



**HAL**  
open science

# Modélisation cinématique du contact pour les Systèmes Articulés

François Faure

► **To cite this version:**

François Faure. Modélisation cinématique du contact pour les Systèmes Articulés. journées Française d'Informatique Graphique (AFIG), Nov 1995, Marseille, France. pp.15–22. inria-00537540

**HAL Id: inria-00537540**

**<https://hal.inria.fr/inria-00537540>**

Submitted on 18 Nov 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modélisation Cinématique du Contact pour les Systèmes Articulés

François Faure

Francois.Faure@imag.fr

iMAGIS/GRAVIR-IMAG<sup>1</sup>, BP53 38041 Grenoble cedex 9  
tel +33 76 63 57 94, fax +33 76 44 66 75

**Résumé :** La synthèse d’animations réalistes nécessite un paramétrage rigoureux des systèmes articulés qui permette d’exprimer les champs de vitesses absolues tout en respectant les contraintes géométriques aux liaisons. Les contacts extérieurs sont les liaisons les plus difficiles à traiter. Cet article en propose une modélisation qui permet d’exprimer toutes les vitesses instantanées en coordonnées articulaires, ainsi que de résoudre les problèmes de maintien du contact au cours du temps. Le nouveau modèle proposé permet en outre une mise en oeuvre simple et efficace des équations de la dynamique et a été utilisé avec succès pour le calcul des forces de contact.

**Mots-clés :** cinématique, contacts, coordonnées articulaires, dynamique

## 1 Introduction

L’animation graphique de personnages de synthèse nécessite la génération de mouvements complexes qui font intervenir de nombreux objets et degrés de liberté. Les solutions aux différentes contraintes géométriques et cinématiques à satisfaire sont généralement en nombre infini, et la difficulté consiste à extraire en un temps raisonnable une solution “réaliste”.

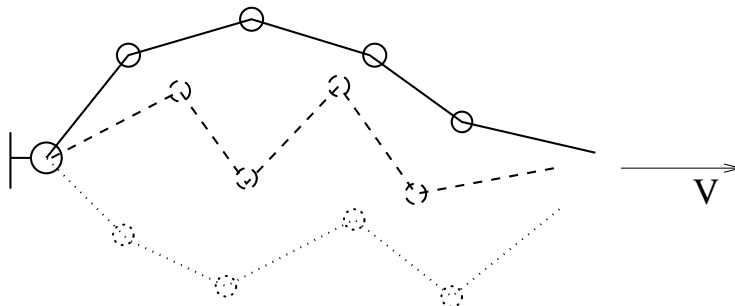


FIG. 1 - *Mouvement à plusieurs degrés de liberté*

Une telle solution est un mouvement qui paraît naturel pour une créature vivante, il est donc certain que la notion d’effort à développer doit jouer un rôle important dans le choix ([AL94]). On ne peut donc évaluer la qualité d’un mouvement qu’en connaissant de façon suffisamment précise les efforts susceptibles de le générer. Une telle démarche est communément appelée “dynamique inverse”. Elle consiste à calculer les efforts nécessaires en appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) pour un mouvement voulu. La relation s’écrit, pour un système  $S$  de masse  $m_S$  et centre de masse  $G_S$ :

$$\sum \vec{F}_{\vec{S} \rightarrow S} = m_S \vec{\gamma}(G_S/R_g)$$
$$\sum \vec{M}(P)_{\vec{S} \rightarrow S} = \vec{\delta}(P, S/R_g)$$

où  $\vec{S}$  représente l’extérieur du système,  $\vec{F}$  les forces,  $\vec{M}$  les moments,  $\vec{\gamma}$  l’accélération,  $P$  un point quelconque,  $\vec{\delta}$  le moment dynamique, et  $R_g$  un repère galiléen.

1. iMAGIS est un projet commun CNRS, INRIA, INPG, UJF.

Cette méthode nécessite un paramétrage des configurations du système qui permette d'exprimer le jacobien des vitesses, ainsi que les différents champs d'accélération, dans un repère galiléen. Elle est appliquée pour commander les moteurs d'articulations de certains robots industriels. En animation de synthèse, elle devrait permettre de générer des mouvements réalistes, mais aussi de résoudre de façon précise et élégante des questions épineuses comme celle du frottement solide ou du contact unilatéral. Or on constate que cette méthode est très difficile à appliquer en pratique. La raison en est que les modèles cinématiques classiques sont insuffisants pour s'appliquer à des scènes courantes de synthèse, qui comportent généralement des contacts extérieurs, qui sont difficiles à représenter par des articulations.

La suite de cet article est organisée de la manière suivante: on commence par présenter les deux types usuels de paramétrage et dégager l'intérêt des coordonnées articulaires pour l'intégration du mouvement et la réduction du nombre de paramètres. Puis on aborde le problème spécifique du contact extérieur, dont le mouvement ne peut être intégré comme une articulation ordinaire. La suite présente une approche bidimensionnelle de la cinématique du contact, et sa généralisation à trois dimensions. Enfin, on présente des applications cinématiques et dynamiques du modèle proposé, ainsi que des perspectives d'extension de ses applications.

## 2 Architecture cinématique

Il faut tout d'abord se donner les moyens de décrire le mouvement des solides dans un repère galiléen, qu'on choisit en général comme repère absolu. On trouve dans la littérature deux manières de décrire la configuration d'un système: les coordonnées absolues et les coordonnées articulaires.

### 2.1 Coordonnées absolues

La position et la vitesse de chaque solide sont définies dans le repère absolu, ce qui est très commode pour exprimer les accélérations galiléennes. Le défaut de cette approche est de ne pas prendre en compte les contraintes géométriques aux liaisons, comme l'illustre la figure 2.

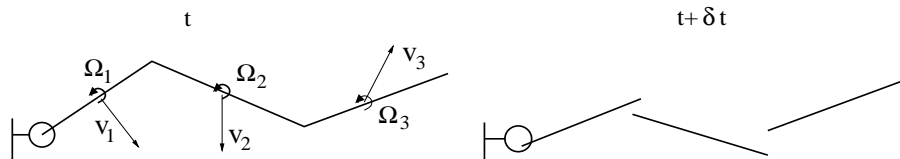


FIG. 2 - *L'intégration des mouvements absolus ne respecte pas les contraintes articulaires*

Les contraintes articulaires doivent donc être prises en compte explicitement, la position de chaque solide étant paramétrée par six valeurs scalaires. Pour  $n$  solides, on obtient une matrice à  $6n$  colonnes, généralement très creuse, avec plusieurs lignes par articulation ( par exemple, cinq pour un pivot ) pour assurer la cohésion du système, plus les lignes correspondant aux différentes requêtes du scénario. De plus, l'intégration des vitesses instantanées génère forcément des décalages à toutes les articulations. En pratique, cette approche demeure efficace pour modéliser des nuages de particules, ou tout système de corps en interaction à distance sans contraintes cinématiques.

### 2.2 Coordonnées articulaires

Le paramétrage relatif consiste à définir les repères propres des solides les uns par rapport aux autres. On utilise pour cela les coordonnées articulaires qui expriment l'écart entre deux repères initialement confondus, chacun appartenant à un solide différent, en mouvement le long d'une droite fixe dans chacun des solides (fig. 3).

Les mouvements plus complexes nécessitent la combinaison de plusieurs de ces mouvements relatifs, la vitesse absolue étant alors une combinaison linéaire des vitesses correspondantes. Un mouvement

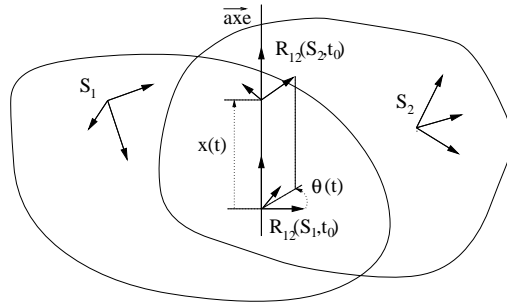


FIG. 3 - *Axe de mouvement relatif de deux solides*

libre dans l'espace peut être paramétré par trois liaisons qui fournissent chacune une rotation et une translation. La prise en compte des contraintes cinématiques aux liaisons est faite implicitement par le positionnement relatif des repères. Les seules contraintes à exprimer restent les fermetures de chaînes et les requêtes du scénario, avec au maximum deux inconnues par liaison. Les coordonnées articulaires sont donc l'outil le plus efficace pour modéliser les chaînes articulées pour deux raisons:

- la plupart des contraintes géométriques aux articulations sont prises en compte implicitement;
- la réduction du nombre de variables accélère les processus de résolution d'équations qui sont généralement de complexité cubique.

### 3 Le problème du contact extérieur

Nous désirons dans une scène complexe représenter aussi bien des objets en mouvement libre, par exemple la chute d'un corps, que des mouvements fortement contraints comme celui du squelette d'un personnage, mais aussi des surfaces qui roulent et glissent les unes sur les autres. Le modèle articulaire est donc indispensable, mais il s'avère insuffisant comme l'illustre la figure 4.

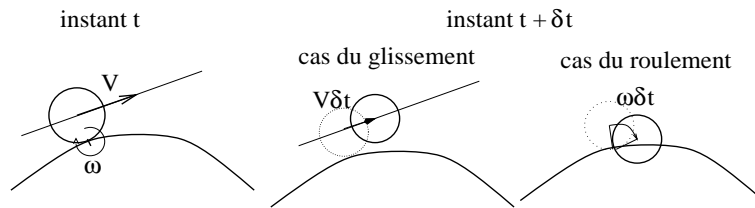


FIG. 4 - *Le problème de l'intégration des vitesses*

Le problème des coordonnées articulaires est que les axes sont considérés fixes dans les repères, alors que dans le cas du roulement relatif de deux solides, ou du glissement de deux surfaces non planes, les axes varient au cours du temps: deux solides dans cette configuration ne constituent pas un mécanisme. Il est important de réaliser que nous ne sommes pas là en présence d'une simple erreur d'intégration numérique mais d'une grosse lacune du modèle.

#### 3.1 Cinématique du contact

On pourrait générer la cinématique du contact extérieur par combinaison de mécanismes virtuels comme sur la figure 5. Le roulement sans glissement s'obtient par un engrenage, le glissement pur est une translation qu'on peut générer par un parallélogramme déformable.

La mise en place de mécanismes virtuels a l'inconvénient de rajouter au système des inconnues et des équations de fermetures cinématiques de chaînes (équations de vitesse). Cela a pour effet d'alourdir le temps de calcul de la scène. De plus, ces mécanismes sont définis par rapport aux centres de

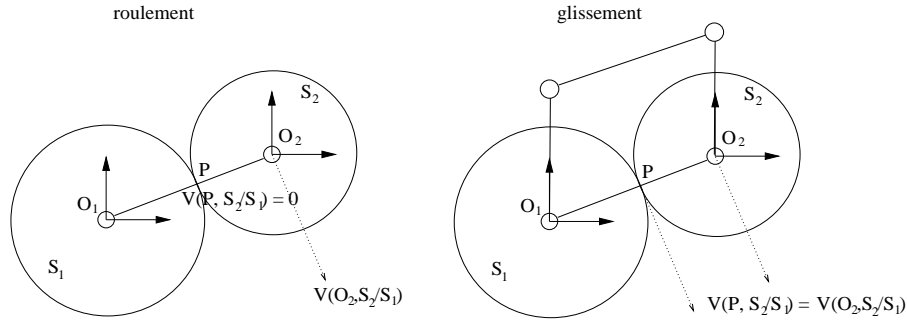


FIG. 5 - Mécanismes virtuels et contraintes nécessaires pour simuler le roulement et le glissement

courbures des surfaces, qui ne sont pas constants dans le cas général de surfaces quelconques. D'où des frais de remise à jour de la structure qui doit à tout instant vérifier la fermeture géométrique (équations de position). Notons enfin qu'il est dommage de rajouter les inconnues et équations correspondantes alors que les comportements de ces mécanismes sont connus et ne devraient pas avoir à être résolus à chaque instant. C'est pourquoi on se propose d'introduire un nouveau type d'articulation qui rassemble toute la connaissance de la cinématique du contact nécessaire pour gérer la géométrie du système, sans rajouter de traitements inutiles.

## 4 Nouveaux outils pour la cinématique du contact

### 4.1 Cas de deux disques dans un plan

La position du disque 1 de courbure  $C_1$  par rapport au disque 2 de courbure  $C_2$  peut être paramétrée par les angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  avec un repère intermédiaire  $(L_{21}, \vec{L}_t, \vec{L}_n)$  où  $\vec{L}_t$  et  $\vec{L}_n$  sont les vecteurs tangent et normal (figure 6). L'évolution de ces angles en fonction de la vitesse de roulement relatif  $\vec{\Omega}_{21} = \omega \cdot \vec{k}$  et de la vitesse de glissement tangentiel  $\vec{V}_{21} = V \cdot \vec{L}_t$  par:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{d\theta_1}{dt} = \frac{C_1 \cdot \omega}{C_1 + C_2} - \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot V}{C_1 + C_2} \quad \dot{\theta}_2 = \frac{d\theta_2}{dt} = \frac{-C_2 \cdot \omega}{C_1 + C_2} - \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot V}{C_1 + C_2} \quad (1)$$

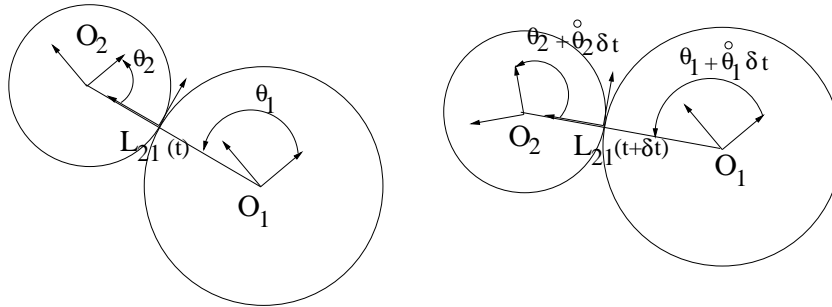


FIG. 6 - Utilisation d'un repère intermédiaire.

L'idée est d'utiliser ce repère intermédiaire centré au point de contact pour définir la position d'un solide par rapport à l'autre. Ce repère est purement géométrique car il n'est lié à aucun point matériel des solides. Les équations de vitesses instantanées se posent de la manière habituelle, mais l'intégration du mouvement porte sur la position du repère intermédiaire dans chacun des solides en contact, et assure ainsi que les contraintes géométriques associées au contact (non-pénétration, non-décollement) restent satisfaites au cours du temps.

## 4.2 Cas général en deux dimensions

Dans le cas de deux contours quelconques, on peut utiliser l'approximation circulaire locale. Le repère intermédiaire de liaison  $(L_{21}, \vec{L}_t, \vec{L}_n)$  et la matrice de passage  $P_{21}$  de  $R_2$  à  $R_1$  sont définis par:

$$\begin{aligned} (L_{21}, \vec{L}_t, \vec{L}_n) &= P_1 R_1 = P_2 R_2 \\ P_{21} &= P_1 \cdot P_2^{-1} \end{aligned} \quad (2)$$

A chaque instant, on détermine les points  $cc_1$  et  $cc_2$ , qui sont les centres de courbure locale des contours et qui vont servir à mettre à jour les matrices de passages  $P_1$  et  $P_2$ :

$$\begin{aligned} P_1(t + \delta t) &= \text{Rotation}(cc_1, \dot{\theta}_1 \delta t) \cdot P_1(t) \\ P_2(t + \delta t) &= \text{Rotation}(cc_2, \dot{\theta}_2 \delta t) \cdot P_2(t) \end{aligned}$$

Si la surface de  $S_1$  est plane, sa courbure est nulle et la transformation est une translation:

$$P_1(t + \delta t) = \text{Translation}(\vec{L}_t, \dot{x}_1 \delta t) \cdot P_1(t) \quad \text{avec} \quad \dot{x} = V - \frac{\omega}{C_2},$$

tandis que la transformation  $P_2$  garde la même expression. Si les deux surfaces sont planes, la rotation relative est nulle et les transformations sont de simples translations.

## 4.3 Cas général en trois dimensions

### 4.3.1 Modélisation géométrique

En trois dimensions, les surfaces en contact ont deux courbures principales et on utilise l'approximation torique. En effet, une surface possédant deux courbures différentes et considérées constantes peut être vue comme le voisinage du cercle extérieur d'un tore. Cette configuration est représentée sur la figure 7.

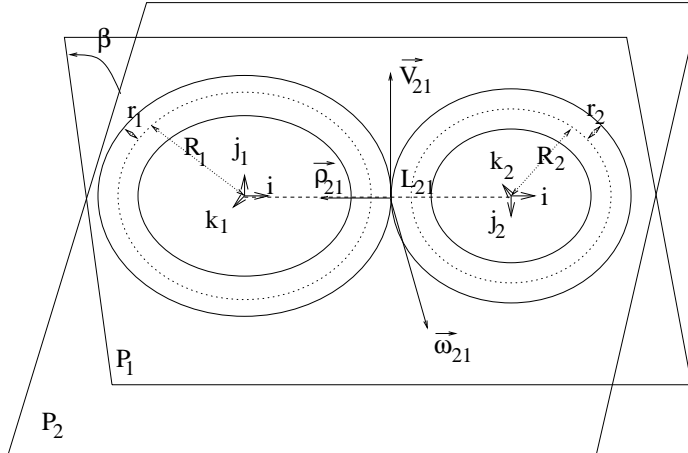


FIG. 7 - Géométrie du contact

Les tores 1 et 2, en contact au point L appartenant à leurs cercles extérieurs, ont respectivement pour plans principaux  $P_1$  et  $P_2$  de normales  $\vec{k}_1$  et  $\vec{k}_2$ , qui sont inclinés d'un angle  $\beta$  l'un par rapport à l'autre. Leurs repères ont en commun le vecteur  $\vec{i}$ . Les vecteurs glissement  $\vec{V}_{21}$  et roulement  $\vec{\omega}_{21}$  appartiennent au plan tangent commun  $(L, \vec{i})$ , et le vecteur pivotement  $\vec{\rho}_{21}$  est normal à celui-ci. Les deux tores sont respectivement caractérisés par leurs courbures principale et secondaire  $C_i, c_i$  dont les axes correspondants sont  $\vec{j}_i$  et  $\vec{k}_i$ .

### 4.3.2 Calcul des nouvelles matrices de passage

En trois dimensions, l'évolution du repère intermédiaire est la combinaison des transformations dans les plans de courbure principale et secondaire. Pour chaque tore, on est ramené à étudier

le cas bidimensionnel dans chaque plan de courbure, la transformation tridimensionnelle étant le produit des deux.

A la différence du cas bidimensionnel, les plans de courbures des deux solides ne sont pas confondus, et on aura à considérer les projections des vecteurs glissement et roulement dans chacun d'eux. Les courbures de chaque surface dans les plans de courbure de l'autre se calculent aisément ([LFA75]). Les formules suivantes donnent les courbures du tore 2 dans les plans de courbure principale et secondaire du tore 1:

$$\begin{aligned}c_2(\vec{j}_1) &= C_2 \cos^2 \beta + c_2 \sin^2 \beta \\c_2(\vec{k}_1) &= C_2 \sin^2 \beta + c_2 \cos^2 \beta\end{aligned}$$

On obtient les formules réciproques en permutant simplement les indices. Il faut de plus tenir compte du pivotement relatif, qui s'effectue selon la normale commune aux surfaces en contact, et qui s'intègre comme une liaison pivot classique. On peut arbitrairement choisir d'appliquer cette dernière transformation sur l'une ou l'autre des matrices de passage, ou de la répartir sur les deux. Le changement de repère intermédiaire dans chacun des solides en contact est donc finalement le produit de deux ou trois transformations intermédiaires, qui sont des rotations ou des translations suivant des axes orthogonaux.

Les matrices de passage analogues à celles de l'équation (2) sont définies ci-dessous, ainsi que les valeurs des vitesses et des courbure à prendre en compte pour les transformations intermédiaires. Les transformations dans les différents plans de courbure se ramènent ainsi à des cas bidimensionnels. Les matrices  $P_n$ ,  $P_p$  et  $P_s$  représentent respectivement le pivotement, le mouvement dans le plan de courbure principale et secondaire:

$$\begin{aligned}P_1 &= P_{s1} \cdot P_{p1} \\P_{p1} &: \vec{V}_{21} \cdot \vec{k}_1, \omega_{21} \cdot \vec{j}_1, C_1, c_2(\vec{j}_1) \\P_{s1} &: \vec{V}_{21} \cdot \vec{j}_1, \omega_{21} \cdot \vec{k}_1, c_1, c_j(\vec{k}_1) \\P_2 &= P_{s2} \cdot P_{p2} \cdot P_{n2} \\P_{p2} &: \vec{V}_{21} \cdot \vec{k}_2, \omega_{21} \cdot \vec{j}_2, C_2, c_1(\vec{j}_2) \\P_{s2} &: \vec{V}_{21} \cdot \vec{j}_2, \omega_{21} \cdot \vec{k}_2, c_2, c_1(\vec{k}_2) \\P_{n2} &: \vec{\rho}\end{aligned}$$

Le fait d'effectuer d'abord le pivotement, puis le mouvement dans le plan principal et enfin dans le plan secondaire de courbure permet d'utiliser directement les axes de courbure pour axes des différentes transformations.

#### 4.4 Application

Les surfaces élémentaires couramment utilisées en modélisation géométrique ont des propriétés de régularité intéressantes. On peut ainsi définir des cas spéciaux pour les contacts entre surfaces de type plan, cylindre, cône, sphère et autres géométries régulières qui permettent des calculs rapides et exacts. Ces "contacts typés" doivent contenir des données exprimant les positions des axes de courbure par rapport aux surfaces.

De plus, les articulations classiques de la mécanique ( pivot, rotule, glissière... ), plus simples, sont aisément représentables sous ce formalisme, ce qui permet d'appliquer un modèle cinématique global et cohérent à l'ensemble d'une scène solide. Une implémentation orientée-objet permet par sous-typage le traitement optimal de chaque cas particulier de liaison.

Si les surfaces ne sont pas de révolution dans la direction de leur axe de roulement commun, il en découlera une erreur d'intégration proportionnelle à la variation de courbure. Notons que cela représente un ordre de grandeur inférieur par rapport aux autres méthodes précédemment décrites,

qui induisent des erreurs proportionnelles à la courbure. De plus, le fait d’avoir répertorié la liaison en tant que contact extérieur permet de détecter facilement le problème et d’utiliser des procédures de rétablissement des conditions géométriques. A l’instant suivant, on déterminera les nouveaux centres de courbure locale.

## 5 Résultats et perspectives

### 5.1 Cinématique

Ces articulations complexes ont permis de modéliser en coordonnées articulaires des contacts extérieurs entre surfaces courbes. L’exemple d’une sphère roulant sur un plan est représenté sur la figure 8, avec les repères propres et le repère intermédiaire de contact.

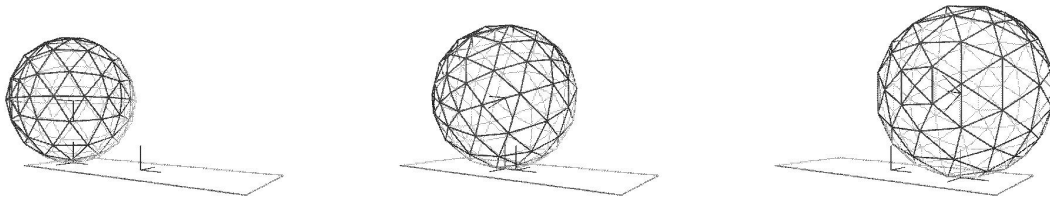


FIG. 8 - *Exemple de roulement sans glissement*

Le repère local isolant explicitement les directions normale et tangentes, on peut aisément introduire des contraintes exprimées dans ce repère afin d’autoriser ou interdire à volonté glissement, roulement et pivotement.

Une application particulièrement utile pourrait être le contact entre pied et sol. Le pied serait modélisé par une sphère pour le talon, et deux sphères à l’avant qui lui permettraient de rouler lorsque le talon décolle.

### 5.2 Dynamique des contacts

Le fait de disposer d’un repère situé au point de contact et orienté suivant la normale à celui-ci permet d’exprimer aisément les directions des efforts normaux et tangentiels. En prenant en compte des mobilités selon les axes du repère de liaison, on peut facilement poser les équations du Principe des Puissances Virtuelles ([P95]). En effet, les égalités entre puissances, qui sont des produits entre vitesses et action dynamiques aisément exprimables dans les repères intermédiaires de liaisons, se ramènent alors à des produits tensoriels simples.

Ce modèle cinématique a ainsi permis d’implémenter de façon simple le principe des puissances virtuelles, puis de créer un nouvel algorithme rapide et efficace de calcul des forces de contact entre solides[Fau96], compatible avec le contrôle du mouvement.

### 5.3 Directions futures de recherche

Le modèle de contact présenté utilise la notion de courbure, ce qui suppose que les surfaces en contact sont lisses. La modélisation d’arêtes peut se faire par des cylindres de rayon quasi-nul. Toutefois, pour des surfaces suffisamment facettisées, on aura probablement intérêt à définir un modèle semi-local autour de chaque zone de contact qui prenne en compte les orientations voisines.



## 6 Conclusion

Les nouvelles articulations de contact présentées permettent de rassembler dans une structure cohérente et efficace tous les mouvements solides, quelles que soient les contraintes cinématiques. Cette formulation possède l'efficacité des coordonnées articulaires pour poser les équations cinématiques et dynamiques instantanées concernant l'ensemble des solides d'une scène, quelles que soient leurs liaisons avec l'extérieur.

Elle permet d'intégrer les mouvements de contact dans les meilleures conditions sans surcroît inutile de complexité. L'erreur d'intégration est proportionnelle à la variation de courbure, et donc nulle pour beaucoup de primitives géométriques simples.

Le repère intermédiaire de liaison permet d'isoler explicitement les actions normales et tangentielles, on peut ainsi traiter facilement les questions de frottement solide et de maintien du contact par les méthodes dynamiques appropriées.

## Références

- [AL94] G. André and Ch. Lecerf. Simulation robotique: Principes généraux et algorithmique pour l'animation. In *Troisième séminaire du groupe de travail "Animation et Simulation"*, Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Lille, Octobre 1994.
- [Fau96] François Faure. An energy-based method for contact force computation. In *Computer Graphics Forum (Proceedings of EUROGRAPHICS'96)*, August 1996. to appear.
- [LFA75] Jacqueline Lelong-Ferrand and Jean-Marie Arnaudiès. *Cours de Mathématiques (tome 3): Géométrie et Cinématique*. Dunod Université, Paris, 1975.
- [P95] José-Philippe Pérez. *Mécanique: points matériels, solides, fluides*. Masson, 1995.