Processus à régularité locale prescrite

Antoine Ayache, Jacques Lévy Véhel

23) Probabilités
8) Analyse mathématique

Processus à régularité locale prescrite

Antoine Ayache
Université Paul Sabatier
Lab. de Statistique et de Probabilités
118, Route de Narbonne
31062 Toulouse
Tél : 05.61.55.84.22
Fax : 05.61.55.60.89
E-mail : ayache@cict.fr

Jacques Lévy Véhel
IRCcyN
UMR 6597
B.P. 92101
44321 Nantes Cedex 03
Tél : 02.40.37.69.40
Fax : 02.40.37.69.95
E-mail : jlv@bora.inria.fr

Résumé

La fonction de Hölder associée à une fonction permet de mesurer les variations locales de son irrégularité. Dans [4], il est montré que H est la fonction de Hölder d'une fonction continue f si et seulement si H s'écrit comme une limite inférieure de fonctions continues. Une construction possible de f repose sur une généralisation de la célèbre fonction de Weierstrass. Dans cette note nous transposons ce résultat au cadre stochastique.

Processes with prescribed local regularity

Abstract

The local variations of the irregularity of a function can be measured by the associated Hölder function. It is shown in [4] that H is the Hölder function of a continuous function f if and only if H may be written as a lower limit of continuous functions. One possible construction of f consists in generalizing the well-known Weierstrass function. In this note this result is extended to the stochastic context.

Abridged english version

Let $X = \{X(t)\}_{t\in[0,1]}$ be a continuous and nowhere differentiable stochastic process. The Hölder process of X is defined for all t as :

$$\alpha_X(t) = \sup_{\alpha} \left\{ \limsup_{h\to 0} \frac{|X(t+h)-X(t)|}{|h|^{\alpha}} = 0 \right\}.$$

This process allows to measure the local variations of the irregularity of X. It is shown in [4] in the deterministic context, that a function H is the Hölder function of a continuous function f if and only if H is of the form $H(t) = \liminf H_l(t)$, for all t, where the H_l are continuous functions (In fact, it is not restrictive to suppose that the H_l are Hölder functions whose Hölder constants increase slowly when l goes to infinity i.e $c_l = O(l)$). The aim of this note is to construct a continuous random process W extending the well-known Weierstrass function and whose Hölder process may be, with probability 1, any lower limit of continuous functions with values in a compact of $]0,1[$. More precisely, let $\mathbf{L} = (l_p)_{p\in \mathbb{N}}$ be the sequence defined as $l_1 = 1$ and for all $p \geq 2$, $l_p = [\frac{1-a'}{1-b'} l_{p-1}] + 1$ where a, b, a', b' are fixed reals satisfying $1 > b' > b > a > a' > 0$. Let $(H_l)_{l\in\mathbf{L}}$ denote a sequence of (β, c_l)-Hölder functions with values in $[a,b]$ and such that $c_l = O(l)$ (we say that f is a (β,c)-Hölder function if for all t_1, t_2 we have $|f(t_1) - f(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|^{\beta}$). At last, let $(\epsilon_l)_{l\in\mathbf{L}}$ denote a sequence of real random variables such that $\sum_{p=1}^{\infty} P(|\epsilon_{l_p}| \notin [l_p^{-2}, l_p]) < +\infty$. This last condition is satisfied when, for instance, the ϵ_l are square integrable, have the same distribution and a bounded probability density. It follows from the Borel-Cantelli Lemma that there exists an event Ω^*, with probability 1, such that for all $\omega \in \Omega^*$ there exists p_0 satisfying for all $p \geq p_0$,

$$l_p^{-2} \leq |\epsilon_{l_p}(\omega)| \leq l_p.$$

Set $\lambda = 4k$, where $k \in \mathbb{N}^*$. We will show that the random, lacunary Fourier series, $\{W(t)\}_{t\in[0,1]}$ defined for all $t \in [0,1]$ and $\omega \in \Omega^*$ as $W(t,\omega) = \sum_{l\in\mathbf{L}} \lambda^{-lH_l(t)} \sin(\lambda^l t)\epsilon_l(\omega)$ and $W(t,\omega) = 0$ else, satisfies almost surely, for all t, $\alpha_W(t) = \liminf H_l(t)$. Thus, this construction allows to build stochastic processes with an arbitrary singularities spectrum. These processes are not obtained via a multiplicative cascade and yet they can be multifractal.

1 Introduction

Pour simplifier, nous supposons que tous les processus dont il est question dans cette note sont indexés par $[0,1]$ et à valeurs réelles. L'extension de nos résultats à des processus à valeurs réelles indexés par un pavé compact de $\mathbb{R}^d$, ne posent pas de problèmes essentiels. Par ailleurs, nous nous intéressons à des processus dont les trajectoires sont presque sûrement des fonctions continues et nulle-part dérivables. Soit X un processus de ce type, le processus de Hölder associé à X, est défini pour tout t par $\alpha_X(t) = \sup_{\alpha} \left\{ \limsup_{h\to 0} \frac{|X(t+h)-X(t)|}{|h|^{\alpha}} = 0 \right\}$. Il permet de mesurer les variations locales de l'irrégularité de X. Dans [4], il a été montré qu'une fonction H est la fonction de Hölder d'une fonction f déterministe et continue si et seulement si H s'écrit comme une limite inférieure de fonctions continues i.e pour tout t, $H(t) = \liminf H_l(t)$ où les H_l sont continues (on peut supposer, sans perte de généralité, que les H_l sont des fonctions Hölderiennes avec des constantes de Hölder croissant lentement i.e en $O(l)$, voir [4]). Une construction possible repose sur une généralisation de la célèbre fonction de Weierstrass. L'objectif de cette note est de transposer ce résultat au cadre stochastique. Plus précisément, nous construisons un processus aléatoire continu, généralisant la fonction de Weierstrass et dont le processus de Hölder peut être, avec probabilité 1, n'importe quelle limite inférieure de fonctions continues, à valeurs dans un compact de $]0,1[$.

2 Construction de W

Dans toute cette partie a, b, a', b' sont des réels tels que $1 > b' > b > a > a' > 0$ et $\mathbb{L} = (l_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est la suite d'entiers défini par $l_1 = 1$ et pour tout $p \geq 1$ par $l_p = [\frac{1-a'}{1-b'} l_{p-1}] + 1$. $(H_l)_{l\in\mathbf{L}}$ désigne une suite de fonctions (β, c_l)-Hölderiennes à valeurs dans $[a, b]$ et telles que $c_l = O(l)$ (on dit qu'une fonction f est (β, c)-Hölderienne si pour tout t_1, t_2 on a $|f(t_1) - f(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|^\beta$). $\{\varepsilon_l\}_{l\in\mathbf{L}}$ désigne une suite de variables aléatoires réelles telles que $\sum_{p=1}^{\infty} P(|\epsilon_{l_p}| \notin [l_p^{-2}, l_p]) < +\infty$.

Cette dernière condition est par exemple vérifiée lorsque les ε_l sont identiquement distribuées, admettent un deuxième moment et une densité bornée. Ainsi d'après le Lemme de Borel-Cantelli, il existe un événement Ω^*, de probabilité 1, tel que : pour tout $\omega \in \Omega^*$, il existe p_0, vérifiant pour tout $p \geq p_0$

$$l_p^{-2} \leq |\varepsilon_{l_p}(\omega)| \leq l_p. \tag{1}$$

Ces inégalités joueront un rôle essentiel dans tout ce qui va suivre. Tous les processus considérées ci-dessous seront supposés nuls en tout $\omega \notin \Omega^*$. Notre objectif sera d'établir le Théorème suivant.

Théorème 1 *Soit λ un entier naturel non nul divisible par 4 et soit $\{W(t)\}_{t\in[0,1]}$, la série de Fourier aléatoire lacunaire, définie lorsque $\omega \in \Omega^*$ par*

$$W(t, \omega) = \sum_{l\in\mathbf{L}} \lambda^{-lH_l(t)} \sin(\lambda^l t)\varepsilon_l(\omega), \tag{2}$$

alors pour tout $\omega \in \Omega^*$ et tout $t \in [0, 1]$, on a $\alpha_W(t, \omega) = \liminf_{p\to\infty} H_{l_p}(t)$.

Fixons un réel $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, $t \in [0, 1]$ et $\omega \in \Omega^*$. Il existe $p_1 \geq p_0$ tel que pour tout $p \geq p_1$, $H_{l_p}(t) \geq H(t) - \epsilon$. Posons pour tout $s \in [0, 1]$, $W_{p_1}(s, \omega) = \sum_{p=1}^{p_1} \lambda^{-H_{l_p}(s) l_p} \sin(\lambda^{l_p} s)\varepsilon_{l_p}(\omega)$ et $\tilde{W}(s, \omega) = W(s, \omega) - W_{p_1}(s, \omega)$. Il résulte du Théorème des accroissements finis qu'il existe $C_1 > 0$ une constante telle que pour tout s', $s'' \in [0, 1]$, on a

$$|W_{p_1}(s', \omega) - W_{p_1}(s'', \omega)| \leq C_1|s' - s''|^\beta. \tag{3}$$

Etape 1 *Montrons qu'il existe une constante $C_2 > 0$, telle que pour $|h| \leq 1$.*

$$|\widetilde{W}(t + h, \omega) - \widetilde{W}(t, \omega)| \leq C_2|h|^{H(t)-2\varepsilon}. \tag{4}$$

En utilisant (1) et le fait que $\sup_{n\in\mathbb{N}} n\lambda^{-n\varepsilon} < +\infty$, on a

$$\begin{aligned}
|\widetilde{W}(t + h, \omega) - \widetilde{W}(t, \omega)| &\leq \sum_{l\in\mathbf{L}} |\lambda^{-lH_l(t+h)} - \lambda^{-lH_l(t)}| l \\
&+ \sum_{l\in\mathbf{L}} \lambda^{-l(H(t)-\varepsilon)} |\sin(\lambda^l(t + h)) - \sin(\lambda^l t)| l \\
&\leq C_3(\log\lambda). \left(\sum_{n=0}^{+\infty} n^3\lambda^{-na}\right) |h|^\beta \\
&+ C_4 \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n(H(t)-2\varepsilon)} |\sin(\lambda^n(t + h)) - \sin(\lambda^n t)|.
\end{aligned}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$, l'entier tel que : $\lambda^{-(m+1)} \leq |h| < \lambda^{-m}$. On a

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n(H(t)-2\varepsilon)} |\sin(\lambda^n(t+h)) - \sin(\lambda^n t)| \\
\leq\ & \left(\sum_{n=0}^{m} \lambda^{(1-H(t)+2\varepsilon)n}\right) |h| + 2 \sum_{n=m+1}^{+\infty} \lambda^{-n(H(t)-2\varepsilon)} \\
\leq\ & \frac{\lambda^{(m+1)(1-H(t)+2\varepsilon)}}{\lambda^{(1-H(t)+2\varepsilon)} - 1} |h| + \frac{2\lambda^{-(m+1)(H(t)-2\varepsilon)}}{1-\lambda^{-(H(t)-2\varepsilon)}} \\
\leq\ & C_5 |h|^{H(t)-2\varepsilon}.
\end{aligned}$$

Etape 2 *Soient* $\widetilde{\mathbb{L}} = \{l_p \in \mathbb{L}\,; p > p_1\}$ *et* $\widetilde{\Gamma}_\varepsilon = \{l \in \widetilde{\mathbb{L}}\,; H(t) - \varepsilon \leq H_l(t) \leq H(t) + \varepsilon\}$. *Montrons qu'il existe une constante* $C_6 > 0$ *et une suite* $(h_N)_{N \in \widetilde{\Gamma}_{\frac{\varepsilon}{4}}}$ *qui tend vers 0 telles que : pour tout* $N \in \widetilde{\Gamma}_{\frac{\varepsilon}{4}}$, $|\widetilde{W}(t+h_N,\omega) - \widetilde{W}(t,\omega)| \geq C_6 |h_N|^{H(t)+\frac{\varepsilon}{3}}$.

Pour tout $N \in \widetilde{\Gamma}_{\frac{\varepsilon}{4}}$ posons $h_N = (-1)^{\delta(N)} \frac{\pi}{2} \lambda^{-N}$ où $\delta(N) \in \{0,1\}$ est tel que

$$|\sin(\lambda^N(t+h_N)) - \sin(\lambda^N t)| \geq 1. \tag{5}$$

On a, en utilisant (1) et le fait que $h_N = (-1)^{\delta(N)} \frac{\pi}{2} \lambda^{-N}$,

$$\begin{aligned}
&|\widetilde{W}(t+h_N,\omega) - \widetilde{W}(t,\omega) - \lambda^{-NH_N(t)}(\sin(\lambda^N(t+h_N)) - \sin(\lambda^N t))\varepsilon_N(\omega)| \\
\leq\ & A(h_N) + A'(h_N) + A''(h_N)
\end{aligned}$$

où

$$A(h) = \sum_{l \in \widetilde{\mathbf{L}} \setminus \widetilde{\Gamma}_\varepsilon} \lambda^{-lH_l(t)} |\sin(\lambda^l(t+h)) - \sin(\lambda^l t)| l$$

$$A'(h) = \sum_{\substack{l \in \widetilde{\Gamma}_\varepsilon \\ l < N}} \lambda^{-lH_l(t)} |\sin(\lambda^l(t+h)) - \sin(\lambda^l t)| l$$

et

$$A''(h) = \sum_{l \in \mathbf{L}} |\lambda^{-lH_l(t+h)} - \lambda^{-lH_l(t)}| l.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
A(h) &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n(H(t)+\varepsilon)} n |\sin(\lambda^n(t+h)) - \sin(\lambda^n t)| \\
&\leq C_7 \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^{-n(H(t)+\frac{\varepsilon}{2})} |\sin(\lambda^n(t+h)) - \sin(\lambda^n t)|,
\end{aligned}$$

puisque $\sup_{n\in\mathbb{N}} \lambda^{-\frac{n\varepsilon}{2}} n < +\infty$. Ensuite en raisonnant comme dans l'étape 1, on peut montrer que

$$A(h) \leq C_8 |h|^{H(t)+\frac{\varepsilon}{2}}. \tag{6}$$

Soit $\mathcal{L}_N = \sup\{l \in \widetilde{\Gamma}_\varepsilon \,; l < N\}$. On a

$$A'(h) \leq C_8 \sum_{n=0}^{\mathcal{L}_N} \lambda^{-n(H(t)-\frac{3}{2}\varepsilon)} |\sin(\lambda^n(t+h)) - \sin(\lambda^n t)| \leq C_8 \frac{\lambda^{(1-H(t)+\frac{3}{2}\varepsilon)(\mathcal{L}_N+1)}}{\lambda^{(1-H(t)+\frac{3}{2}\varepsilon)} - 1} |h|. \tag{7}$$

Nous supposerons que $\frac{3}{2}\varepsilon < \min(a-a', b'-b)$. On a donc
$1 - a' > 1 - (H(t) - \frac{3}{2}\varepsilon) > 1 - (H(t) + \frac{3}{2}\varepsilon) > 1 - b'$.
Par suite, $(1-(H(t)+\frac{3}{2}\varepsilon))N \geq (1-(H(t)-\frac{3}{2}\varepsilon))\mathcal{L}_N$, et (7) entraîne alors

$$A'(h_N) \leq C_9' \lambda^{N(1-(H(t)+\frac{3}{2}\varepsilon))} |h_N| \leq C_9 |h_N|^{H(t)+\frac{3}{2}\varepsilon}. \tag{8}$$

En raisonnant comme dans l'étape 1, on peut montrer que

$$|A''(h)| \leq C_{10} |h|. \tag{9}$$

Finalement il résulte de (1), (5), (6), (8) et (9) que, pour tout $N \in \widetilde{\Gamma}_{\frac{\varepsilon}{4}}$, assez grand

$$\begin{aligned}
|\widetilde{W}(t+h_N,\omega) - \widetilde{W}(t,\omega)| &\geq N^{-2}\lambda^{-N(H(t)+\frac{\varepsilon}{4})} |\sin(\lambda^N(t+h_N)) - \sin(\lambda^N t)| \\
&\quad -A(h_N) - A'(h_N) - A''(h_N) \\
&\geq C_{11}|h_N|^{(H(t)+\frac{\varepsilon}{3})} - C_8|h_N|^{H(t)+\frac{\varepsilon}{3}} - C_9|h_N|^{H(t)+\frac{3}{2}\varepsilon} - C_{10}|h_N| \\
&> C_{12}|h_N|^{(H(t)+\frac{\varepsilon}{3})}.
\end{aligned}$$

3 Conclusion

Nos remarques concernent l'analyse multifractale (voir par exemple [3]). En effet, dans le cas où H est très irrégulière, ce qui est possible avec la construction ci-dessus, on préfère souvent décrire la régularité de W de façon globale, à travers son spectre de singularité. Rappelons que ce spectre est la fonction f qui à tout α associe $f(\alpha) = \dim_H E_\alpha$, où $\dim_H$ désigne la dimension de Hausdorff et $E_\alpha = \{t : H(t) = \alpha\}$. Pour une fonction de Weierstrass standard ou un mouvement Brownien fractionnaire, le spectre est réduit à un point et ces fonctions sont parfois qualifiées de "monofractales". L'exemple paradigmatique de fonction multifractale est la fonction de répartition d'une mesure binômiale: on se fixe un réel m_0 dans $[0,1/2]$ et on définit la suite de mesures (μ_n) par $\mu_n(I_n^k) = m_0^{n\varphi_0(k,n)} m_1^{n\varphi_1(k,n)}$, où $m_1 = 1 - m_0$, $I_n^k = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$, $\varphi_0(k,n)$ est la proportion de 0 dans le développement en base 2 d'un réel de I_n^k jusqu'à l'ordre n, et $\varphi_1(k,n) = 1 - \varphi_0(k,n)$ (i.e. $\varphi_0(k,n) = \frac{\sum_{i=1}^n (1-t_i)}{n}$, pour $t = \sum_{i=1}^\infty t_i 2^{-i}, t_1 = 0$ ou 1 et $t \in I_n^k$). $(\mu_n)_n$ converge faiblement vers une mesure μ appelée mesure binômiale. μ et sa fonction de répartition ont un spectre multifractal en forme de $\cap$, et la fonction de Hölder associée est partout discontinue. Elle est donnée par $H(t) = -\varphi_0(t)\log_2 m_0 - \varphi_1(t)\log_2 m_1$, où $\varphi_0(t) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n}(1-t_i)}{n}$ et $\varphi_1(t) = 1 - \varphi_0(t)$. On peut généraliser cette construction en rendant les "poids" m_0 et m_1 aléatoires, de façon à obtenir un processus stochastique multifractal, c'est-à-dire dont le spectre n'est pas réduit à un point. On parle alors de cascade aléatoire, et ce type de processus est presque systématiquement invoqué quand il s'agit de modéliser des phénomènes stochastiques multifractals.

De ce point de vue, l'avantage de la construction présentée dans cette note est qu'elle permet d'obtenir, de façon élémentaire, un processus dont le spectre multifractal est le plus général possible, puisque le processus de Hölder de W est de la forme la plus générale. Ainsi, pour obtenir un spectre du même type que celui d'une mesure binômiale, c'est-à-dire en $\cap$, il suffit de prendre une suite de fonctions continues, dont la limite inférieure est de la forme $H(t) = -\varphi_0(t)\log_2 m_0 - \varphi_1(t)\log_2 m_1$. Mais des spectres très différents sont aussi possibles. Notons que l'obtention d'un spectre prescrit est crucialement liée au fait que notre construction garantit que, presque surement, pour tout t, l'exposant de Hölder est bien $H(t)$, et pas seulement le résultat moins fort que, quel que soit t, presque surement l'exposant de Hölder est $H(t)$. En particulier, les ensembles E_α sont, dans notre cas, "déterministes", alors qu'ils sont aléatoires pour la mesure binômiale stochastique. On pourrait rendre les E_α pour W aléatoires en choisissant un H aléatoire. D'ailleurs, la détermination du spectre presque sûr des cascades aléatoires est beaucoup plus difficile que pour W [2].

En résumé, notre construction fournit un procédé simple pour obtenir un processus aléatoire dont le processus de Hölder peut être prescrit dans le cadre le plus général, ce qui autorise en principe l'obtention de n'importe quel spectre multifractal presque sûr. Cette construction n'est pas à base de cascade, et elle pourrait donc permettre de modéliser des phénomènes multifractals dans lesquels aucun mécanisme de cascade ne semble à l'œuvre (comme par exemple certains trafics sur Internet).

Remeciements
Les auteurs tiennent à remercier vivement Julien Barral et Jacques Peyrière pour leurs importants commentaires sur les versions précédentes de cette note.

Références

[1] Ayache A., Lévy Véhel L., The generalized multifractional brownian motion. SISP, (2000) 1-2, 7-18.

[2] Barral J., Continuity of the multifractal spectrum of a random statistically self-similar measure. J. Theo. Prob., (2000) 13-4 1027-1060.

[3] Brown G., Michon G., Peyrière J., On the multifractal analysis of measures. J. Stat. Phys., (1992) 66, 3-4, 775-790.

[4] Daoudi K., Lévy Véhel J., Meyer Y., Construction of continuous functions with prescribed local regularity. In Const. Approx. 014, 03, (1998) 349-385.