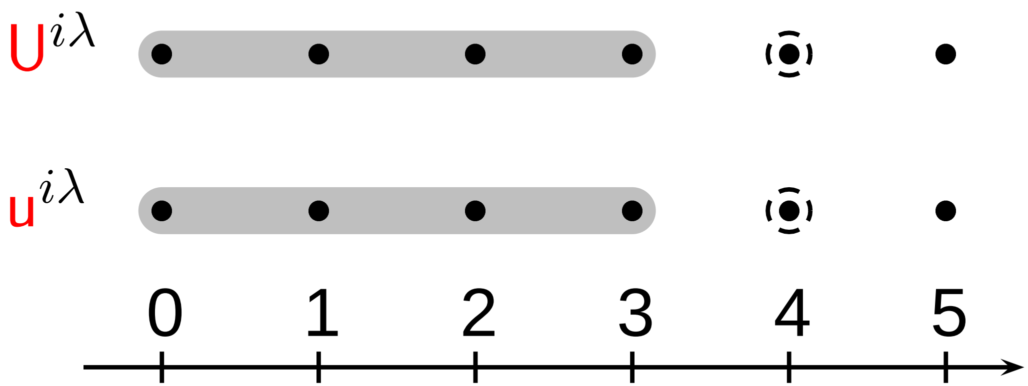


Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

Chercher $\mathsf{u}^0 \in \mathsf{H}_0^1(\omega)$ tel que $-\Delta \mathsf{u}^0 = f$ et $\mathsf{U}^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général

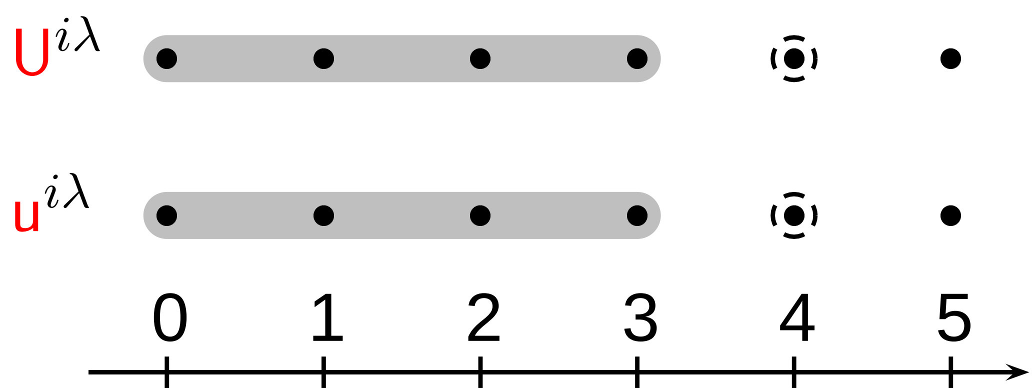


Un diagramme de définition hierarchique

- Initialisation de l'algorithme

  Chercher $\mathsf{u}^0 \in \mathsf{H}^1_0(\omega)$ tel que $-\Delta \mathsf{u}^0 = f$ et $\mathsf{U}^{i\lambda} \equiv 0.$

- Construction du terme général



- Les suites de fonctions $(\mathsf{u}^{i\lambda})_i$ et $(\mathsf{U}^{i\lambda})_i$ sont bien définies.

En résumé

- A disposition, des séries formelles

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(r,\theta) \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}(r,\theta)$$

- Quel sens mathématique donner aux égalités formelles

$$\mathsf{u}_{\varepsilon}(r,\theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(r,\theta) \quad \text{et} \quad \mathsf{U}_{\varepsilon}(r,\theta) = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}(r,\theta)?$$

- Sens non évident car on peut montrer que ces séries ne convergent pas vers u^{ε}! Il n'y a pas égalité ???

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ lointain

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ lointain
  - Les termes u_i sont singuliers au voisinage de 0.

    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout ω.

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ lointain
  - Les termes u_i sont singuliers au voisinage de 0.
    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout ω.
  - Par contre, on peut espérer montrer l'estimation

    Pour tout $r_0 > 0$,

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon(r,\theta) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda} \; \mathsf{u}^{i\lambda}(r,\theta) \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} = \underset{\varepsilon \to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ lointain
  - Les termes u_i sont singuliers au voisinage de 0.

    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout ω.
  - Par contre, on peut espérer montrer l'estimation

    Pour tout $r_0 > 0$,

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon(r,\theta) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda} \, \mathsf{u}^{i\lambda}(r,\theta) \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} = \underset{\varepsilon \to 0}{O} \left(\varepsilon^{(n+1)\lambda} \right).$$

  - Ceci monterait l'unicité du développement.

    (Développement de Taylor dans $\mathsf{H}^1_*(\omega)$)

Les estimations d’erreurs locales

- Estimation de champ proche

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ proche
  - Les termes U_i sont croissants au voisinage de l'∞.

    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout Ω.

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ proche
  - Les termes U_i sont croissants au voisinage de l'∞.

    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout Ω.
  - Par contre on peut espérer montrer l'estimation

    Pout tout $R_0 > 0$,

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon(\varepsilon R, \theta) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}(R, \theta) \right\|_{\mathsf{H}^1(\Omega \cap B_{R_0})} \underset{\varepsilon \to 0}{=} O\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Les estimations d'erreurs locales

- Estimation de champ proche
  - Les termes U_i sont croissants au voisinage de l'∞.

    $\Longrightarrow$ Pas d'estimation sur tout Ω.
  - Par contre on peut espérer montrer l'estimation

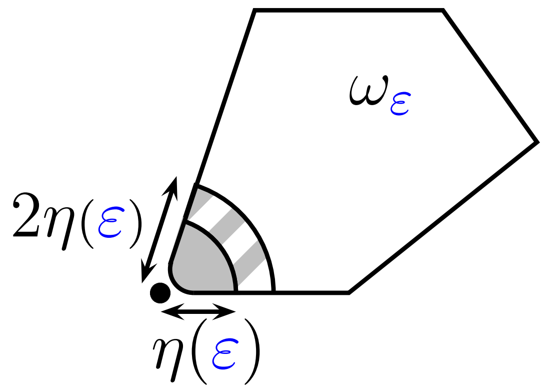
    Pout tout $R_0 > 0$,

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon(\varepsilon R, \theta) - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda} \, \mathsf{U}^{i\lambda}(R,\theta) \right\|_{\mathsf{H}^1(\Omega \cap B_{R_0})} = \underset{\varepsilon \to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

  - Ceci monterait l'unicité du développement.

    (Développement de Taylor dans $\mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega)$)

Estimation d'erreur globale



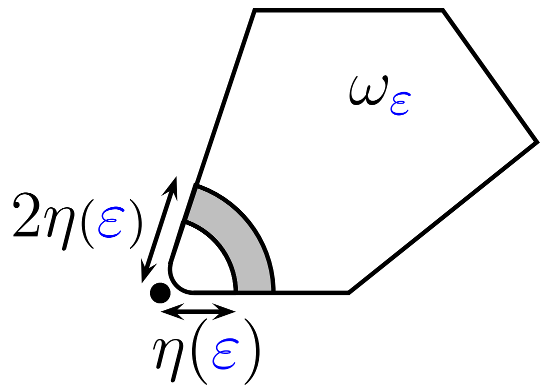
Soit χ et ψ réalisant une partition de l'unité sur $\mathbb{R}^+$

$$\chi(s) + \psi(s) = 1 \quad \text{et} \quad \chi([0,1]) = 1 \text{ et } \chi([2,+\infty[) = 0.$$

On définit l'approximation

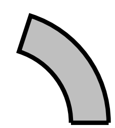
$$\widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon} \;=\; \psi\Big(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}\Big) \;+\; \chi\Big(\frac{|\mathbf{x}|}{\eta(\varepsilon)}\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}\Big).$$

Estimation d'erreur globale

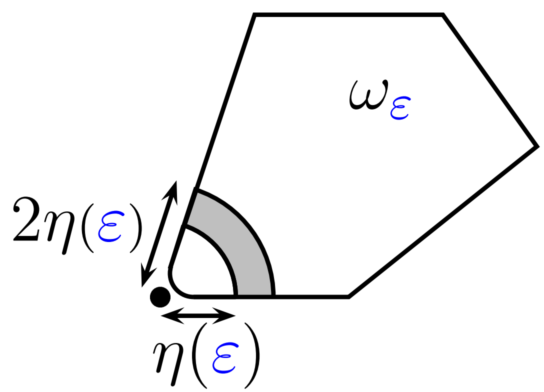


L'erreur $\mathsf{e}_n^\varepsilon = \mathsf{u}^\varepsilon - \widetilde{\mathsf{u}}_n^\varepsilon$ vérifie

$$\begin{cases} \mathsf{e}_n^\varepsilon \in \mathsf{H}^1(\omega^\varepsilon), \\ \mathsf{e}_n^\varepsilon \; = \; 0 \qquad \text{sur } \partial\omega^\varepsilon, \\ \operatorname{supp}(\Delta \mathsf{e}_n^\varepsilon) \; = \end{cases}$$



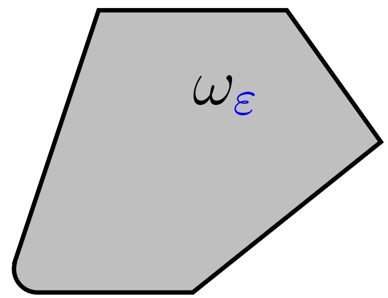
Estimation d'erreur globale



L'erreur $\mathsf{e}_n^\varepsilon = \mathsf{u}^\varepsilon - \widetilde{\mathsf{u}}_n^\varepsilon$ vérifie

$$\begin{cases} \mathsf{e}_n^\varepsilon \in \mathsf{H}_0^1(\omega^\varepsilon), \\ \|\Delta \mathsf{e}_n^\varepsilon\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega^\varepsilon)} \leqslant C\,\big(\eta(\varepsilon)\big)^{n+1} + \left(\dfrac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right)^{n+1}, \end{cases}$$

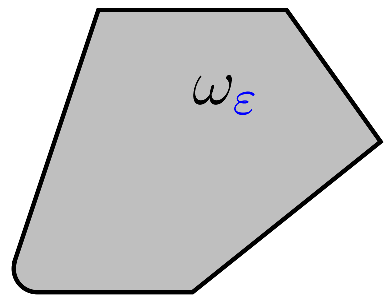
Estimation d'erreur globale



et, par conséquent

$$\|\mathsf{e}_n^{\varepsilon}\|_{\mathsf{H}_0^1(\omega^{\varepsilon})} \leqslant C \, \big(\eta(\varepsilon)\big)^{n+1} + \left(\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right)^{n+1}.$$

Estimation d'erreur globale



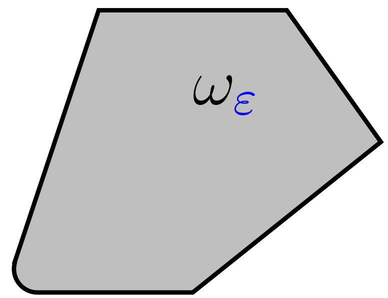
et, par conséquent

$$\|\mathsf{e}_n^\varepsilon\|_{\mathsf{H}_0^1(\omega^\varepsilon)} \leqslant C\,\big(\eta(\varepsilon)\big)^{n+1} + \left(\frac{\varepsilon}{\eta(\varepsilon)}\right)^{n+1}.$$

On optimise le choix de $\eta(\varepsilon)$

$$\eta(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \quad \Longrightarrow \quad \|\mathsf{e}_n^\varepsilon\|_{\mathsf{H}_0^1(\omega^\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}.$$

Estimation d'erreur globale



Théorème. Pour

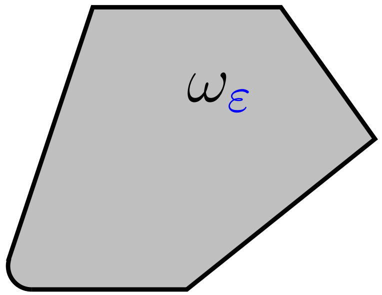
$$\widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon} \;=\; \psi\big(\tfrac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\varepsilon}}\big)\Big(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}\Big) \;+\; \chi\big(\tfrac{|\mathbf{x}|}{\sqrt{\varepsilon}}\big)\Big(\sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{U}^{i\lambda}\Big),$$

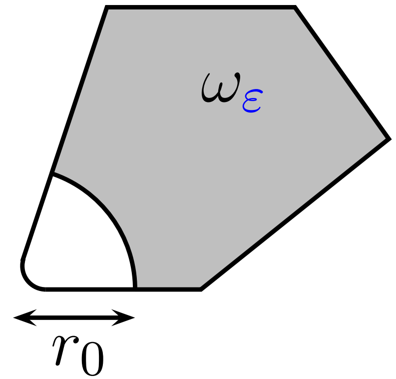
il existe $C > 0$ tel que

$$\big\|\mathsf{u}^{\varepsilon} - \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon}\big\|_{\mathsf{H}_0^1(\omega^{\varepsilon})} \;\leqslant\; C\,\varepsilon^{\frac{n+1}{2}}.$$

Du global au local

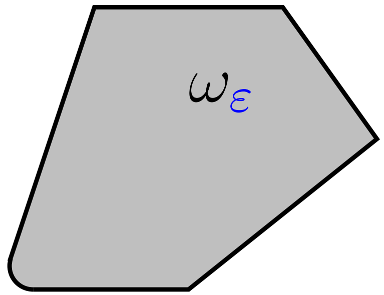
Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.

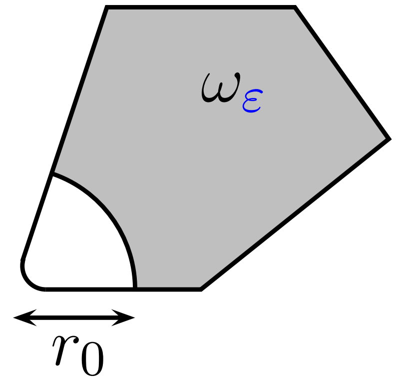




Du global au local

Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.

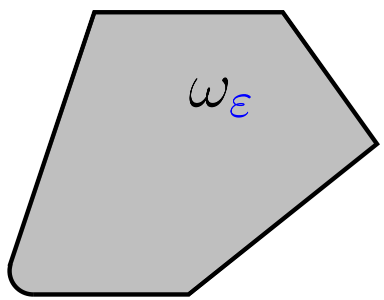


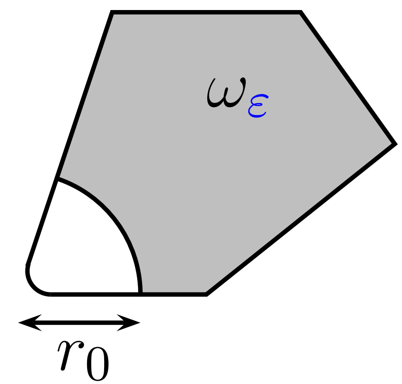


$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega_\varepsilon)} \;\leqslant\; C\; \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}}.$$

Du global au local

Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.

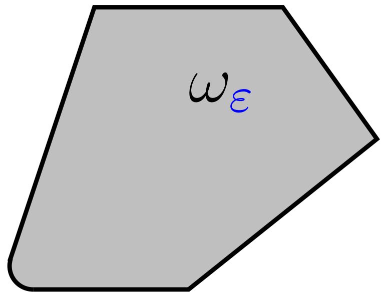


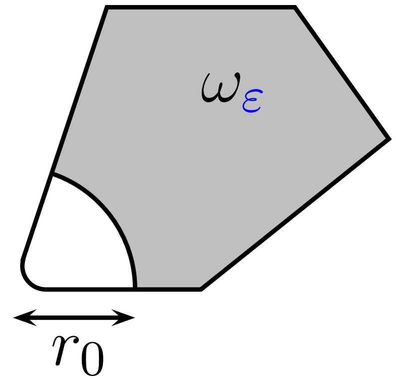


$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega_\varepsilon \setminus B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}}.$$

Du global au local

Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.

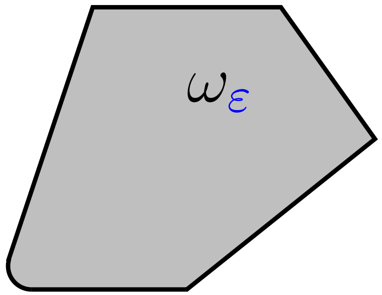


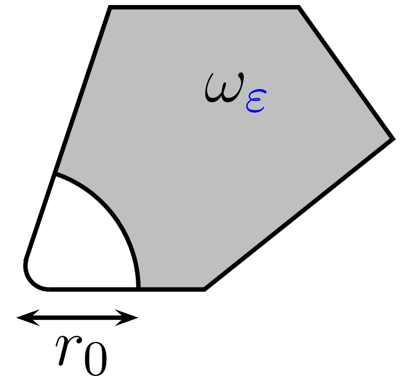


$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}}.$$

Du global au local

Pour $\|\mathbf{x}\| > r_0 > 0$, $\quad \widetilde{\mathsf{u}}_n^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda}(\mathbf{x})$.





$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal).}$$

Du global au local

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal).}$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\begin{aligned} \left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \leqslant & \left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{2n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \\ & + \left\| \sum_{i=n+1}^{2n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})}. \end{aligned}$$

Du global au local

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \leqslant\ C\ \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal).}$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \leqslant\ C\ \varepsilon^{n+1} + \left\| \sum_{i=n+1}^{2n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})}.$$

Du global au local

$$\left\| u^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, u^{i\lambda} \right\|_{\mathrm{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal).}$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\left\| u^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, u^{i\lambda} \right\|_{\mathrm{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant C\, \varepsilon^{n+1} + \sum_{i=n+1}^{2n} \varepsilon^{i\lambda} \left\| u^{i\lambda} \right\|_{\mathrm{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})}.$$

Du global au local

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \leqslant C\ \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal)}.$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \leqslant C\ \varepsilon^{n+1} + C\ \varepsilon^{n+1}.$$

Du global au local

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda} \, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant \; C \, \varepsilon^{\frac{(n+1)\lambda}{2}} \quad \text{(non optimal).}$$

On rattrape l'ordre optimal

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda} \, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant \; C \, \varepsilon^{n+1} \; + \; C \, \varepsilon^{n+1}.$$

Ainsi, on a l'estimation optimale

$$\left\| \mathsf{u}^{\varepsilon} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda} \, \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \backslash B_{r_0})} \leqslant \; C \, \varepsilon^{n+1}.$$

Les développements multiéchelles

- Un développement (double) multiéchelle a la forme

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\, \mathcal{V}^{i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}/\varepsilon)$$

- On se restreint ici à

$$\mathsf{u}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{+\infty} \mathsf{f}^{i}(\varepsilon)\, \Big(\underline{\chi}(\mathbf{x}/\varepsilon)\, \mathsf{v}^{i}(\mathbf{x}) + \underline{\psi}(\mathbf{x})\, \mathsf{V}^{i}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big) + \underset{\varepsilon\to 0}{o}(\varepsilon^{\infty})$$

avec $\underline{\chi}$ et $\underline{\psi}$ des fonctions de troncature,
avec v^{i} et V^{i} des termes variationnels.

Les développements multiéchelles

- Pas de canonicité des développements multiéchelles, pas de recette miracle.
- Pas de calcul formel dans la démarche!

Initialisation de l'algorithme

La limite de u^ε solution de

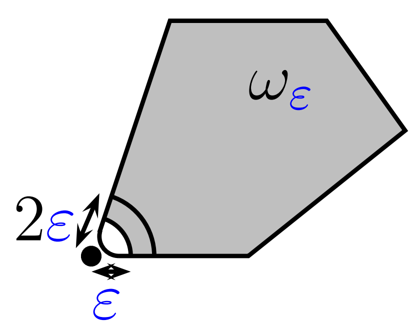
$$\text{Trouver } \mathsf{u}^\varepsilon \in \mathsf{H}^1_0(\omega_\varepsilon) \qquad -\Delta \mathsf{u}^\varepsilon = f \qquad \text{dans } \omega_\varepsilon.$$

est v^0 donné par la résolution de

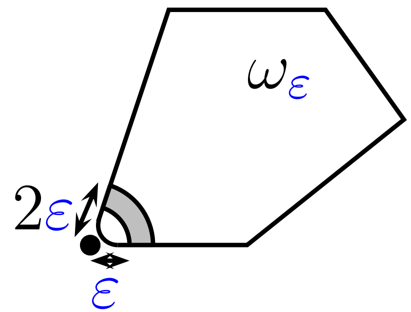
$$\text{Trouver } \mathsf{v}^0 \in \mathsf{H}^1_0(\omega) \qquad -\Delta \mathsf{v}^0 = f \qquad \text{dans } \omega.$$

Pour définir v^0 sur ω_ε, on utilise une fonction de troncature

$$\widetilde{\mathsf{v}}^\varepsilon_0(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\, \mathsf{v}^0(\mathbf{x}).$$

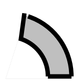


Calcul de l’ordre 1



On calcule le résidu $\mathsf{r}_0^\varepsilon \;=\; \Delta\Big(\widetilde{\mathsf{v}}_0^\varepsilon - \mathsf{u}^\varepsilon\Big)$

$$\mathrm{supp}(\mathsf{r}_0^\varepsilon) \;=$$ 

et dans  on a

$$\mathsf{r}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \;=\; \Delta\Big[\chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\;\mathsf{v}^0(\mathbf{x})\Big]$$

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \sum_{p=1}^{+\infty} \alpha^0_{p\lambda}\, \mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

avec $\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\ \mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta).$ $\quad$ ($\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\ \mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta)$)

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \alpha^0_\lambda\,\mathsf{s}^\lambda(r,\theta) \;+\; \sum_{p=2}^{+\infty} \alpha^0_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

avec $\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta).\qquad (\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta))$

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \varepsilon^\lambda\,\alpha^0_\lambda\,\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta) \;+\; \sum_{p=2}^{+\infty}\alpha^0_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

avec $\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta).$ $\quad$ $(\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta) \;=\; \varepsilon^{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(\frac{r}{\varepsilon},\theta))$

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \varepsilon^\lambda\,\alpha^0_\lambda\,\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta) \;+\; \sum_{p=2}^{+\infty}\alpha^0_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

Par conséquent, on a

$$\mathsf{r}^\varepsilon_0 \;=\; \varepsilon^\lambda\,\alpha^0_\lambda\,\Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big] \;+\; \Delta\Big[\sum_{p=2}^{+\infty}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\alpha^0_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big]$$

Calcul de l'ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \varepsilon^\lambda\,\alpha^0_\lambda\,\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\;+\;\sum_{p=2}^{+\infty}\alpha^0_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

Par conséquent, on a

$$\mathsf{r}^\varepsilon_0 \;=\; \underbrace{\varepsilon^\lambda\,\alpha^0_\lambda\,\Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big]}_{\|\cdot\|_{H^{-1}(\omega_\varepsilon)}=C\,\varepsilon^\lambda}\;+\;\underbrace{\Delta\Big[\sum_{p=2}^{+\infty}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\alpha^0_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big]}_{\|\cdot\|_{H^{-1}(\omega_\varepsilon)}\leqslant C\,\varepsilon^{2\lambda}}$$

Calcul de l’ordre 1

Développons v^0 sous la forme

$$\mathsf{v}^0(r,\theta) \;=\; \varepsilon^\lambda\,\alpha^0_\lambda\,\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta) \;+\; \sum_{p=2}^{+\infty}\alpha^0_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)$$

Par conséquent, on a

$$\mathsf{r}^\varepsilon_0 \;=\; \underbrace{\varepsilon^\lambda\,\alpha^0_\lambda\,\Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big]}_{\|\cdot\|_{H^{-1}(\omega_\varepsilon)}=C\,\varepsilon^\lambda} \;+\; \underbrace{\Delta\Big[\sum_{p=2}^{+\infty}\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\alpha^0_{p\lambda}\,\mathsf{s}^{p\lambda}(r,\theta)\Big]}_{\|\cdot\|_{H^{-1}(\omega_\varepsilon)}\leqslant C\,\varepsilon^{2\lambda}}$$

$\Longrightarrow\ \varepsilon^\lambda\ \alpha^0_\lambda\ \Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\ \mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big]$ doit entrer dans la construction de l’ordre 1 qui est en fait un ordre λ.

Calcul de l'ordre λ

On rattrape le terme principal du reste

$$\varepsilon^{\lambda}\, \alpha_{\lambda}^{0}\, \Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\, \mathsf{s}^{\lambda}(\frac{r}{\varepsilon}, \theta)\Big]$$

par un terme en variable rapide

Calcul de l'ordre λ

On rattrape le terme principal du reste

$$\varepsilon^\lambda\,\alpha_\lambda^0\,\Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big]$$

par un terme en variable rapide

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathsf{V}^\lambda \in \mathsf{H}^1_{\mathsf{loc}}(\Omega) \text{ tel que} \\ \Delta \mathsf{V}^\lambda = -\alpha_\lambda^0\,\Delta\Big[\chi(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon})\,\mathsf{s}^\lambda(\frac{r}{\varepsilon},\theta)\Big], \\ \mathsf{V}^\lambda = 0 \quad \text{ sur } \partial\Omega, \\ \mathsf{V}^\lambda(R,\theta) \ = \underset{R\to+\infty}{O}(1). \end{cases}$$

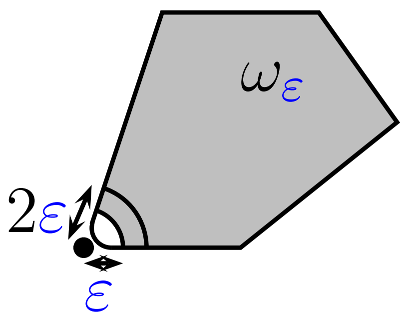
Calcul de l'ordre λ

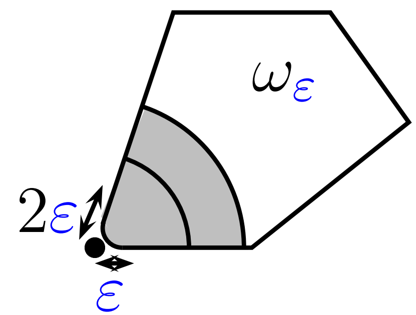
Approximation multiéchelle d'ordre 1

$$\widetilde{\mathsf{v}}_{\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\,\mathsf{v}^{0}(\mathbf{x}) \;+\; \mathsf{V}^{\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon).$$

Pour que cette fonction soit bien définie sur ω_ε on utilise une deuxième fonction de troncature ψ

$$\widetilde{\mathsf{v}}_{\lambda}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\,\mathsf{v}^{0}(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x})\,\mathsf{V}^{\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon).$$





Calcul de l'ordre λ

Approximation multiéchelle d'ordre 1

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\,\mathsf{v}^{0}(\mathbf{x}) \;+\; \mathsf{V}^{\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon).$$

Pour que cette fonction soit bien définie sur ω_ε on utilise une deuxième fonction de troncature ψ

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\,\mathsf{v}^{0}(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x})\,\mathsf{V}^{\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon).$$

On a alors l'estimation

$$\|\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\|_{\mathsf{H}^1(\omega_\varepsilon)} \;\leqslant\; C\,\varepsilon^{2\lambda}. \quad (\text{estimation optimale})$$

Construction à un ordre quelconque

Le développement à l'ordre n (plus exactement $n\lambda$) étant construit

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \left[\varepsilon^{i\lambda}\Big(\chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\;\; \mathsf{v}^{i\lambda}(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x})\, \mathsf{V}^{i\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big)\right].$$

Construction à un ordre quelconque

Le développement à l'ordre n (plus exactement $n\lambda$) étant construit

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \Big[\varepsilon^{i\lambda}\Big(\chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\;\mathsf{v}^{i\lambda}(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x})\,\mathsf{V}^{i\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big)\Big].$$

On calcule alors le résidu

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \Delta\Big[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\Big]$$

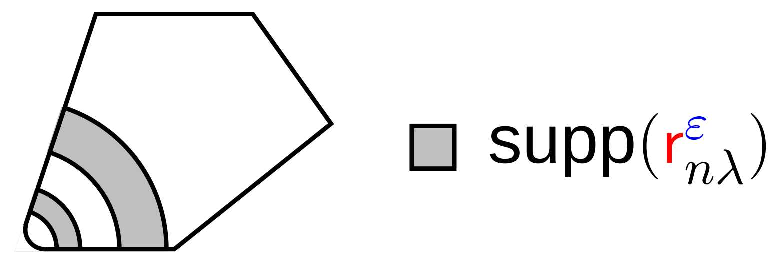
Construction à un ordre quelconque

Le développement à l'ordre n (plus exactement $n\lambda$) étant construit

$$\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x}) \;=\; \sum_{i=0}^{n} \left[\varepsilon^{i\lambda}\Big(\chi(\mathbf{x}/\varepsilon)\;\; \mathsf{v}^{i\lambda}(\mathbf{x}) \;+\; \psi(\mathbf{x})\; \mathsf{V}^{i\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big)\right].$$

On calcule alors le résidu

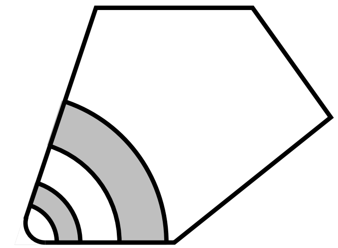
$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \Delta\left[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\right]$$



Construction à un ordre quelconque

On calcule alors le résidu

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \Delta\left[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\right]$$

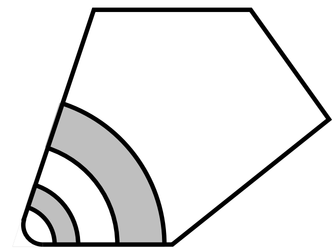


$\square$ $\mathrm{supp}(\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda})$

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \varepsilon^{(n+1)\lambda}\Big(\Delta\Big[\mathsf{w}_{n\lambda}(\mathbf{x})\Big] + \Delta\Big[\mathsf{W}_{n\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big]\Big) \;+\; \mathsf{R}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x}). \quad (1)$$

Construction à un ordre quelconque

On calcule alors le résidu



$\square$ supp$(\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda})$

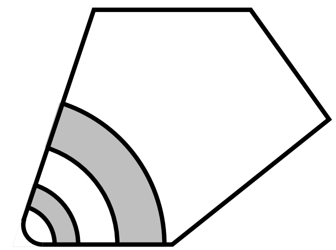
$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \Delta\Big[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\Big]$$

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} \;=\; \underbrace{\varepsilon^{(n+1)\lambda}\Big(\Delta\Big[\mathsf{w}_{n\lambda}(\mathbf{x})\Big] + \Delta\Big[\mathsf{W}_{n\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big]\Big)}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\, \varepsilon^{(n+1)\lambda}} + \underbrace{\mathsf{R}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x})}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\, \varepsilon^{(n+2)\lambda}} \quad .$$

Construction à un ordre quelconque

On calcule alors le résidu

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} = \Delta\left[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\right]$$



$\blacksquare$ supp$(\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda})$

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} = \underbrace{\varepsilon^{(n+1)\lambda}\Big(\Delta\Big[\mathsf{w}_{n\lambda}(\mathbf{x})\Big] + \Delta\Big[\mathsf{W}_{n\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\Big]\Big)}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+1)\lambda}} + \underbrace{\mathsf{R}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x})}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+2)\lambda}}.$$

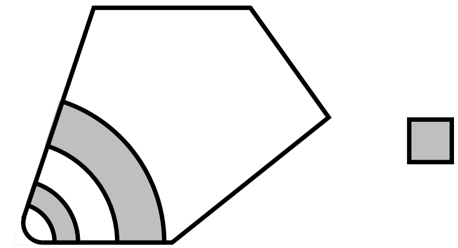
On a l'estimation

$$\|\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\|_{\mathsf{H}^1_0(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+1)\lambda}$$ Estimation optimale!

Construction à un ordre quelconque

On calcule alors le résidu

$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} = \Delta\left[\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\right]$$



$$\mathsf{r}^{\varepsilon}_{n\lambda} = \underbrace{\varepsilon^{(n+1)\lambda}\Big(\Delta\big[\mathsf{w}_{n\lambda}(\mathbf{x})\big] + \Delta\big[\mathsf{W}_{n\lambda}(\mathbf{x}/\varepsilon)\big]\Big)}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+1)\lambda}} + \underbrace{\mathsf{R}^{\varepsilon}_{n\lambda}(\mathbf{x})}_{\|\cdot\|_{\mathsf{H}^{-1}(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+2)\lambda}} .$$

On a l'estimation

$$\|\widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} - \mathsf{u}^{\varepsilon}\|_{\mathsf{H}^1_0(\omega_\varepsilon)} \leqslant C\,\varepsilon^{(n+1)\lambda}$$ Estimation optimale!

On rattrape les termes principaux d'erreur à l'aide d'un champ en variable lente et d'un champ en variable rapide.

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\backslash B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\Big\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \Big\|_{\mathsf{H}^1(\omega\setminus B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Développement multiéchelle.

$$\Big\| \mathsf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} \Big\|_{\mathsf{H}^1(\omega_\varepsilon)} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon \to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Développement multiéchelle.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathsf{v}}^{\varepsilon}_{n\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon \to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} = \underset{\varepsilon \to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Développement multiéchelle.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{v}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} = \underset{\varepsilon \to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Relation entre les deux développements

Raccordement de développements asymptotiques.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\backslash B_{r_0})} = \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Développement multiéchelle.

$$\left\| \mathsf{u}_\varepsilon - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{v}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\backslash B_{r_0})} = \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Par inégalité triangulaire

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{u}^{i\lambda} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\ \mathsf{v}^{i\lambda} \right\|_{\mathsf{H}^1(\omega\backslash B_{r_0})} = \underset{\varepsilon\to 0}{O}\left(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\right).$$

Relation entre les deux développements

Par inégalité triangulaire

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{v}^{i\lambda} \Big\|_{\mathsf{H}^1(\omega \setminus B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon \to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Relation entre les deux développements

Par inégalité triangulaire

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{v}^{i\lambda} \Big\|_{\mathsf{H}^1(\omega\setminus B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Egalité des termes des développements dans $\omega \setminus B_{r_0}$

$$\mathsf{u}^{i\lambda} \;=\; \mathsf{v}^{i\lambda}.$$

Relation entre les deux développements

Par inégalité triangulaire

$$\Big\| \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{u}^{i\lambda} - \sum_{i=0}^{n} \varepsilon^{i\lambda}\, \mathsf{v}^{i\lambda} \Big\|_{\mathsf{H}^1(\omega\setminus B_{r_0})} \;=\; \underset{\varepsilon\to 0}{O}\big(\varepsilon^{(n+1)\lambda}\big).$$

Egalité des termes des développements dans $\omega \setminus B_{r_0}$

$$\mathsf{u}^{i\lambda} \;=\; \mathsf{v}^{i\lambda}.$$

De même, on montre que dans un voisinage du coin

$$\mathsf{U}^{i\lambda} \;=\; \mathsf{V}^{i\lambda}.$$

Conclusion

- Deux méthodes
  - Dev. As. rac. méthode de calcul formel justifiée à postériori
  - Dev. multi. méthode rigoureuse du début à la fin.

Conclusion

- Deux méthodes
  - Dev. As. rac. méthode de calcul formel justifiée à postériori
  - Dev. multi. méthode rigoureuse du début à la fin.
- On aboutit au même développement asymtptotique (à part dans les zones de transition)

Conclusion

- Deux méthodes
  - Dev. As. rac. méthode de calcul formel justifiée à postériori
  - Dev. multi. méthode rigoureuse du début à la fin.
- On aboutit au même développement asymtptotique (à part dans les zones de transition)
- Pas de hiérarchie entre les deux méthodes
  - Dépend de l'utilisateur
  - Dépend du problème
  - Pas une recette miracle