Routage et Ordonnancement Robustes dans les Réseaux Radio Maillés

Christelle Caillouet, Arie Koster

Routage et Ordonnancement Robustes dans les Réseaux Radio Maillés

Christelle Caillouet [†]and Arie M. C. A. Koster

Lehrstuhl II für Mathematik, RWTH Aachen, Allemagne

Dans cet article, nous étudions le problème joint du routage et de l'ordonnancement dans les réseaux radio maillés où la demande des utilisateurs est incertaine. Nous présentons un modèle d'optimisation robuste basé sur le *prix de la robustesse* qui permet d'ajuster le niveau de conservatisme de la solution robuste.

Keywords: optimisation robuste, programmation linéaire, réseaux radio maillés

1 Introduction

Les réseaux radio maillés ont fait l'objet de nombreuses études ces dernières années, car ils sont une solution intéressante afin de fournir un accès Internet à des utilisateurs évoluant en environnement urbain ou militaire [AWW05]. Ces réseaux sont composés de routeurs sans fil interconnectés entre eux par des liens radio, qui vont transmettre le traffic des utilisateurs mobiles qui leur sont raccordés jusqu'à des points d'accès fournissant directement les services (e.g. Internet).

Le problème joint du routage et de l'ordonnancement permet d'optimiser les performances des réseaux radio maillés en calculant conjointement les routes pour la demande entre les routeurs et les points d'accès du réseau, et l'ordonnancement des communications radio afin d'éviter les collisions et limiter les interférences. Ce problème a été très largement étudié, voir par exemple [BELZ08, MPR08, LRG10]. Dans le cas des réseaux fonctionnant en régime permanent, une relaxation de ce problème a été introduite. En effet, la périodicité du réseau permet de s'affranchir de l'ordonnancement, algorithmiquement coûteux, et de ne calculer qu'une pondération des appels, appelée *Round Weighting Problem (RWP)* [KMP08].

Dans tous ces travaux, la demande des utilisateurs est supposée connue et fixe. Ceci est une limite évidente à l'efficacité des modèles qu'il est nécessaire de dépasser. Pour cela, l'optimisation robuste, de plus en plus étudiée ces dernières années, est une technique qui permet de prendre en compte l'incertitude dans des modèles d'optimisation [BTN02].

Dans cet article, nous introduisons une nouvelle formulation du RWP qui prend en compte l'incertitude sur les demandes des utilisateurs. Ce problème d'optimisation robuste considère un paramètre Γ introduit par Bertsimas et Sim [BS04], qui correspond au degré de robustesse, i.e. au niveau de conservatisme de la solution robuste. En d'autres termes, Γ représente un entier non-négatif correspondant au nombre de routeurs du réseau qui peuvent atteindre simultanément leur pic en terme de demande. Cela permet une meilleure flexibilité que les modèles de robustesse traditionnels et très conservatifs comme par exemple le *hose model* [DGG$^+$02]. En effet, il est raisonnable de supposer que dans des modèles de trafic réalistes, il est rare d'atteindre simultanément le pic de demande pour tous les routeurs. Nous considérons donc le cas où le nombre de nœuds pouvant atteidre leur pic est restreint à la valeur Γ. Faire varier la valeur de Γ permet alors d'étudier le *prix de la robustesse* dans le réseau ou en d'autres termes le prix à payer pour obtenir une solution réalisable pour le schéma robuste.

[†]Financée par une bourse Post-doctorale de la Fondation allemande Alexander von Humboldt.

2 Définition du problème

Nous modélisons le réseau radio maillé par un graphe de transmission $G = (V,E)$ où $V = V_r \cup V_g$ constitue l'union disjointe des routeurs et des points d'accès du réseau, et E est l'ensemble des transmissions possibles entre tout couple de sommets de V. Le volume de trafic en chaque routeur $v \in V_r$ varie, avec pour moyenne $\overline{d}_v > 0$ et déviation $\widehat{d}_v > 0$. Ainsi, la véritable demande se situe dans l'intervalle $\left[\min\{0, \overline{d}_v - \widehat{d}_v\}, \overline{d}_v + \widehat{d}_v\right]$, pour tout $v \in V_r$. Etant donné le paramètre $\Gamma \in \{0,1,\ldots,|V_r|\}$, le problème Γ-robuste consiste à calculer les routes entre les routeurs et les points d'accès, ainsi que la durée d'activation des rounds permettant le routage, dans le cas où au plus Γ routeurs dévient de leur demande moyenne simultanément.

2.1 Problème déterministe

Si $\Gamma = 0$, nous nous intéressons au RWP classique pour les valeurs moyennes des demandes. Etant donnés l'ensemble des chemins $\mathcal{P} = \cup_{v \in V_r} \mathcal{P}_v$ entre V_r et V_g, et l'ensemble des rounds $\mathcal{R}$ dans le graphe (obtenus à partir d'un modèle d'interférences donné), nous cherchons à calculer un routage des demandes moyennes des routeurs jusqu'aux points d'accès (3), tout en allouant une proportion de temps à chaque round, et par conséquent à chaque lien du graphe. Le flot pouvant s'écouler sur chaque lien est alors limité par sa durée d'activation au cours de la période (2). L'objectif est ainsi de minimiser la période du réseau, à savoir la somme des durées d'activation des rounds (1).

$$\min \sum_{R \in \mathcal{R}} w_R \tag{1}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P},\, P \ni e} \overline{d}_{O(P)} f_P \leqslant c_e \cdot \sum_{R \in \mathcal{R},\, R \ni e} w_R,\ \forall e \in E \tag{2}$$

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_v} f_P \geqslant 1,\ \forall v \in V_r \tag{3}$$

$$f, w \geqslant 0,\ \forall P \in \mathcal{P}, R \in \mathcal{R} \tag{4}$$

où f_P est la quantité de flot envoyée sur le chemin $P \in \mathcal{P}$, et w_R est la durée d'activation du round $R \in \mathcal{R}$.

Ce problème, avec les demandes fixées, a été étudié et résolu par génération de colonnes dans [MPR08].

2.2 Problème Γ-robuste

Si $\Gamma > 0$, nous devons alors satisfaire les contraintes de capacité des liens dans le cas où au plus Γ routeurs dévient de leur demande moyenne. Pour chaque routeur v qui dévie, le pic de demande $\overline{d}_v + \widehat{d}_v$ constitue le pire cas. La contrainte 2 du problème déterministe devient alors :

$$\sum_{P \in \mathcal{P},\, P \ni e} \overline{d}_{O(P)} f_P + \max_{Q \subseteq V_r,\, |Q| \leqslant \Gamma} \{\sum_{v \in Q} \sum_{P \in \mathcal{P}_v,\, P \ni e} \widehat{d}_v f_P\} \leqslant c_e \cdot \sum_{R \in \mathcal{R},\, R \ni e} w_R,\ \forall e \in E \tag{5}$$

Ou de manière équivalente :

$$\sum_{v \in V_r \setminus Q} \sum_{P \in \mathcal{P}_v,\, P \ni e} \overline{d}_v f_P + \sum_{v \in Q} \sum_{P \in \mathcal{P}_v,\, P \ni e} (\overline{d}_v + \widehat{d}_v) f_P \leqslant c_e \cdot \sum_{R \in \mathcal{R},\, R \ni e} w_R,\ \forall e \in E,\ Q \subseteq V_r, |Q| \leqslant \Gamma \tag{6}$$

où $Q \subseteq V_r$ représente le sous-ensemble de routeurs qui dévient de leur demande moyenne.

Ces inégalités sont soit non-linéaires (5), soit en nombre exponentiel (6). Il est donc difficile de résoudre le problème Γ-robuste en utilisant directement ces inégalités. Nous allons linéariser l'ensemble de contraintes 5 en utilisant la dualité de la manière suivante.

Proposition 1 *Etant données les valeurs du flot f sur les chemins, les solutions des problèmes suivants sont équivalentes :*

$$\begin{array}{lclcl}
\max\limits_{Q \subseteq V_r,\, |Q| \leqslant \Gamma} \{\sum\limits_{v \in Q} \sum\limits_{\substack{P \in \mathcal{P}_v \\ P \ni e}} \widehat{d}_v f_P\} & = & \max \sum\limits_{v \in V_r} \sum\limits_{P \in \mathcal{P}_v,} \widehat{d}_v f_P z_v^e & = & \min \sum\limits_{v \in V_r} p_v^e + \Gamma \pi^e \\
 & & \sum\limits_{v \in V_r} z_v^e \leqslant \Gamma & & p_v^e + \pi^e \geqslant \sum\limits_{\substack{P \in \mathcal{P}_v \\ P \ni e}} \widehat{d}_v f_P,\ \forall v \in V_r \\
 & & 0 \leqslant z_v^e \leqslant 1,\ \forall v \in V_r & & p_v^e, \pi^e \geqslant 0,\ \forall v \in V_r
\end{array}$$

Preuve : Premièrement, la solution optimale du programme linéaire de maximization de $\sum_{v\in V_r}\sum_{P\in\mathcal{P}_v,}\widehat{d}_v f_P z_v^e$ consiste à obtenir Γ variables z à 1. Ceci est donc clairement équivalent au fait de sélectionner le sous-ensemble $Q\subseteq V_r,\ |Q|=\Gamma$ qui maximise $\sum_{v\in Q}\ \sum_{P\in\mathcal{P}_v P\ni e}\widehat{d}_v f_P$.

Puis par dualité forte, puisque le programme linéaire maximisant $\sum_{v\in V_r}\sum_{P\in\mathcal{P}_v,}\widehat{d}_v f_P z_v^e$ est réalisable et borné pour tout vecteur f et $\Gamma\in\{0,1,\ldots,|V_r|\}$, alors son problème dual est également réalisable et borné et la valeur de leurs solutions optimales coïncident. Le programme dual correspond alors au problème de minimisation de $\sum_{v\in V_r} p_v^e+\Gamma\,\pi^e$, où π^e est la variable duale associée à la contrainte $\sum_{v\in V_r} z_v^e\leqslant\Gamma$, et p_v^e est la variable duale associée à la borne supérieure $z_v^e\leqslant 1$.

Etant donné ces résultats, la valeur de $\max_{Q\subseteq V_r,\ |Q|\leqslant\Gamma}\{\sum_{v\in Q}\ \sum_{P\in\mathcal{P}_v P\ni e}\widehat{d}_v f_P\}$ est donc égale à celles des 2 programmes linéaires présentés ci-dessus. □

Nous pouvons ainsi reformuler notre problème Γ-robuste (1-3-5) de manière à obtenir un programme linéaire, en utilisant la proposition 1.

$$\min\sum_{R\in\mathcal{R}} w_R \tag{7}$$

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_v} f_P \geqslant 1,\ \forall v\in V_r \tag{8}$$

$$\sum_{P\in\mathcal{P},\ P\ni e}\overline{d}_{O(P)}f_P+\sum_{v\in V_r}p_v^e+\Gamma\,\pi^e \leqslant c_e\cdot\sum_{R\in\mathcal{R},\ e\ni R} w_R,\ \forall e\in E \tag{9}$$

$$\sum_{P\in\mathcal{P}_v,\ P\ni e}\widehat{d}_v f_P-p_v^e-\pi^e \leqslant 0,\ \forall e\in E,\ v\in V_r \tag{10}$$

$$f,w,p,\pi \geqslant 0,\ \forall P\in\mathcal{P},R\in\mathcal{R},e\in E,r\in V_r \tag{11}$$

3 Résolution

Comme pour le modèle déterministe, nous utilisons la génération de colonnes afin d'éviter la complète énumération des ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ de cardinalité exponentielle en la taille du réseau. Pour cela, nous utilisons des programmes auxiliaires qui vont générer des chemins ou des rounds qui violent les contraintes associées dans la formulation duale du programme (7-10). Ces contraintes sont les suivantes :

$$\sum_{e\in P}(\overline{d}_{O(P)}y_e+\widehat{d}_{O(P)}k^e_{O(P)}) \geqslant x_{O(P)},\ \forall P\in\mathcal{P} \tag{12}$$

$$1 \geqslant c_e\cdot\sum_{e\in R} y_e,\ \forall R\in\mathcal{R} \tag{13}$$

Plus précisémment, la résolution du programme linéaire (7-11) s'effectue de la manière suivante :

(a) Résoudre (7-11) avec un sous-ensemble de chemins et rounds permettant une solution réalisable.

(b) A l'aide des valeurs duales obtenues, regarder s'il existe des chemins et rounds dans le réseau qui violent leur contrainte duale associée. Si oui, les ajouter à l'ensemble des variables et retourner en (a).

(c) Lorsqu'aucun chemin ou round ne viole les contraintes duales, nous obtenons la solution optimale.

Plus de détails concernant la méthode dans le cas du RWP déterministe sont présentés dans [MPR08].

4 Résultats

Le programme Γ-robuste (7-10) a été résolu en utilisant le logiciel IBM CPLEX version 12. Nous présentons ici des résultats obtenus pour des réseaux en grille, dans lesquels nous avons placé soit 1 point d'accès au centre de la grille, soit 4 points d'accès aux coins. Les capacités des liens sont fixées à 1 de manière à ce que l'activation du lien durant 1 unité de temps implique une limitation d'1 unité de flot sur ce lien. Les demandes incertaines sont modélisées par une demande moyenne égale à 1 pour chacun des routeurs $r\in V_r$, et à une déviation choisie aléatoirement dans $[\,0,1\,[$.

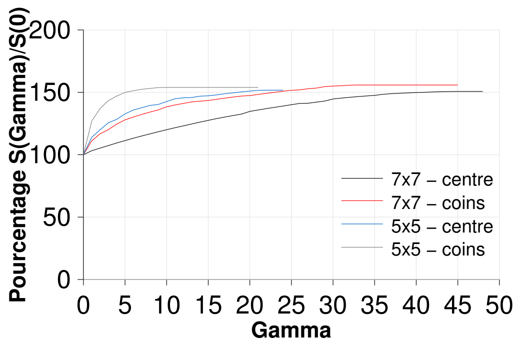

FIGURE 1: Prix de la robustesse et charge maximum des liens pour des réseaux en grille.

La figure 1 montre le *prix de la robustesse*, i.e. le coût additionnel à payer pour obtenir un niveau Γ de robustesse de la solution. Pour chaque réseau le coût de la solution optimale pour $\Gamma = 0, 1, \ldots, |V_r|$ est normalisée par le coût de la solution déterministe ($\Gamma = 0$) avec les demandes moyennes.

Après une augmentation importante pour des petites valeurs de Γ, le rapport entre la solution Γ-robuste et la solution déterministe reste pratiquement constant. En effet l'activation des liens est assez importante pour pouvoir router à la fois les plus fortes demandes des routeurs qui atteignent leur pic, mais également les plus faibles. En d'autres termes, les demandes plus faibles peuvent être routées sur les chemins déjà utilisés sans pour autant augmenter la durée d'activation des liens et donc de la période du réseau.

5 Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous proposons une formulation linéaire pour l'optimisation robuste du problème du routage et de l'ordonnancement dans les réseaux radio maillés. Nous utilisons le concept de Γ-robustesse qui permet de spécifier dans le modèle le niveau de robustesse souhaité. Cette méthode a été validée sur des réseaux en grille pour lesquels nous étudions le *prix de la robustesse* induit par la considération du niveau Γ. En complément de cette étude, nous souhaiterions maintenant considérer des matrices de trafic provenant de cas réels. Nous souhaiterions ainsi quantifier la robustesse effective de la méthode, c'est-à-dire la valeur minimum de Γ nécessaire afin que la solution soit réalisable pour toutes les matrices de trafic traitées.

Références

[AWW05] I.F. Akyildiz, X. Wang, and W. Wang. Wireless mesh networks : a survey. *Computer Networks*, 47(4) :445–487, 2005.

[BELZ08] L. Badia, A. Erta, L. Lenzini, and M. Zorzi. A general interference-aware framework for joint routing and link scheduling in wireless mesh networks. *IEEE Network*, 22(1) :32 –38, 2008.

[BS04] D. Bertsimas and M. Sim. The price of robustness. *Operations Research*, 52(1) :35–53, 2004.

[BTN02] A. Ben-Tal and A. Nemirovski. Robust optimization - methodology and application. *Mathematical Programming*, 92 :453–480, 2002.

[DGG+02] N. G. Duffield, P. Goyal, A. Greenberg, P. Mishra, K. K. Ramakrishnan, and J. E. van der Merwe. Resource management with hoses : point-to-cloud services for virtual private networks. *IEEE/ACM Transaction in Networking*, 10 :679–692, October 2002.

[KMP08] R. Klasing, N. Morales, and S. Pérennes. On the complexity of bandwidth allocation in radio networks. *Theoretical Computer Science*, 406(3) :225–239, October 2008.

[LRG10] J. Luo, C. Rosenberg, and A. Girard. Engineering wireless mesh networks : Joint scheduling, routing, power control and rate adaptation. *IEEE/ACM Trans. in Netw.*, 8(5) :1387–1400, 2010.

[MPR08] C. Molle, F. Peix, and H. Rivano. An optimization framework for the joint routing and scheduling in wireless mesh networks. In *IEEE PIMRC*, September 2008.