

Estimation algébrique des paramètres intrinsèques d'un signal sinusoïdal biaisé en environnement bruité

Rosane Ushirobira, Wilfrid Perruquetti, Mamadou Mboup, Michel Fliess

► **To cite this version:**

Rosane Ushirobira, Wilfrid Perruquetti, Mamadou Mboup, Michel Fliess. Estimation algébrique des paramètres intrinsèques d'un signal sinusoïdal biaisé en environnement bruité. Grets, Sep 2011, Bordeaux, France. 2011. <inria-00601655>

HAL Id: inria-00601655

<https://hal.inria.fr/inria-00601655>

Submitted on 21 Jun 2011

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation algébrique des paramètres intrinsèques d'un signal sinusoïdal biaisé en environnement bruité

Rosane USHIROBIRA¹, Wilfrid PERRUQUETTI², Mamadou MBOUP³, Michel FLIESS⁴

¹Non-A INRIA-Lille Nord Europe & IMB (UMR CNRS 5584) - Université de Bourgogne

²Non-A INRIA-Lille Nord Europe & École Centrale de Lille, LAGIS (CNRS)

³Non-A INRIA-Lille Nord Europe & CReSTIC - Université de Reims Champagne Ardenne

⁴LIX (UMR CNRS 7161), École polytechnique, 91128 Palaiseau, France

Rosane.Ushirobira@inria.fr, Wilfrid.Perruquetti@inria.fr, Mamadou.Mboup@univ-reims.fr,
Michel.Fliess@polytechnique.edu

Résumé – L'amplitude, la fréquence et la phase d'un signal sinusoïdal, biaisé et bruité, sont estimées par des techniques algébriques. Les méthodes d'aujourd'hui ne semblent pas capables de fournir ces paramètres de façon robuste en une fraction de période du signal. Plusieurs simulations numériques confirment l'intérêt de notre approche.

Abstract – The amplitude, frequency and phase of a biased and noisy sinusoidal signal are estimated via algebraic techniques. The methods which are popular today seem unable to obtain a robust estimation of those parameters within a fraction of the signal's period. The efficiency of our approach is illustrated by several computer simulations.

1 Introduction

1.1 Généralités

Une question importante pour l'ingénieur et bien connue en traitement du signal est l'estimation du triplet (amplitude α , phase ϕ , fréquence $\omega > 0$) d'un signal sinusoïdal

$$x = \alpha \sin(\omega t + \phi)$$

à partir de la mesure biaisée et bruitée suivante

$$y = x + \beta + \varpi, \quad (1)$$

où β est un biais constant, inconnu, et ϖ un bruit¹. De nombreuses méthodes ont été développées, comme la régression linéaire ou non, les méthodes de sous-espaces (haute résolution) [11, 22, 13], le filtre de Kalman étendu [2], les filtres à encoches [21], ou, encore, d'autres techniques issues de la commande adaptative non linéaire [12, 19]. Cependant, l'estimation de ces paramètres en une fraction de période du signal de façon robuste, en présence de bruit et d'un biais constant inconnu, n'est pas encore complètement résolue. Cette communication puise sa source dans l'analyse algébrique de [9, 8, 10, 6, 16]. En plus des simulations numériques qu'on y trouve déjà, renvoyons à [20, 23, 24, 25] pour quelques applications plus concrètes, fort encourageantes.

¹On reprend ici le point de vue de [5, 6], indépendant de toute modélisation probabiliste. Un bruit est, alors, une *oscillation rapide* (voir [5] pour plus de détails).

1.2 Formulation du problème

$x + \beta$ satisfait l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega^2(x - \beta) = 0. \quad (2)$$

qui, dans le domaine opérationnel, devient

$$s(s^2 + \omega^2)X(s) - s^2x(0) - s\dot{x}(0) - \beta\omega^2 = 0, \quad (3)$$

Parmi les paramètres inconnus, on cherche, grâce à (1), à estimer, $\Theta_{\text{est}} = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$, mais pas le biais $\Theta_{\overline{\text{est}}} = \{\theta_4\}$:

$$\theta_1 = \omega^2, \theta_2 = -\alpha \sin(\phi) = -x(0) + \beta, \\ \theta_3 = -\alpha\omega \cos(\phi) = -\dot{x}(0), \theta_4 = -\beta$$

On établit, d'abord, un système d'équations en les inconnues Θ_{est} , et indépendant de $\Theta_{\overline{\text{est}}}$, en utilisant (3). Avec les corps $\mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}} := \mathbb{R}(\Theta_{\text{est}})$ et $\mathbb{R}_{\Theta_{\overline{\text{est}}}} := \mathbb{R}(\Theta_{\overline{\text{est}}})$, il vient:

$$\mathcal{R}(s, X(s), \Theta_{\text{est}}, \Theta_{\overline{\text{est}}}) := P \cdot X(s) + Q + \overline{Q} = 0 \quad (4)$$

$$\text{avec } P = s(s^2 + \theta_1), Q = s^2\theta_2 + s\theta_3 \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}[s]$$

$$\text{et } \overline{Q} = (s^2 + \theta_1)\theta_4 \in \mathbb{R}_{\Theta_{\overline{\text{est}}}}[s],$$

où $\mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}[s]$ (respectivement $\mathbb{R}_{\Theta_{\overline{\text{est}}}}[s]$) désigne l'ensemble des polynômes en s à coefficients dans $\mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}$ (respectivement dans $\mathbb{R}_{\Theta_{\overline{\text{est}}}}$).

Plus précisément, nous procédons en trois temps :

1. Élimination des termes en $\Theta_{\overline{\text{est}}}$ par des manipulations algébriques : on s'attache à les caractériser à

l'aide d'un seul opérateur dans $\mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}(s) \left[\frac{d}{ds} \right]^2$ annihilant \bar{Q} appelé le \bar{Q} -annihilateur minimal. On prend soin de l'écrire sous une forme canonique.

2. Obtention d'un système d'équations en les inconnues Θ_{est} : l'annihilateur minimal y engendre tous les opérateurs qui annulent \bar{Q} . Grâce à l'écriture de ces opérateurs sous une forme canonique, des choix seront effectués de sorte que la matrice du système en Θ_{est} ait de bonnes propriétés numériques dans le domaine temporel.
3. Passage au domaine temporel et résolution du système: on utilise la transformée de Laplace inverse

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^m} \frac{d^p X(s)}{ds^p} \right) = \frac{(-1)^p t^{m+p}}{(m-1)!} \int_0^1 w^{m-1,p}(\tau) x(t\tau) d\tau \quad (5)$$

avec $w^{m,p}(t) = (1-t)^m t^p, \forall p, m \in \mathbb{N}, m \geq 1$. On choisit l'entier p minimum pour rendre l'estimation la moins sensible possible au bruit.

Le premier point met en lumière le rôle essentiel des annihilateurs minimaux, c'est-à-dire des opérateurs différentiels servant à annuler \bar{Q} . On définit la notion d'annihilateur et on précise la structure algébrique sous-jacente à cette notion, c'est-à-dire aux manipulations pour éliminer les Θ_{est} . Ces annihilateurs sont exprimés sous une forme canonique compatible avec les deux derniers points ci-dessus. L'estimation des paramètres est détaillée dans la section 3. La section 4 présente des simulations, accompagnées de comparaisons avec la méthode de Prony modifiée [13].

2 Un cadre algébrique pour les annihilateurs

Le cadre algébrique est dans la continuité de [8, 9, 10, 6, 16]³. Pour plus de détails sur les notions algébriques, voir [4] et [18].

Dans l'exemple considéré, on a $\bar{Q} = (s^2 + \theta_1)\theta_4 \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}[s]$. Il est clair que les opérateurs d'ordre⁴ 3 suivants annihilent \bar{Q} : $\Pi_1 = \frac{d}{ds} \circ \left(s^2 \frac{d^2}{ds^2} - s \frac{d}{ds} \right)$, $\Pi_2 = s^2 \frac{d^3}{ds^3} + s \frac{d^2}{ds^2} - \frac{d}{ds}$ et $\Pi_3 = \frac{d^3}{ds^3}$. Les questions se posent alors de savoir s'il s'agit d'un même annihilateur et s'il en existe d'ordre plus petit.

À l'algèbre $\mathbf{A} := \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}[s] \left[\frac{d}{ds} \right]$ on associe l'algèbre des opérateurs différentiels, à coefficients dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}(s)$, $\mathbf{B} := \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}(s) \left[\frac{d}{ds} \right]$

Définition 1. Soient $Q \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}[s]$ et l'idéal à gauche

$$\text{Ann}_{\mathbf{B}}(Q) = \left\{ F \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}(s) \left[\frac{d}{ds} \right] \mid F \cdot Q = 0 \right\}$$

Un Q -annihilateur est un élément $\Pi \in \text{Ann}_{\mathbf{B}}(Q)$.

L'idéal $\text{Ann}_{\mathbf{B}}(Q)$ est un idéal principal à gauche de \mathbf{B} . Cet idéal est donc engendré par un unique générateur $\Pi_{\text{min}} \in \mathbf{B}$ appelé le Q -annihilateur minimal, c'est-à-dire $\text{Ann}_{\mathbf{B}}(Q) = \mathbf{B} \Pi_{\text{min}}$. On remarque que $\text{Ann}_{\mathbf{B}}(Q)$ contient un annihilateur qui peut être choisi sous forme intégrale finie, i.e. un opérateur à coefficients dans $\mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}\left[\frac{1}{s}\right]$.

Pour $Q = s^n$ ($n \in \mathbb{N}$), on peut montrer que $\Pi_n = s \frac{d}{ds} - n$ est le Q -annihilateur minimal. On remarque que pour $m, n \in \mathbb{N}$, les opérateurs Π_m et Π_n commutent.

Lemme 1. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}[s]$. Pour $i = 1, 2$, si Π_i est un P_i -annihilateur tels que $\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1$ alors $\Pi_1 \Pi_2$ est un $(\mu P_1 + \eta P_2)$ -annihilateur, $\forall \mu, \eta \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}$.

Ce lemme implique que l'annihilateur minimal de \bar{Q} est

$$\Pi_{\text{min}} = \left(s \frac{d}{ds} - 2 \right) \circ \left(s \frac{d}{ds} \right) = s^2 \frac{d^2}{ds^2} - s \frac{d}{ds}. \quad (6)$$

Pour déterminer si deux annihilateurs correspondent en fait aux mêmes opérateurs, nous allons exploiter la structure d'algèbre de Weyl à deux générateurs s et $\frac{d}{ds}$ de \mathbf{A} (voir [4]) : en effet, on a $\left[\frac{d}{ds}, s \right] = \frac{d}{ds} s - s \frac{d}{ds} = 1$. La base canonique de \mathbf{A} est $\left\{ s^i \frac{d^j}{ds^j} \mid (i, j) \in \mathbb{N} \right\}$, donc tout élément F de \mathbf{A} s'écrit $F = \sum_{i,j} \lambda_{i,j} s^i \frac{d^j}{ds^j}$ avec $\lambda_{i,j} \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}, \forall i, j$ (somme finie). De façon similaire, tout élément $F \in \mathbf{B}$ s'écrit sous une forme canonique $F = \sum_i g_i(s) \frac{d^i}{ds^i}$, avec $g_i(s) \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}(s), \forall i$. Pour les exemples d'annihilateurs mentionnés au début de la section, on peut montrer que Π_2 est la forme canonique de Π_1 , soit $\frac{d}{ds} \circ \left(s^2 \frac{d^2}{ds^2} - s \frac{d}{ds} \right) = s^2 \frac{d^3}{ds^3} + s \frac{d^2}{ds^2} - \frac{d}{ds}$. On a alors $\Pi_3 \neq \Pi_1 = \Pi_2$.

Notre problème d'estimation revient, donc, à déterminer une famille d'annihilateurs $(\Pi_i)_{i=1}^r$ dans $\mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}(s) \left[\frac{d}{ds} \right]$ qui, appliqués à (4), donne un ensemble d'équations permettant d'obtenir Θ_{est} dans le domaine temporel. Cette famille sera définie à partir du \bar{Q} -annihilateur minimal.

De plus, la formule (5) justifie la recherche d'annihilateurs conduisant à des équations faisant intervenir des opérateurs différentiels sous forme intégrale finie. Ceux-ci doivent être de degrés minimaux en $\frac{d}{ds}$ afin de minimiser la sensibilité aux bruits de mesure. Par ailleurs le système d'équations ainsi obtenu doit être bien conditionné.

Nous allons exploiter la propriété du \bar{Q} -annihilateur minimal. Les annihilateurs considérés sont donc de la forme :

$$\Pi = \left(\sum_{i=0}^{\ell} g_i(s) \frac{d^i}{ds^i} \right) \Pi_{\text{min}}(s), g_i(s) \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}(s), \forall i.$$

²L'ensemble des polynômes en $\frac{d}{ds}$ à coefficients dans $\mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}[s]$

³Des outils analogues sont utilisés pour la dérivation numérique de signaux bruités [17, 15] et la détection de ruptures [7].

⁴L'ordre d'un opérateur $\Pi \in \mathbb{R}_{\Theta}(s) \left[\frac{d}{ds} \right]$ est son degré en tant que polynôme en $\frac{d}{ds}$.

3 Estimation des paramètres

L'action de l'annihilateur minimal $\Pi_{\min} = s^2 \frac{d^2}{ds^2} - s \frac{d}{ds}$ sur (4) donne $\Pi_{\min}(Q) = -s\theta_3$ et

$$\Pi_{\min}(P \cdot X) = (s^5 + s^3\theta_1) \frac{d^2 X}{ds^2} + (5s^4 + s^2\theta_1) \frac{dX}{ds} + (3s^3 - s\theta_1)X$$

Nous obtenons de cette manière une seule équation en les variables θ_1 et θ_3 . Afin de pouvoir identifier linéairement ces deux paramètres, il nous faut un système de deux équations. On a vu, dans la section précédente, que tout \bar{Q} -annihilateur est de la forme $\left(\sum_{i=0}^{\ell} g_i(s) \frac{d^i}{ds^i}\right) \Pi_{\min}(s)$, $g_i(s) \in \mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}(s)$, $\forall i$. Pour obtenir deux équations, on prend $\ell = 1$. Pour un choix de $g_i \in \mathbb{R}\left[\frac{1}{s}\right]$, $i = 0, 1$, on a un annihilateur d'ordre 3 qui s'écrit sous forme canonique

$$\Pi = g_3(s) \frac{d^3}{ds^3} + g_1(s) \left(s \frac{d^2}{ds^2} - \frac{d}{ds} \right),$$

où $g_1(s) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{s^i}$ et $g_3(s) = \sum_{i=0}^m \frac{b_i}{s^i}$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. On remarque qu'il est divisible par Π_{\min} dans \mathcal{B} . Le résultat de son action sur \mathcal{R} contient les deux termes $g_1 s^4 \frac{d^2 X(s)}{ds^2}$ et $g_3 s^3 \frac{d^3 X(s)}{ds^3}$. Le premier implique $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$ et l'entier m de g_1 doit être le plus petit possible afin de limiter l'effet du bruit (voir le point 3 de 1.2). Un raisonnement similaire sur le second terme conduit à des contraintes sur les b_i qui, au final, nous permettent d'obtenir deux annihilateurs différents :

$$\Pi_1 = \frac{1}{s^4} \Pi_{\min} \quad \text{et} \quad \Pi_2 = \frac{1}{s^4} \frac{d^3}{ds^3}.$$

L'application de ces deux annihilateurs à la relation \mathcal{R} conduit au système bien conditionné:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{s^5} \mathcal{O}_1 & -\frac{1}{s^5} \\ \frac{1}{s^4} \mathcal{O}_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^5} \mathcal{O}_2 \\ \frac{1}{s^4} \mathcal{O}_4 \end{pmatrix},$$

où

$$\mathcal{O}_1 = s^2 \frac{d^2 X(s)}{ds^2} + s \frac{dX(s)}{ds} - X(s),$$

$$\mathcal{O}_2 = s^4 \frac{d^2 X(s)}{ds^2} + 5s^3 \frac{dX(s)}{ds} + 3s^2 X(s),$$

$$\mathcal{O}_3 = s \frac{d^3 X(s)}{ds^3} + 3 \frac{d^2 X(s)}{ds^2},$$

$$\mathcal{O}_4 = s^3 \frac{d^3 X(s)}{ds^3} + 9s^2 \frac{d^2 X(s)}{ds^2} + 18s \frac{dX(s)}{ds} + 6X(s).$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse (5), on a

$$\theta_1 = \frac{1}{t^2} \times \frac{\int_0^1 (-w^{0,3}(\tau) + 9w^{1,2}(\tau) - \frac{1}{2}w^{2,1}(\tau) + w^{3,0}(\tau)) x(t\tau) d\tau}{\int_0^1 (-\frac{1}{2}w^{2,3}(\tau) + \frac{1}{2}w^{3,2}(\tau)) x(t\tau) d\tau}$$

$$\theta_3 = \frac{5!}{t^3} \int_0^1 \left(\left(w^{0,2}(\tau) - 5w^{1,1}(\tau) + \frac{3}{2}w^{2,0}(\tau) \right) - \theta_1 \left(\frac{1}{2}w^{2,2}(\tau) - w^{3,1}(\tau) - \frac{1}{4!}w^{4,0}(\tau) \right) \right) x(t\tau) d\tau$$

Nous avons pu identifier linéairement les paramètres θ_1 et θ_3 grâce à des annihilateurs dans $\mathbb{R}(s)\left[\frac{d}{ds}\right]$, donc ne faisant pas intervenir de paramètres à estimer. On peut montrer qu'il n'est pas possible d'identifier linéairement θ_2 . Dans le but d'obtenir une équation non linéaire en ce paramètre, on cherche des annihilateurs qui peuvent dépendre des paramètres inconnus Θ_{est} . Puisque le paramètre θ_1 est déjà identifié, nous pouvons considérer

$$\Pi_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^4} + \frac{\theta_1}{s^6} \right) \frac{d}{ds} + \frac{1}{s^5},$$

qui est en fait le \bar{Q} -annihilateur minimal⁵ dans $\mathbb{R}_{\Theta_{\text{est}}}(s)\left[\frac{d}{ds}\right]$ (alors que le Π_{\min} donné précédemment par (6) est le \bar{Q} -annihilateur minimal dans $\mathbb{R}(s)\left[\frac{d}{ds}\right]$). On obtient alors

$$\theta_2 = \frac{1}{10t^2\theta_1} \left(\theta_3 t(20 - t^2\theta_1) + \int_0^1 (-t^4\theta_1^2(w^{5,0}(\tau) + 5w^{4,1}(\tau)) + 40t^2\theta_1(3w^{2,1}(\tau) - w^{3,0}(\tau)) - 120(w^{1,0}(\tau) - w^{0,1}(\tau))) x(t\tau) d\tau \right).$$

4 Simulations

La figure 1 montre les résultats de l'estimation de la fréquence w et du paramètre θ_3 en fonction du temps d'estimation. Chaque point est obtenu en moyennisant les résultats de 200 essais. Sur le premier graphe est dessinée une période d'une réalisation de la sinusoïde bruitée (SNR = 10 dB), avec $N = 512$ échantillons. En l'occurrence,

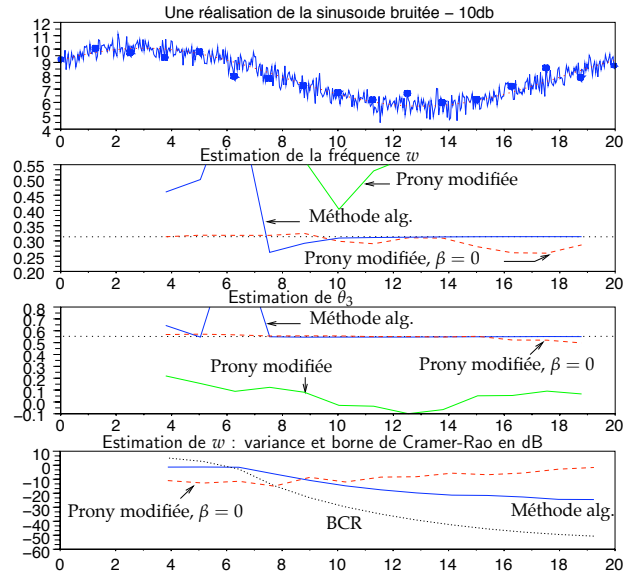


FIG. 1: Comparaison avec Prony modifiée l'estimation fournie par la méthode présentée est non biaisée et insensible à la perturbation β contrairement à la méthode de Prony modifiée (PM). C'est seulement en l'absence de la perturbation constante ($\beta = 0$) que PM

⁵C'est une subtilité importante selon que l'on cherche une estimation linéaire ou pas.

fournit des résultats du même ordre que ceux de la méthode algébrique, quoiqu'inférieurs. Pourtant, ces simulations ont été réalisées, pour la méthode PM, avec le signal analytique, c'est-à-dire l'exponentielle complexe, complétant la sinusoïde. De plus, le signal a été sous-échantillonné afin d'obtenir des conditions optimales pour PM (signal discret correspondant aux points sur le premier graphe).

Ces mêmes expériences sont reprises dans la figure 2 avec, maintenant, un bruit fortement corrélé. Pour la méthode algébrique, le signal bruité est simulé par une interpolation linéaire de la partie imaginaire du signal discret bruité utilisé pour la méthode PM. On constate, en accord avec [5, 6], que la coloration du bruit n'est pas un élément critique pour la méthode algébrique.

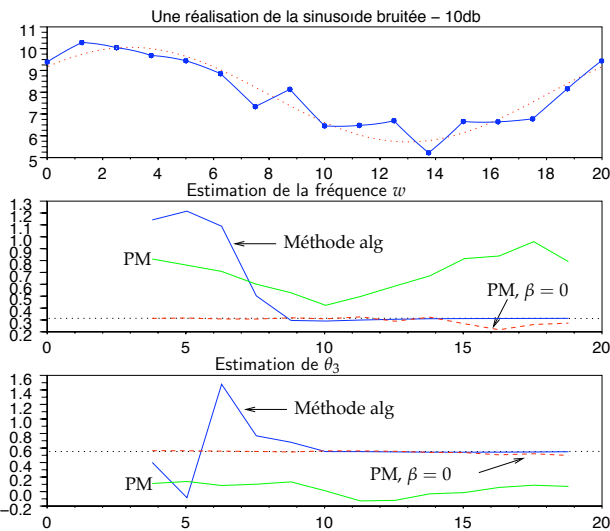


FIG. 2: Comparaison avec Prony modifiée : bruit coloré

References

- [1] Bittanti S., Campi M. et Savaresi S., Unbiased estimation of a sinusoid in colored noise via adapted notch filters, *Automatica*, 33, p. 209–215, 1997.
- [2] Bittanti S. et Savaresi S., On the parameterization and design of an extended Kalman filter frequency tracker, *IEEE Trans. Automat. Control*, 45, p. 1718–1724, 2000.
- [3] Cheng M.H. et Tsai J.L., A new IIR adaptive notch filter, *Signal Process*, 86, p. 1648–1655, 2006.
- [4] Dixmier J., *Algèbres enveloppantes*, Gauthier-Villars, 1974.
- [5] Fliess, M., Analyse non standard du bruit, *C.R. Acad. Sci. Paris, ser. I*, 342, p. 797–802, 2006.
- [6] Fliess M. Critique du rapport signal à bruit en communications numériques, *ARIMA*, 9, p. 419–429, 2008.
- [7] Fliess M., Join C. et Mboup M., Algebraic change-point detection, *Applicable Algebra Engin. Commun. Comput.*, 21, p. 131–143, 2010.
- [8] Fliess M., Mboup M., Mounier H. et Sira-Ramírez H., Questioning some paradigms of signal processing via con-

- crete examples, in H. Sira-Ramírez, G. Silva-Navarro (Eds.): *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, Editorial Lagares, México, p. 1–21, 2003.
- [9] Fliess M. et Sira-Ramírez H. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control Optim. Calc. Variat.*, 9, p. 151–168, 2003.
- [10] Fliess M. et Sira-Ramírez H. Closed-loop parametric identification for continuous-time linear systems via new algebraic techniques, in H. Garnier & L. Wang (Eds): *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*, Springer, p. 362–391, 2008.
- [11] Haykin S., *Adaptive Filter Theory* (2nd ed.), Englewood Cliffs, 1991.
- [12] Hsu L., Ortega R. et Damm G., A globally convergent frequency estimator, *IEEE Trans. Automat. Control*, 44, p. 698–713, 1999.
- [13] Kahn M., Mackisack M., Osborne M., and Smyth G. K., On the consistency of Prony's method and related algorithms, *J. Comput. Graph. Statist.*, 1, p. 329–349, 1992.
- [14] Li T.H. et Kedem B., Strong consistency of the contraction mapping method for frequency estimation, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 39, p. 989–998, 1993.
- [15] Liu D.Y., Gibaru O. et Perruquetti W., Error analysis of a class of derivative estimators for noisy signals, *Numerical Algo.*, 2011.
- [16] Mboup M., Parameter estimation for signals described by differential equations, *Applicable Analysis*, 88, p. 29–52, 2009.
- [17] M. Mboup, C. Join et M. Fliess, Numerical differentiation with annihilators in noisy environment, *Numerical Algo.*, 50, p. 439–467, 2009.
- [18] McConnell, J.C. et Robson, J.C., *Noncommutative Noetherian Rings*, Amer. Math. Soc., 2000.
- [19] Mojiri M. et Bakhsahi A.R., An adaptive notch filter for frequency estimation of a periodic signal, *IEEE Trans. Automat. Control*, 49, p. 314–318, 2004.
- [20] Neves A., Mboup M. et Fliess M., An Algebraic Receiver for Full Response CPM Demodulation, *VI Int. Telecom. Symp. (ITS2006)*, Fortaleza, CE, Brazil, 2006.
- [21] Regalia P. A., *Adaptive IIR Filtering in Signal Processing and Control*, Marcel Dekker, New York, 1995.
- [22] R. Roy et T. Kailath, ESPRIT-estimation of signal parameters via rotational invariance techniques, *IEEE Trans. Signal Process*, 37, p. 984–995, 1989.
- [23] Trapero J.R., Sira-Ramírez H. et Battle V.F., An algebraic frequency estimator for a biased and noisy sinusoidal signal, *Signal Processing*, 87, p. 1188–1201, 2007.
- [24] Trapero J.R., Sira-Ramírez H. et Battle V.F., A fast on-line frequency estimator of lightly damped vibrations in flexible structures, *J. Sound Vibration*, 307, p. 365–378, 2007.
- [25] Trapero J.R., Sira-Ramírez H. et Battle V.F., On the algebraic identification of the frequencies, amplitudes and phases of two sinusoidal signals from their noisy sum, *Int. J. Control*, 81, p. 507–518, 2008.