Sobre a complexidade de coloração mista

Julio Araujo, Manoel Campêlo, Phablo Moura

SOBRE A COMPLEXIDADE DE COLORAÇÃO MISTA

Júlio César Araújo*

Universidade Federal do Ceará - UFC

Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação

ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

juliocesar@lia.ufc.br

Manoel Campêlo†

Universidade Federal do Ceará - UFC

Mestrado e Doutorado em Ciência da Computação

ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

mcampelo@lia.ufc.br

Phablo Moura‡

Universidade Federal do Ceará - UFC

Bacharelado em Computação

ParGO - Paralelismo, Grafos e Otimização

phablofsm@lia.ufc.br

Resumo

Grafos mistos são estruturas matemáticas que mesclam características de grafos direcionados e não-direcionados. Formalmente, um grafo misto pode ser definido por uma tripla $G_M = (V, A, E)$, onde V, A e E representam, respectivamente, um conjunto de vértices, de arcos e de arestas. Uma *k-coloração mista* de $G_M = (V, A, E)$ é função $c : V \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$ tal que $c(u) < c(v)$, se $(u, v) \in A$, e $c(u) \neq c(v)$, se $[u, v] \in E$. O problema de Coloração Mista consiste em determinar o *número cromático misto* de G_M, denotado por $\chi_M(G_M)$, que é menor inteiro k tal que G_M admite uma k-coloração mista. Esse problema modela variações de problemas de escalonamento que consideram simultaneamente restrições de precedência e de compartilhamento de recursos. Neste trabalho, mostramos que Coloração Mista é NP-difícil para as classes dos grafos cordais, dos grafos linha de grafos bipartidos e dos grafos linha de grafos periplanares.

Palavras-chave: coloração; grafo misto; complexidade; escalonamento.

*Financiado pela CAPES.

†Parcialmente financiado pelo CNPq.

‡Financiado pelo CNPq.

1 Introdução

O problema de coloração de grafos [1] é certamente um dos mais estudados na área de Teoria de Grafos devido às suas várias aplicações, principalmente em problemas de escalonamento, como, por exemplo, nos problemas de atribuição de freqüências a antenas de rádio ou telefonia, de alocação de produtos químicos em armazéns e de alocação de registros em compiladores.

Dado um grafo $G = (V, E)$, uma coloração é uma função $c : V \longrightarrow \mathbb{Z}$ que associa a cada vértice do grafo um número inteiro representativo de uma cor. Dizemos que uma coloração é própria se, para cada par de vértices adjacentes u e v, i.e., $[u, v] \in E(G)$, temos $c(u) \neq c(v)$. Uma coloração (própria) de um grafo G com k cores é comumente chamada de uma k-coloração de G.

No problema clássico de Coloração de Vértices, busca-se determinar a menor quantidade de cores para a qual o grafo admite uma coloração própria. Essa quantidade é chamada *número cromático*, ou $\chi(G)$.

Determinar o número cromático de um grafo qualquer é um problema NP-Difícil [5], mas em várias classes de grafos a determinação desse parâmetro pode ser feita em tempo polinomial.

Existem diversas variações deste problema. Aqui, estudamos uma generalização do mesmo para grafos mistos, ou seja, grafos que podem ter simultaneamente arestas não-orientadas e orientadas (estas últimas chamadas de arcos). Sendo assim, um grafo misto pode ser definido por uma tripla $G_M = (V, A, E)$, onde V, A e E denotam o conjunto de vértices, arcos e arestas de G_M, respectivamente.

Dado um grafo misto $G_M = (V, A, E)$, uma k-*coloração mista* é uma função $c : V \rightarrow \{0, \ldots, k-1\}$ com as seguintes restrições:

1. $c(v_i) < c(v_j)$, se $(v_i, v_j) \in A$.
2. $c(v_i) \neq c(v_j)$, se $[v_i, v_j] \in E$.

Em outras palavras, uma coloração mista forte é uma coloração própria com uma restrição de ordem sobre as cores das extremidades de cada arco. Em alguns trabahos, esta coloração é chamada de mista forte em contra-ponto à coloração mista fraca, onde se permite uma desiguldade não-estrita $(\leq)$ na condição (1) acima.

No problema de Coloração Mista, dado um grafo misto $G_M = (V, A, E)$, desejamos encontrar o *número cromático misto* de G_M, denotado por $\chi_M(G_M)$, que é o menor inteiro k tal que G_M admite uma k-coloração mista. Observe que o problema é inviável se G_M possui um ciclo orientado. Ao longo de todo o texto, vamos assumir então que tal não ocorre.

Uma das motivações para a definição de Coloração Mista encontra-se no estudo de problemas de escalonamento de tarefas com restrição de precedência e compartilhamento de recursos, em particular o problema de *Job-Shop*.

Uma instância do problema de *Job-Shop* é composta por um conjunto de tarefas $J = \{J_1, J_2, \ldots, J_n\}$, onde cada tarefa J_k, para todo $1 \leq k \leq n$, possui um conjunto de operações que devem ser processadas em uma certa ordem, definindo, assim, relações de precedência. Cada operação deve ser executada em uma máquina do conjunto $M = \{M_1, M_2, \ldots, M_m\}$ e toma uma unidade de tempo para sua execução. Como cada máquina só pode executar uma operação por vez, surgem assim restrições de compartilhamento de recursos. Em *Job-Shop* busca-se determinar a menor quantidade de tempo para se processar todas as tarefas do conjunto J.

Uma instância desse problema pode ser modelada com um grafo misto $G_M = (V, A, E)$, onde V é o conjunto de operações, A descreve as relações de precedência, e uma aresta $[u, v] \in E$ é definida se as operações u e v compartilham uma máquina. Toda coloração mista de G_M descreve um escalonamento viável, onde a cor de um vértice representa o tempo de execução da operação correspondente. O número cromático misto expressa o tempo mínimo necessário para a execução de todas as tarefas.

Neste trabalho, estudamos a complexidade do problema de Coloração Mista em três classes de grafos: cordais, linha de bipartidos e linha de periplanares. Os resultados obtidos são apresentados na Seção 3. Antes, porém, realizamos uma breve revisão bibliográfica sobre o problema. Na Seção 4 comentamos os nossos resultados e suas implicações.

2 Resultados Conhecidos

Nesta seção, revisamos alguns resultados da literatura que avaliam a complexidade do problema de coloração mista e destacamos relações deste com outros problemas em grafos. Chamamos de grafo subjacente a G_M o grafo $G = (V, \bar{A} \cup E)$, onde uma aresta $[u, v] \in \bar{A}$ se, e somente se, o arco $(u, v) \in A$. Em outras palavras, G é o grafo obtido de G_M retirando-se as orientações de seus arcos.

2.1 Alguns resultados sobre complexidade

Coloração Mista generaliza o tradicional problema de Coloração de Vértices, que equivale ao caso onde o conjunto de arcos é vazio. Por outro lado, quando o conjunto de arestas é vazio, Coloração Mista equivale ao problema de encontrar o maior caminho em um grafo direcionado acíclico.

Por generalizar o problema de coloração de vértices, Coloração Mista é claramente um problema NP-Difícil. Outros resultados de complexidade para classes específicas de grafos também são conhecidos, conforme abaixo. Sem perda de entendimento, vamos dizer que G_M pertence a uma certa classe, quando a rigor deveríamos nos referir ao seu grafo subjacente.

A versão de decisão do problema de coloração mista classifica-se como um problema NP-completo, mesmo se o grafo for planar, bipartido, com grau máximo 4 e cada vértice incidente a um arco com grau máximo 2. Isto é demonstrado a partir de uma redução do problema de Coloração por Listas [9].

Por outro lado, para as classes de grafos série-paralelos e árvores, são conhecidos algoritmos com tempo de execução polinomial que determinam uma solução exata. No caso das árvores, o primeiro algoritmo encontrado na literatura [4] tem complexidade $O(n^2)$ enquanto que o algoritmo descrito em [2] tem complexidade linear. Para grafos série-paralelos, é conhecido um algoritmo com complexidade $O(n^{3.376} \log n)$ que fornece uma solução ótima [3]. Adicionalmente, é conhecido que a versão de decisão do problema de coloração mista tem complexidade polinomial se o grafo misto dado como entrada é uma k-árvore parcial, para um k fixo [9].

2.2 Limites para o número cromático misto

Em [4] foram demonstrados dois limites superiores para o número cromático misto, relacionando-o ao número cromático de subgrafos do grafo subjacente. Para apresentarmos tais resultados, considere as definições a seguir.

Dado um subconjunto V' do conjunto de vértices de um grafo $G = (V, E)$, dizemos que o *subgrafo induzido* (em vértices) por $V' \subseteq V$, denotado por $G[V']$, é o subgrafo $G' = (V', E')$ de G tal que se $[u, v] \in E$ e $u, v \in V'$ então $[u, v] \in E'$.

Seja X_M o conjunto dos vértices de $G_M = (V, A, E)$ que são extremidades de algum arco de A. Seja G o grafo subjacente de G_M. Então:

Proposição 2.1 $\chi_M(G_M) \leq \chi(G) + |X_M| - \chi(G[X_M])$

Além disso, defina o grafo misto $G^* = (X_M, A^*, \emptyset)$, onde $A^* = \{(v_i, v_j) \in A : v_i, v_j \in X_M\}$. Então:

Proposição 2.2 $\chi_M(G_M) \leq \chi_M(G^*)(\chi(G) - 1) + 1$

Vale ressaltar que ambos os limites são atingidos por algumas instâncias do problema. Observe que a Proposição 2.1 apresenta um limite que relaciona número cromático misto, número cromático do grafo subjacente e parâmetros que só dependem das orientações de G_M. Por outro lado, é interessante observar que a Proposição 2.2 relaciona também o $\chi_M(G_M)$ com $\chi(G)$, mas, nesse caso, o limite envolve parâmetros que dependem do conjunto de arestas de G_M.

Com relação a limites inferiores, é fácil observar que $\chi_M(G_M)$ é pelo menos o tamanho do maior caminho direcionado em G_M, denotado por $n(G_M)$. Além disso, toda coloração mista de G_M é, por sua vez, uma coloração própria do grafo subjacente de G_M. Logo, o número cromático do grafo subjacente também define um limite inferior para $\chi_M(G_M)$. Outros limites inferiores baseados em estruturas do grafo subjacente (como cliques) podem ser encontrados em [6].

3 Complexidade

3.1 Problemas de decisão

Consideramos a seguinte versão de decisão de Coloração Mista:

Problema 1 ($CM(G_M, k)$ - Coloração Mista)
Entrada: *Um grafo misto $G_M = (V, A, E)$ com $E \neq \emptyset$, e um inteiro $k \geq n(G_M)$.*
Questão: *G_M admite uma k-coloração mista?*

É fácil ver que $CM(G_M, p)$ está na classe NP. Nas subseções seguintes, vamos mostrar que $CM(G_M, p)$ é NP-completo em algumas classes de grafos. Em todos os casos fazemos reduções a partir de problemas de Extensão de Pré-coloração a seguir definidos:

Problema 2 ($PreCol(G, V', k, c')$ - Extensão de Pré-coloração de Vértices)
Entrada: *Um grafo $G = (V, E)$, um subconjunto $V' \subset V$, um inteiro k e uma coloração $c' : V' \to \{0, \ldots, k-1\}$.*
Questão: *Existe uma k-coloração própria c de G que estenda a coloração c' (i.e., $c(v) = c'(v)$ $\forall v \in V'$)?*

Uma k-coloração (própria) em arestas de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $c : E \to \{0, \ldots, k-1\}$ de tal modo que se duas arestas a e b possuem uma extremidade em comum, então $c(a) \neq c(b)$.

Problema 3 ($PreColA(G, E', k, c')$ - Extensão de Pré-coloração de Arestas)
Entrada: *Um grafo $G = (V, E)$, um subconjunto $E' \subset E$, um inteiro k e uma coloração $c' : E' \to \{0, \ldots, k-1\}$.*
Questão: *Existe uma k-coloração própria c das arestas de G que estenda a coloração c' (i.e., $c(e) = c'(e)$, para toda aresta $e \in E'$)?*

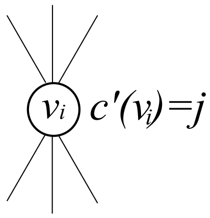
3.2 Grafos cordais

Um grafo G é dito *cordal* se ele não possui buracos como subgrafo induzido. Um *buraco* é um ciclo de tamanho pelo menos 4 sem uma aresta ligando um par de vértices não consecutivos no ciclo.

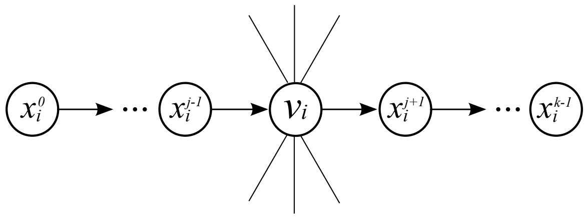
Proposição 3.1 *Seja G_M um grafo misto e $k \geq n(G_M)$. Então, $CM(G_M, k)$ é NP-Completo, mesmo se o grafo subjacente de G_M é um grafo cordal.*

Prova: A redução segue do problema $PreCol(G, V', k, c')$ que é NP-Completo para grafos de intervalos unitários que é uma subclasse dos grafos cordais [8]. Seja $I = (G, V', k, c')$ uma instância para esse problema. Defina a instância (G_M, k) para o problema $CM(G_M, k)$, onde

G_M é o grafo misto obtido a partir de G quando, para cada vértice $v_i \in V'$, adicionamos a G o caminho direcionado $P_i = (x_i^0, \ldots, x_i^{j-1}, v_i, x_i^{j+1}, \ldots, x_i^{k-1})$, onde $j = c'(v_i)$ (ver Figura 1). Em outras palavras, sendo $G = (V, E)$, então $G_M = (V \backslash V' \cup \bigcup\limits_{v_i \in V'} V_i, \bigcup\limits_{v_i \in V'} A_i, E)$, onde V_i e A_i são os conjuntos de vértices e arcos de P_i, respectivamente.



(a) $PreCol(G, V', k, c')$



(b) $CM(G_M, k)$

Figura 1: Redução para grafos cordais

Observe que o grafo subjacente a G_M é cordal, uma vez que G o é e a adição de caminhos não produz buracos. Para completarmos a demonstração, afirmamos que G admite uma extensão de sua pré-coloração c' para uma coloração própria c de $V(G)$ com k cores se, e somente se, G_M admite uma coloração mista com k cores. Para demonstrar tal afirmação, basta apenas observar que em qualquer k-coloração mista de G_M cada vértice $v_i \in V'$ recebe exatamente a cor $c'(v_i)$, uma vez que que o caminho direcionado P_i força tal coloração. $\square$

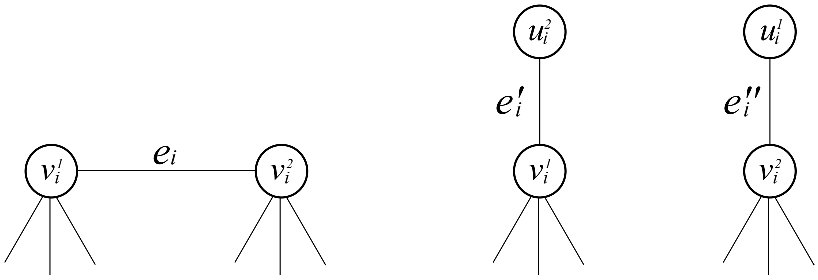
3.3 Grafo linha de bipartido

Dado um grafo não direcionado G, seu *grafo linha*, denotado por $L(G)$, é tal que cada vértice de $L(G)$ representa uma aresta de G e dois vértices de $L(G)$ são adjacentes se, e somente se, suas arestas correspondentes tem uma extremidade em comum.

Note que uma coloração própria das arestas de G corresponde a uma coloração própria dos vértices de $L(G)$. Para mostrarmos que $CM(G_M, k)$ é NP-completo em grafos linha de bipartidos, vamos usar uma transformação definida a seguir.

Seja (G, E', k, c') uma instância do problema $PreColA$. Defina outra instância $(\overline{G}, \overline{E}', k, \overline{c}')$ de tal modo que $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ é o grafo obtido de $G = (V, E)$ da seguinte forma: para cada aresta $e_i = [v_i^1, v_i^2] \in E'$, remova e_i, adicione dois vértices u_i^1, u_i^2 e duas novas arestas $e_i' = [v_i^1, u_i^2]$ e $e_i'' = [u_i^1, v_i^2]$ que são pré-coloridas com a mesma cor $c'(e_i)$. Logo, $\overline{V} = V \cup \bigcup\limits_{i=1}^{|E'|} \{u_i^1, u_i^2\}$, $\overline{E}' = \bigcup\limits_{i=1}^{|E'|} \{e_i', e_i''\}$, $\overline{E} = (E \backslash E') \cup \overline{E}'$ e $\overline{c}'(e_i') = \overline{c}'(e_i'') = c'(e_i)$. A construção dessa outra instância está ilustrada pela Figura 2.

Lema 3.1 *G admite uma extensão da pré-coloração c' para uma coloração com no máximo k cores se, e somente se, $\overline{G}$ admite uma extensão da pré-coloração $\overline{c}'$ para uma coloração com no máximo k cores.*



(a) $PreColA(G, E', k, c')$ (b) $PreColA(\overline{G}, \overline{E}', k, \overline{c}')$

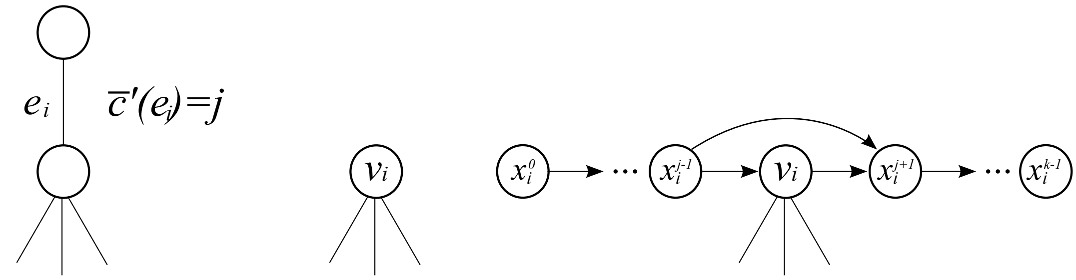
Figura 2: Instâncias equivalentes de $PreColA$

Prova: Basta observar que o conjunto de arestas não coloridas em ambos G e $\overline{G}$ é o mesmo e que, toda aresta $e_i \in E \backslash E'$, i.e. toda aresta não colorida, é adjacente a uma aresta $e_j \in E'$ de G com $c'(e_j) = k$ se, e somente se, existe em $\overline{G}$ uma aresta com cor k adjacente a e_i. $\square$

Proposição 3.2 *Seja G_M um grafo misto e $k \geq n(G_M)$. Então, $CM(G_M, k)$ é NP-Completo, mesmo se o grafo subjacente de G_M é um grafo linha de um grafo bipartido.*

Prova: Fazemos a redução a partir do problema de Extensão de Pré-coloração em arestas que é NP-Completo em grafos bipartidos [7]. Seja (G, E', k, c') uma instância de $PreColA$, sendo $G = (V, E)$ um grafo bipartido, e seja $(\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E}), \overline{E}', k, \overline{c}')$ uma outra instância para o mesmo problema obtida pelo procedimento descrito anteriormente. Pela construção de $\overline{G}$, nenhum ciclo ímpar é criado. Logo, $\overline{G}$ também é bipartido.

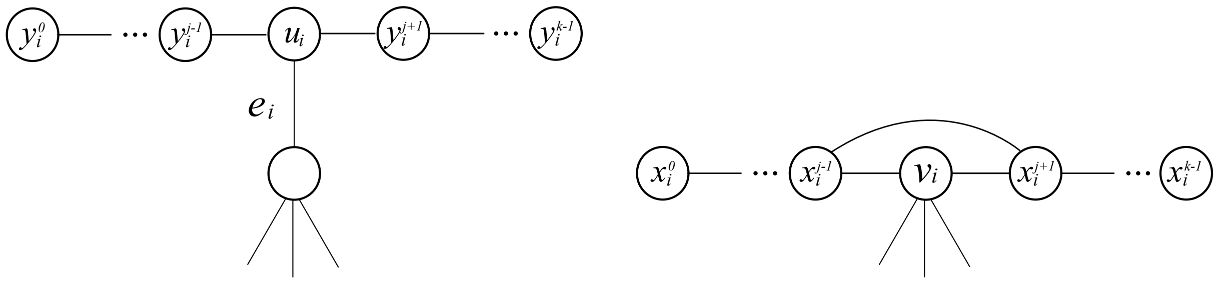
Seja (G_M, k) uma instância para o problema CM, sendo G_M o grafo gerado a partir de $L(\overline{G})$ quando adicionamos, para cada vértice v_i associado a uma aresta e_i pré-colorida em $\overline{G}$, um caminho direcionado $P_i = (x_i^0, \ldots, x_i^{j-1}, v_i, x_i^{j+1}, \ldots, x_i^{k-1})$ e um arco (x_i^{j-1}, x_i^{j+1}), onde $j = \overline{c}'(e_i)$. A Figura 3 ilustra esta redução.



(a) $PreColA(\overline{G}, \overline{E}', k, \overline{c}')$ (b) $L(\overline{G})$ (c) $CM(G_M, k)$

Figura 3: Redução para grafos linha de bipartidos

Vamos mostrar que o grafo subjacente de G_M é linha do grafo bipartido $\overline{G}^*$ obtido a partir de $\overline{G}$ da seguinte maneira. Para cada aresta $e_i \in \overline{E}'$, seja u_i o vértice de grau 1 (isto ocorre devido a construção de $\overline{G}$). Adicione um caminho $T_i = (y_i^0, \ldots, y_i^{j-1}, u_i, y_i^{j+1}, \ldots, y_i^{k-1})$, onde $j = \overline{c}'(e_i)$, conforme Figura 4(a).



(a) $\overline{G}^*$ (b) $L(\overline{G}^*)$

Figura 4: Construção de $\overline{G}^*$ e seu grafo linha

Note que $\overline{G}^*$ é claramente bipartido, pois $\overline{G}$ é bipartido e não adicionamos ciclos. Além disso, $L(\overline{G}^*)$ é exatamente o grafo subjacente de G_M (ver Figura 4(b)).

Observe que $\overline{G}$ admite uma extensão de sua pré-coloração em arestas para uma coloração com k cores se, e somente se, G_M admite uma coloração mista com k cores, uma vez que os caminhos direcionados forçam que cada vértice de G_M que está relacionado a uma aresta pré-colorida de $\overline{G}$ receba a mesma cor desta. Logo, uma k-coloração nos vértices de G_M determina uma k-coloração nos vértices de $L(\overline{G})$ e, portanto, uma k-coloração nas arestas do grafo $\overline{G}$. Pelo lema anterior, temos uma k-coloração para o grafo G. $\square$

3.4 Grafo linha de periplanar

Um grafo é dito *planar* se admite uma representação no plano sem cruzamento de suas arestas. Nessa representação, cada região limitada pelas arestas, incluindo a região ilimitada, é chamada *face*. A *face externa* é exatamente a região ilimitada. Um grafo planar é dito *periplanar* se possui uma representação no plano onde todo vértice pertence à face externa, ou seja, é extremidade de alguma aresta limitando esta face.

Proposição 3.3 *Seja G_M um grafo misto e $k \geq n(G_M)$. Então, $CM(G_M, k)$ é NP-Completo, mesmo se o grafo subjacente de G_M é um grafo linha de um grafo periplanar.*

Prova: A demonstração é análoga àquela da Proposição 3.2. Novamente fazemos a redução a partir do problema de Extensão de Pré-coloração em arestas que é NP-Completo em grafos periplanares [7]. Seja (G, E', k, c') uma instância de $PreColA$, sendo $G = (V, E)$ um grafo periplanar, e seja $(\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E}), \overline{E}', k, \overline{c}')$ uma outra instância para o mesmo problema obtida conforme Subseção 3.3. Pela construção de $\overline{G}$, é fácil observar que $\overline{G}$ ainda é periplanar. De fato, dada uma representação planar de G onde todos os vértices pertencem à face externa, é possível adicionar os vértices de $\overline{V} \backslash V$ a essa representação de tal modo que todos os vértices ainda pertencem à face externa. Para tanto, basta representar no plano os novos caminhos na face externa. Veja que essa representação não adiciona novas faces e todos os vértices continuam pertencendo à face externa.

Seguindo os mesmos passos da demonstração anterior, seja (G_M, k) uma instância para o problema CM, onde G_M o grafo gerado a partir de $L(\overline{G})$ quando adicionamos um caminho direcionado $P_i = (x_i^0, \ldots, x_i^{j-1}, v_i, x_i^{j+1}, \ldots, x_i^{k-1})$ e um arco (x_i^{j-1}, x_i^{j+1}), para cada vértice v_i associado a uma aresta pré-colorida por $\overline{c}'$, digamos com a cor j.

Vamos mostrar que o grafo subjacente de G_M é linha do grafo periplanar $\overline{G}^*$, obtido a partir de $\overline{G}$ da seguinte maneira: para cada aresta $e_i \in \overline{E}'$, se $j = \overline{c}'(e_i)$ e u_i é o vértice de grau 1 de e_i, adicione um caminho $T_i = (y_i^0, \ldots, y_i^{j-1}, u_i, y_i^{j+1}, \ldots, y_i^{k-1})$. Note que $\overline{G}^*$ é claramente periplanar, pelo mesmo argumento apresentado para demonstrar que $\overline{G}$ é periplanar. Por último, veja que $L(\overline{G}^*)$ é exatamente o grafo subjacente de G_M.

Novamente, podemos afirmar que $\overline{G}$ admite uma extensão de sua pré-coloração em arestas para uma coloração com k cores se, e somente se, G_M admite uma coloração mista com k cores, uma vez que os caminhos direcionados forçam que cada vértice de G_M que está relacionado a uma aresta pré-colorida de $\overline{G}$ receba a mesma cor desta. Logo, uma k-coloração nos vértices de G_M determina uma k-coloração nos vértices de $L(\overline{G})$ e, portanto, uma k-coloração nas arestas do grafo $\overline{G}$. Pelo lema anterior, temos uma k-coloração para o grafo G. $\square$

4 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos resultados de complexidade para o problema de Coloração Mista, mostrando que o mesmo é NP-difícil para as classes de grafos cordais, grafos linha de bipartidos e grafos linha de periplanares. Vale lembrar que, como consequência, Coloração Mista também é NP-difícil para todas as classes de grafos que contêm essas classes estudadas, como, por exemplo, grafos livres de C_4ou C_5, grafos livres de garra, grafos-aranha, grafos perfeitos. Estendemos, assim, resultado similar existente na literatura, que mostra a mesma complexidade para a classe dos grafos bipartidos planares. Adicionalmente, identificamos também outras classes de grafos onde o problema clássico de coloração é polinomial, mas passa a ser NP-difícil na versão mista.

Um ponto importante a ser observado encontra-se no fato de que, como acontece em outros trabalhos relacionados, a complexidade é estudada considerando o grafo subjacente. Isto significa que relações entre os conjuntos de arcos e de arestas não são exploradas. A influência desse fator na complexidade do problema é uma questão que merece ser melhor estudada.

Referências

[1] DE BRUIJN, N. G., AND ERDŐS, P. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* (1951).

[2] FURMANCZYK, H., KOSOWSKI, A., AND ZYLINSKI, P. A note on mixed tree coloring. *Information Processing Letters* (2008).

[3] FURMANCZYK, H., KOSOWSKI, A., AND ZYLINSKI, P. Scheduling with precedence constraints: Mixed graph coloring in series-parallel graphs. *Parallel Processing and Applied Mathematics - Lecture Notes in Computer Science* (2008).

[4] HANSEN, P., KUPLINSKY, J., AND DE WERRA, D. Mixed graph colorings. *Math. Methods of Operations Research* (1997).

[5] KARP, R. M. Reducibility among combinatorial problems. *Complexity of Computer Computations Plenum* (1972).

[6] LIMA, I., CAMPÊLO, M., AND CORRÊA, R. C. Limites para a altura mínima de extensões induzidas de posets. In *XXXIX Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional - SBPO* (2007).

[7] MARX, D. NP-completeness of list coloring and precoloring extension on the edges of planar graphs. *Journal of Graph Theory* (2005).

[8] MARX, D. Precoloring extension on unit interval graphs. *Discrete Applied Mathematics* (2006).

[9] RIES, B., AND DE WERRA, D. On two coloring problems in mixed graphs. *European Journal of Combinatorics* (2008).