



# Échantillonnage dépendant de l'état: une approche par cartographie basée sur des LMIs

Christophe Fiter

► **To cite this version:**

Christophe Fiter. Échantillonnage dépendant de l'état: une approche par cartographie basée sur des LMIs. 4èmes Journées Doctorales MACS (JDMACS '11), Jun 2011, Marseille, France. 2011. <inria-00602569>

**HAL Id: inria-00602569**

**<https://hal.inria.fr/inria-00602569>**

Submitted on 22 Jun 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Échantillonnage dépendant de l'état : une approche par cartographie basée sur des LMIs

Christophe FITER<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire d'Automatique, Génie Informatique et Signal (CNRS FRE 3303)  
École Centrale de Lille, 59651 Villeneuve d'Ascq, France

christophe.fiter@centraliens-lille.org

*Résumé*— L'émergence des systèmes embarqués et des systèmes commandés au travers de réseaux requiert la réduction de l'utilisation des charges des processeurs et des réseaux. Dans ce travail, nous présentons un algorithme qui permet de choisir le pas d'échantillonnage en fonction de l'état. Cet algorithme maximise les temps d'inter-échantillonnage d'une commande par retour d'état linéaire. Nous considérons des systèmes linéaires invariants dans le temps et garantissons la stabilité exponentielle de l'origine pour un taux de convergence  $\alpha$  choisi. La preuve de l' $\alpha$ -stabilité est basée sur une fonction de Lyapunov quadratique calculée grâce à des LMIs dans le but d'optimiser certains critères de performance sur les intervalles d'inter-échantillonnage. Une cartographie de l'espace d'état est alors réalisée hors-ligne : elle associe à chaque état de l'espace d'état le pas d'échantillonnage admissible maximal, ce qui permet de réduire le nombre de mises à jour de l'actionneur pendant le contrôle du système en temps-réel.

*Mots-clés*— Systèmes embarqués, systèmes commandés au travers de réseaux, échantillonnage dépendant de l'état, self-triggered control, inégalité matricielle linéaire, polytope convexe

## I. PRÉAMBULE

Ce travail a été réalisé sous la direction de Messieurs Jean-Pierre Richard et Wilfrid Perruquetti, Professeurs à l'École Centrale de Lille, et sous l'encadrement de Monsieur Laurentiu Hetel, Chargé de Recherche CNRS. Je les remercie chaleureusement pour le soutien qu'ils m'ont apporté tout au long de ce travail.

Ce travail a été soutenu financièrement par le Ministère de l'Éducation Supérieure et de la Recherche, Le Conseil de la Région Nord-Pas de Calais et FEDER, au moyen du 'Contrat de Projets État Région (CPER) 2007-2013'.

La recherche menant à ces résultats a reçu des fonds du Septième Programme de Travail de la Communauté Européenne (FP7/2007-2013) sous l'accord n°257462 : HYCON2 Network of Excellence "Highly-Complex and Networked Control Systems".

## II. INTRODUCTION

Ces dernières décennies, une grande attention a été portée aux systèmes embarqués et aux systèmes commandés au travers de réseaux [14]. Ces systèmes présentent de nombreux avantages tels qu'un câblage réduit, des outils de "plug and play", ainsi qu'une agilité et une facilité de maintenance accrues. Cependant du point de vue du contrôle ils amènent de nouveaux défis, ces systèmes devant très souvent partager des ressources processeur et réseau limi-

tées. En pratique, cela engendre des fluctuations du pas d'échantillonnage, ce qui peut avoir un effet déstabilisant si le phénomène n'est pas correctement pris en compte.

De nombreuses études sur la stabilité robuste par rapport aux variations du pas d'échantillonnage ont été faites (voir [4], [11], [6], [5], et [2]). Des recherches intensives ont aussi été conduites pour adapter de façon dynamique le pas d'échantillonnage dans le but d'assurer les performances de contrôle souhaitées. On rencontre deux principales approches dans la littérature :

*Le contrôle "Event-triggered"* ([12], [7], [9]), dans lequel les capteurs n'envoient leurs informations au contrôleur que lorsque certains événements sont réalisés (i.e. le croisement d'une frontière de l'espace d'état, ou du niveau d'une fonction de Lyapunov). Le principal inconvénient de cette approche est qu'elle requiert en général un hardware dédié pour surveiller l'état du système et regarder si les conditions de stabilité établies sont toujours vérifiées.

*Le contrôle "Self-triggered"* ([10], [13]), dans lequel à chaque instant d'échantillonnage on calcule un minorant du prochain plus grand pas d'échantillonnage admissible, afin d'émuler le contrôle event-triggered sans avoir recours à un hardware supplémentaire. Cependant, dans ces travaux, le calcul des prochains pas d'échantillonnage est fait en ligne. De plus, la plupart des travaux dans la littérature nécessitent l'utilisation d'une fonction de Lyapunov, mais aucune méthode n'est donnée pour calculer une telle fonction garantissant la stabilité du système tout en optimisant un critère de performance sur les pas d'échantillonnage.

Dans ce papier, nous concevons hors-ligne une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état qui maximise les pas d'échantillonnage sous certaines conditions de stabilité de Lyapunov exponentielles. L'approche est basée sur une cartographie de l'espace d'état définissant les pas d'échantillonnage. En utilisant des résultats récents de construction polytopique pour des matrices polynomiales [8], nous proposons une méthode basée sur des LMIs pour calculer la fonction de Lyapunov adéquate, dans le but de maximiser la borne inférieure de la fonction d'échantillonnage.

Le papier est organisé comme suit. Tout d'abord, nous introduisons les notations utilisées, Section III, et le problème étudié, Section IV. Ensuite, les Sections V et VI décrivent la méthode proposée et les performances garanties. Enfin, quelques résultats de simulations sont montrés, Section VII, avant de conclure, Section VIII.

### III. NOTATIONS

L'exposant 'T' représente la transposition matricielle.  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est l'ensemble des matrices  $n \times n$ , et la notation  $P \succ 0$  (resp.  $P \succeq 0$ ) pour une matrice symétrique  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  signifie que  $P$  est définie positive (resp. semi-définie positive). Le spectre de la matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sera noté  $\text{Sp}(M)$ . Nous notons  $[x]$  la partie entière de  $x$  (i.e. le plus grand entier  $n$  vérifiant  $x - 1 < n \leq x$ ). Enfin, les notations  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|_\infty$  seront utilisées pour décrire la norme Euclidienne et la norme infinie respectivement. Nous rappelons que pour une fonction bornée  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ ,  $\|f\|_\infty = \text{Sup}_{x \in \mathbb{R}^p} \|f(x)\|$ .

### IV. ÉNONCÉ DU PROBLÈME

On considère le système linéaire invariant dans le temps

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \forall t \in \mathbb{R}_+ \\ x(t) &= x_0, \forall t \leq 0, \end{aligned} \quad (1)$$

où  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  représentent l'état et la commande du système, et où les matrices  $A$  et  $B$  sont constantes et de dimensions appropriées. La commande est définie comme un retour d'état constant par morceaux

$$u(t) = -Kx(t_k), \forall t \in [t_k; t_{k+1}), \quad (2)$$

où  $K$  est fixée telle que  $A - BK$  est Hurwitz et où  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$  sont les instants d'échantillonnage vérifiant  $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$  et définis par

$$t_{k+1} = t_k + \tau(x(t_k)), \forall k \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

avec une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

**Problème Général :** Étant donné le système (1) et la commande par retour d'état (2), trouver la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau$  qui maximise les pas d'échantillonnage tout en assurant la stabilité exponentielle de l'origine du système pour un taux de convergence  $\alpha$  choisi, aussi appelée  $\alpha$ -stabilité (i.e. telle qu'il existe un scalaire  $\beta$  pour lequel toutes les trajectoires vérifient  $\|x(t)\| \leq \beta e^{-\alpha t} \|x_0\|$  quelle que soit la condition initiale  $x_0$ ).

Avant de calculer la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état, il nous faut décider quels outils utiliser pour vérifier la stabilité exponentielle du système. Dans ce domaine, la théorie de stabilité de Lyapunov se montre très efficace. Pour garder les choses simples et faciles à lire, nous travaillerons dans ce papier exclusivement avec des fonctions de Lyapunov quadratiques. Nous utilisons la propriété bien connue :

*Proposition 1:* Soit  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  une fonction de Lyapunov candidate quadratique satisfaisant  $V(x) = x^T P x, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , avec  $P = P^T \succ 0$ . Si la condition

$$\dot{V}(x) + 2\alpha V(x) \leq 0 \quad (4)$$

est satisfaite pour toutes les trajectoires de (1), pour un scalaire  $\alpha > 0$  donné, alors l'origine du système est globalement  $\alpha$ -stable.

Tout au long de ce travail, nous nous concentrerons sur la résolution de deux problèmes principaux. Le premier porte sur le calcul de la fonction d'échantillonnage :

**Problème 1 :** Étant donné le système (1), la commande par retour d'état (2), et une fonction de Lyapunov  $V(x(t))$ , trouver la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau$  satisfaisant la condition de stabilité (4) de la Proposition 1 qui maximise le pas d'échantillonnage  $\tau(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

On peut voir dans cette formulation que la fonction de Lyapunov est supposée donnée, ce qui mène à se demander s'il existe une manière intelligente de la choisir. Puisque l'objectif est d'échantillonner le moins souvent possible, on cherchera aussi à assurer que le pas d'échantillonnage minimal est aussi grand que possible en résolvant le problème :

**Problème 2 :** Étant donné le système (1) et la commande par retour d'état (2), trouver une fonction de Lyapunov  $V(x(t))$  qui assure l'existence d'une fonction d'échantillonnage  $\tau$  satisfaisant la condition de stabilité (4) de la Proposition 1 et pour laquelle le pas d'échantillonnage minimal  $\underline{\tau} = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \tau(x)$  est maximal.

### V. UNE PROPRIÉTÉ DE STABILITÉ GÉNÉRIQUE

L'objectif de cette section est de proposer des conditions de stabilité vérifiables en pratique à partir de celles de la Proposition 1. Dans ce but, nous démontrons le Lemme suivant, qui sera utilisé comme une base durant l'étude :

*Lemme 2:* Soit un scalaire  $\alpha > 0$ . Si il existe une matrice  $P = P^T \succ 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et une fonction bornée  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\sigma \in [0; \tau(x)]$  :

$$x^T \Phi_{P,\alpha}(\sigma) x \leq 0, \quad (5)$$

avec

$$\Phi_{P,\alpha}(\sigma) = \begin{pmatrix} \Lambda(\sigma) \\ I \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T P + PA + 2\alpha P & -PBK \\ -K^T B^T P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda(\sigma) \\ I \end{pmatrix} \quad (6)$$

et

$$\Lambda(\sigma) = I + \int_0^\sigma e^{sA} ds (A - BK), \quad (7)$$

alors l'origine du système (1), (2) est globalement  $\alpha$ -stable pour une fonction d'échantillonnage variant dans le temps  $\tilde{\tau} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  quelconque, définissant des instants d'échantillonnage par la loi  $t_{k+1} = t_k + \tilde{\tau}(t_k, x(t_k)), k \in \mathbb{N}$  et satisfaisant  $0 < \tilde{\tau}(t, x) \leq \tau(x)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Preuve:* Soit  $\alpha > 0$  donné. Soit  $P = P^T \succ 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $V(x) = x^T P x$  la fonction quadratique associée. Pour le système étudié, la condition de stabilité (4) de la Proposition 1 peut être réécrite comme : pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \in [t_k; t_{k+1})$ ,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_k) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A^T P + PA + 2\alpha P & -PBK \\ -K^T B^T P & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t_k) \end{pmatrix} \leq 0.$$

Prenons maintenant une fonction bornée  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  et une fonction d'échantillonnage  $\tilde{\tau} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  définissant des instants d'échantillonnage par la loi  $t_{k+1} = t_k + \tilde{\tau}(t_k, x(t_k)), k \in \mathbb{N}$  et satisfaisant  $0 < \tilde{\tau}(t, x) \leq \tau(x)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ . Pour une trajectoire donnée de (1),  $k \in \mathbb{N}$ , et pour  $t \in [t_k; t_{k+1})$ , en utilisant les notations  $x = x(t_k)$  et  $\sigma = t - t_k \leq \tilde{\tau}(t_k, x(t_k)) \leq \tau(x(t_k))$ , on peut écrire  $x(t) = \Lambda(\sigma)x$ , avec  $\Lambda(\sigma)$  défini en (7), de

telle façon que les conditions de stabilité puissent être ré-écrites comme : pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $\sigma \in [0; \tau(x)]$ ,  $x^T \Phi_{P,\alpha}(\sigma)x \leq 0$ , avec  $\Phi_{P,\alpha}(\sigma)$  défini en (6). ■

**Remarque 1 :** Puisque le système linéaire invariant dans le temps (1) est supposé asymptotiquement stable avec  $u(t) = -Kx(t)$ , on peut montrer qu'il existe un couple de paramètres  $\alpha, P$  satisfaisant  $\Phi_{P,\alpha}(0) = (A - BK)^T P + P(A - BK) + 2\alpha P \prec 0$  et que, pour de tels paramètres, on peut trouver des fonctions d'échantillonnage  $\tau$  vérifiant les conditions de stabilité du Lemme 2 qui sont minorées par un scalaire strictement positif, évitant donc tout problème de phénomène de Zénon.

**Remarque 2 :** Si une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait les conditions du Lemme 2, pour un  $P$  et un  $\alpha$  donnés, alors le système sera globalement  $\alpha$ -stable quelle que soit la loi d'échantillonnage variable  $\tau_k = t_{k+1} - t_k$  vérifiant à chaque instant d'échantillonnage  $0 < \tau_k \leq \tau(x(t_k))$ . En particulier, si  $\tau$  est minorée par une constante  $\tau^*$ ,  $\tau(x) \geq \tau^*, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , l'origine du système sera globalement  $\alpha$ -stable pour un pas d'échantillonnage variable quelconque borné par  $\tau^*$ .

**Remarque 3 :** Pour un quelconque état  $x \neq 0$  donné, les conditions de stabilité du Lemme 2 sont les mêmes pour tout état  $y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R}^*$ . Par conséquent, il suffit de travailler avec des fonctions d'échantillonnage (dépendant de l'état) homogènes de degré 0 (i.e. satisfaisant  $\tau(\lambda x) = \tau(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}^*$ ) et de vérifier les conditions de stabilité du Lemme 2 sur la  $n$ -sphère unité quand on cherche à résoudre le Problème 1.

**Remarque 4 :** Le même type de conditions de stabilité peut être obtenu grâce à des fonctions de type Lyapunov-Razumikhin [3] ou des fonctions de Lyapunov-Krasovskii. Dans ces deux cas, seule la fonction matricielle  $\Phi(\cdot)$  change.

Le Lemme 2 donne des conditions de stabilité préliminaires pour un système commandé par retour d'état avec un échantillonnage dépendant de l'état. Cependant, on peut remarquer qu'il y a une infinité d'inégalités à vérifier à cause des dépendances temporelle et spatiale de ces conditions.

## VI. UNE MÉTHODE NUMÉRIQUE POUR OBTENIR UN NOMBRE FINI DE CONDITIONS DE STABILITÉ

Ici, nous proposons une méthode en deux temps pour obtenir un nombre fini de conditions de stabilité à partir du Lemme 2 :

*Enveloppement convexe suivant le temps :* La fonction matricielle  $\Phi_{P,\alpha}$  est remplacée par un nombre fini de matrices constantes qui enveloppent de façon convexe [8] cette fonction : pour cela, un développement de Taylor de  $\Phi_{P,\alpha}$  est utilisé.

*Discrétisation de l'espace :* Enfin, l'espace d'état est divisé en régions coniques dans le but de concevoir une fonction d'échantillonnage (dépendant de l'état) de sorte que les conditions du Lemme 2 soient satisfaites.

Un nombre fini de conditions de stabilité LMI seront alors écrites pour calculer la fonction de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$  résolvant le Problème 2 et pour construire hors ligne la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état associée  $\tau$  résolvant le Problème 1.

## A. Enveloppement convexe - Résultat technique

Dans cette partie, l'objectif est d'obtenir un nombre fini de conditions de stabilité suffisantes pour satisfaire  $x^T \Phi_{P,\alpha}(\sigma)x \leq 0, \forall \sigma \in [0; \underline{\sigma}]$  pour un état  $x$ , un scalaire  $\underline{\sigma}$  et des paramètres  $P, \alpha$  et  $\tau$  donnés, dans le but de rendre les conditions de stabilité du Lemme 2 indépendantes du temps.

L'idée sous-jacente l'enveloppement convexe est d'utiliser notre connaissance du système pour prédire l'évolution de l'état dans le but de construire un polytope convexe autour de la fonction  $\Phi_{P,\alpha}(\cdot)$  et ainsi obtenir un nombre fini de conditions de stabilité sur les sommets. La méthode est proposée comme suit :

*Théorème 3:* Soient des scalaires  $\alpha > 0, \bar{\sigma} > 0$  et des entiers  $N \geq 0, l \geq 1$  donnés.

Si il existe une matrice  $P = P^T \succ 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et une fonction bornée  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfaisant  $\|\tau\|_\infty \leq \bar{\sigma}$  et telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $i \in \{0; \dots; N\}$  et pour tout  $j \in \{0; \dots; \lfloor \frac{\tau(x)l}{\bar{\sigma}} \rfloor\}$ , les conditions  $x^T \hat{\Phi}_{i,j} x \leq 0$  sont satisfaites, avec

$$\hat{\Phi}_{i,j} = \hat{\Phi}_{i,j} + \nu I, \quad (8)$$

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_{i,j} = \left( \sum_{k=0}^i L_{k,j} \left( \frac{\bar{\sigma}}{\tau} \right)^k \right) & \text{si } j < \lfloor \frac{\tau(x)l}{\bar{\sigma}} \rfloor, \\ \hat{\Phi}_{i,j} = \left( \sum_{k=0}^i L_{k,j} \left( \tau(x) - \frac{j\bar{\sigma}}{l} \right)^k \right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} L_{0,j} = \Pi_{3,j}^T \Pi_1 \Pi_{3,j} - \Pi_{3,j}^T \Pi_2 - \Pi_2^T \Pi_{3,j}, \\ L_{1,j} = \Pi_{4,j}^T (\Pi_1 \Pi_{3,j} - \Pi_2) + (\Pi_{3,j}^T \Pi_1^T - \Pi_2^T) \Pi_{4,j}, \\ L_{k \geq 2,j} = \Pi_{4,j}^T \frac{(A^{k-1})^T}{k!} (\Pi_1 \Pi_{3,j} - \Pi_2) \\ \quad + (\Pi_{3,j}^T \Pi_1^T - \Pi_2^T) \frac{A^{k-1}}{k!} \Pi_{4,j} \\ \quad + \Pi_{4,j}^T \left( \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(A^{i-1})^T}{i!} \Pi_1 \frac{A^{k-i-1}}{(k-i)!} \right) \Pi_{4,j}, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \Pi_1 = A^T P + P A + 2\alpha P, \Pi_2 = P B K, \\ \Pi_{3,j} = I + M_j (A - B K), \Pi_{4,j} = N_j (A - B K), \end{cases} \quad (11)$$

$$M_j = \int_0^{j\frac{\bar{\sigma}}{l}} e^{As} ds, N_j = A M_j + I, \quad (12)$$

et

$$\nu \geq \max_{\substack{\sigma' \in [0; \frac{\bar{\sigma}}{l}] \\ r \in \{0; \dots; l-1\}}} \left( \max_{\lambda \in \text{Sp}(\Phi_{P,\alpha}(\sigma' + r\frac{\bar{\sigma}}{l}) - \hat{\Phi}_{P,\alpha,N,r}(\sigma'))} \lambda \right), \quad (13)$$

avec la fonction  $\hat{\Phi}_{P,\alpha,N,r}$  définie sur  $[0; \frac{\bar{\sigma}}{l}]$  par

$$\hat{\Phi}_{P,\alpha,N,r}(\sigma') = \sum_{k=0}^N L_{k,r} \sigma'^k, \quad (14)$$

alors l'origine du système (1), (2) est globalement  $\alpha$ -stable pour une fonction d'échantillonnage variant dans le temps  $\tilde{\tau} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  quelconque, définissant des instants d'échantillonnage par la loi  $t_{k+1} = t_k + \tilde{\tau}(t_k, x(t_k)), k \in \mathbb{N}$  et satisfaisant  $0 < \tilde{\tau}(t, x) \leq \tau(x)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ .

La preuve, qui décrit le principe en détail, se trouve en Annexe. Par rapport au Lemme 2, le Théorème 3 réduit le nombre de conditions d' $\alpha$ -stabilité. Elles reposent sur un nombre fini de matrices  $\hat{\Phi}_{i,j}$  représentant les sommets du polytope convexe construit autour de l'approximation

polynomiale de la fonction  $\Phi_{P,\alpha}(\cdot)$ , et sur un scalaire  $\nu$  qui borne l'erreur d'approximation. Il est possible de calculer une estimation de cette borne  $\nu$  en utilisant un maillage.

Le nombre de conditions d' $\alpha$ -stabilité à satisfaire a donc été réduit, mais il y a toujours une infinité de conditions à vérifier par rapport à l'état  $x$ .

### B. Résultat principal

Nous rappelons que lorsque l'on s'attache à résoudre le Problème 1, il est suffisant de travailler avec des fonctions d'échantillonnage (dépendant de l'état) homogènes de degré 0 (voir Remarque 3). Par conséquent, pour obtenir un nombre fini de conditions, il devient naturel de vouloir diviser l'espace d'état en un nombre fini de sous-espaces  $\mathcal{R}_s$  définis par des régions coniques centrées sur l'origine, et d'essayer de calculer pour chaque sous-espace son pas d'échantillonnage maximal admissible  $\tau_s$ , comme le montre la Figure 1 pour un système à 2 dimensions.

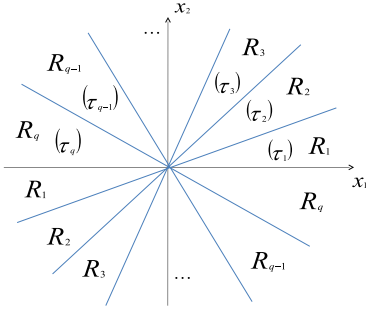


Fig. 1. Division de l'espace d'état en sous-espaces coniques

Le théorème qui suit donne un nombre fini de conditions permettant de résoudre ce problème.

*Théorème 4:* Soient une matrice  $P = P^T \succ 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , des scalaires  $\alpha > 0$  et  $\bar{\sigma} > 0$  et des entiers  $N \geq 0$  et  $l \geq 1$  donnés.

On divise l'espace d'état en une partition de  $q$  sous-espaces coniques  $\mathcal{R}_s, s \in \{1; \dots; q\}$ , définis pour tout  $s \in \{1; \dots; q\}$  par  $\mathcal{R}_s = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T Q_s x \geq 0\}$ , avec  $Q_s = Q_s^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et on définit des pas d'échantillonnage pour ces sous-espaces,  $\tau_1, \dots, \tau_q$ , satisfaisant  $\tau_s \leq \bar{\sigma}$  pour tout  $s \in \{1; \dots; q\}$ , et une fonction bornée  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant  $\tau(x) = \tau_s$  pour tout  $x \in \mathcal{R}_s, s \in \{1; \dots; q\}$ .

Si il existe des scalaires  $\varepsilon_{s,i,j} \geq 0$  tels que les conditions LMI  $\Phi_{i,j,s} + \varepsilon_{s,i,j} Q_s \preceq 0$  sont satisfaites pour tout  $i \in \{0; \dots; N\}, s \in \{1; \dots; q\}$  et  $j \in \{0; \dots; \lfloor \frac{\tau_s l}{\bar{\sigma}} \rfloor\}$ , avec

$$\Phi_{i,j,s} = \hat{\Phi}_{i,j,s} + \nu I, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \hat{\Phi}_{i,j,s} = \left( \sum_{k=0}^i L_{k,j} \left( \frac{\bar{\sigma}}{l} \right)^k \right) & \text{si } j < \lfloor \frac{\tau_s l}{\bar{\sigma}} \rfloor, \\ \hat{\Phi}_{i,j,s} = \left( \sum_{k=0}^i L_{k,j} \left( \tau_s - \frac{j \bar{\sigma}}{l} \right)^k \right) & \text{sinon,} \end{cases} \quad (16)$$

avec les  $L_{k,j}$  et  $\nu$  définis par les équations (10) à (14), alors l'origine du système (1), (2) est globalement  $\alpha$ -stable pour une fonction d'échantillonnage variant dans le temps  $\tilde{\tau} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  quelconque, définissant des instants d'échantillonnage par la loi  $t_{k+1} = t_k + \tilde{\tau}(t_k, x(t_k)), k \in \mathbb{N}$  et satisfaisant  $0 < \tilde{\tau}(t, x) \leq \tau(x)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Preuve:* Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Il existe un sous-espace  $\mathcal{R}_s = \{x \in \mathbb{R}^n, x^T Q_s x \geq 0\}, s \in \{1; \dots; q\}, Q_s = Q_s^T$ , tel que  $x \in \mathcal{R}_s$  et  $\tau(x) = \tau_s$ . En utilisant la version sans perte de la S-procedure [1], on établit que quels que soient  $i \in \{0; \dots; N\}$  et  $j \in \{0; \dots; \lfloor \frac{\tau_s l}{\bar{\sigma}} \rfloor\}$  la condition  $x^T \Phi_{i,j,s} x \leq 0, x \in \mathcal{R}_s$  est satisfaite si et seulement si il existe un scalaire  $\varepsilon_{s,i,j} \geq 0$  tel que  $\Phi_{i,j,s} + \varepsilon_{s,i,j} Q_s \preceq 0$ . Par conséquent, si la condition  $\hat{\Phi}_{i,j,s} + \varepsilon_{s,i,j} Q_s \preceq 0$  est satisfaite pour tout  $i \in \{0; \dots; N\}$ , pour tout  $s \in \{1; \dots; q\}$  et pour tout  $j \in \{0; \dots; \lfloor \frac{\tau_s l}{\bar{\sigma}} \rfloor\}$ , alors les conditions de stabilité du Théorème 3 sont satisfaites pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , ce qui achève la preuve. ■

*Corollaire 5:* Soient des scalaires  $\alpha > 0$  et  $\bar{\sigma} > 0$  et des entiers  $N \geq 0$  et  $l \geq 1$  donnés. On définit un pas d'échantillonnage  $\tau^* \leq \bar{\sigma}$  pour tout l'espace d'état : la fonction d'échantillonnage  $\tau : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  satisfait  $\tau(x) = \tau^*$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Si il existe une matrice  $P = P^T \succ 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telle que les conditions LMI  $\Phi_{i,j} \preceq 0$  sont satisfaites pour tout  $i \in \{0; \dots; N\}$  et  $j \in \{0; \dots; \lfloor \frac{\tau^* l}{\bar{\sigma}} \rfloor\}$ , avec  $\Phi_{i,j}$  défini par les équations (8) à (14), alors l'origine du système (1) avec le contrôle (2) est globalement  $\alpha$ -stable pour tout échantillonnage variable borné par  $\tau^*$ .

*Preuve:* La preuve vient naturellement du Théorème 4 en travaillant avec un seul sous-espace :  $\mathbb{R}^n$  même. ■

### C. Algorithme général

Le Théorème 4 et le Corollaire 5 sont les solutions des Problèmes 1 et 2 respectivement. Alors que le Corollaire 5 donne un moyen de calculer le paramètre  $P$  de la fonction de Lyapunov maximisant la borne inférieure  $\tau^*$  de la fonction d'échantillonnage  $\tau$  sous les conditions de stabilité de la Proposition 1, le Théorème 4 permet de maximiser la fonction d'échantillonnage sur des régions données de l'espace d'état pour un  $P$  donné. La méthode pour appliquer la technique que nous proposons est la suivante :

- Tout d'abord, utiliser le Corollaire 5 avec  $\nu = 0$  en premier lieu, et calculer le paramètre  $P$  de la fonction de Lyapunov donnant une approximation  $\tilde{\tau}^*$  du plus grand  $\tau^*$  admissible.

- Ensuite, calculer la variable  $\nu$  correspondant à la fonction de Lyapunov ainsi obtenue. Il est possible, bien que cela ne soit pas nécessaire pour l'algorithme, de calculer la vraie borne inférieure  $\tau^*$  vérifiant les conditions de stabilité du Corollaire 5 en utilisant le  $P$  et le  $\nu$  calculés.

- Enfin, utiliser les conditions LMI du Théorème 4 avec les valeurs calculées de  $P$  et  $\nu$  pour trouver le fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau$  maximale. Il est possible de résoudre les LMIs pour maximiser les pas d'échantillonnage  $\tau_s$  sous-espace par sous-espace. Lancer la recherche des pas d'échantillonnages maximum admissibles  $\tau_s$  en ayant de bonnes estimations (obtenues par exemple en utilisant le Théorème 3 et un maillage sur l'espace d'état) peut rendre la recherche plus rapide.

## VII. EXEMPLE NUMÉRIQUE

On considère le classique double intégrateur :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} Kx(t_k), \\ K &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On règle le degré de l'approximation polynomiale  $N = 5$ , le nombre de subdivisions polytopiques  $l = 100$ , et le nombre de régions  $q = 1000$ . On peut alors obtenir une cartographie de l'espace d'état donnant le pas d'échantillonnage admissible maximal pour chaque état, pour un taux de convergence  $\alpha > 0$  donné, grâce au Corollaire 5 et au Théorème 4. Les fonctions d'échantillonnage dépendant de l'état obtenues hors ligne assurant la stabilité exponentielle de l'origine du système pour différents taux de convergence  $\alpha$  sont présentées Figure 2, en utilisant l'angle  $\theta$  des coordonnées sphériques de l'état.

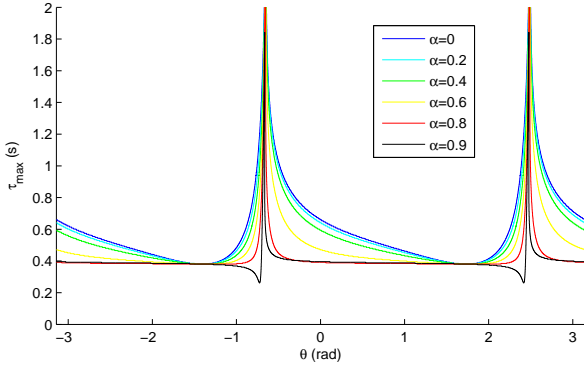


Fig. 2. Fonction d'échantillonnage  $\tau$  dépendant de l'état (son angle) pour différents taux de convergence  $\alpha$ .

Notons que pour des pas d'échantillonnages constants supérieurs à  $T_{max} = 0.67s$ , la matrice de transition du modèle discret n'est plus Schur, et donc le système est instable. Cependant, on peut observer qu'avec la technique proposée, pour certains sous-espaces de l'espace d'état, on peut aller plus loin que cette limite  $T_{max}$ .

La Figure 3 montre des résultats obtenus en simulation avec  $\alpha = 0$  et un état initial choisi aléatoirement. La figure montre tout d'abord les pas d'échantillonnage (en bleu), avec le minimum (en rouge) de la fonction d'échantillonnage calculée hors ligne, et la "limite de Schur"  $T_{max}$  (en magenta), avant de montrer la fonction de Lyapunov décroissante et la commande. On remarque qu'en moyenne le pas d'échantillonnage est supérieur à la limite de Schur  $T_{max}$ .

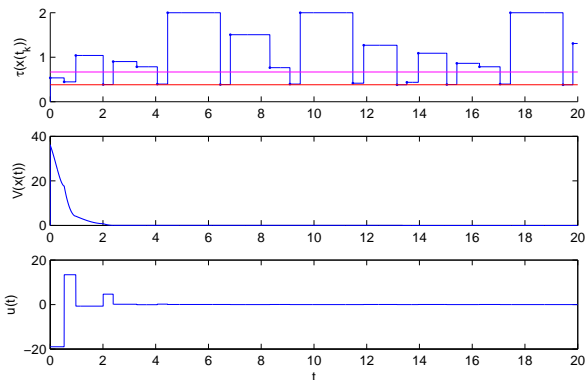


Fig. 3. Temps d'inter-échantillonnage  $\tau(x(t_k))$ , évolution de la fonction de Lyapunov  $V(x) = x^T P x$ , et commande  $u(t)$  pour un taux de convergence  $\alpha = 0$ .

## VIII. CONCLUSION

Nous avons introduit une méthode basée sur des conditions de stabilité de Lyapunov pour construire une fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau$  assurant la stabilité exponentielle globale avec un taux de convergence  $\alpha$  choisi pour des systèmes à retour d'état linéaire. Elle présente deux avantages principaux.

Le premier avantage est que la méthode permet de maximiser le pas d'échantillonnage minimal  $\tau^*$  de la fonction d'échantillonnage dépendant de l'état  $\tau$ , et de calculer la fonction de Lyapunov quadratique associée.

Le second avantage est que la méthode permet de construire hors ligne une cartographie de l'espace d'état avec un pas d'échantillonnage admissible maximal pour chaque sous-espace. Le nombre d'opérations devant être effectué en ligne est alors réduit au minimum puisqu'à chaque instant d'échantillonnage  $t_k$  il suffit de calculer les coordonnées sphériques de l'état  $x(t_k)$ , regarder et mémoriser le pas d'échantillonnage associé  $\tau(x(t_k))$  déterminé hors ligne, et actualiser la commande  $u(t) = -Kx(t_k)$ .

Nos axes de recherche actuels portent sur l'extension de ces résultats aux systèmes non linéaires et perturbés.

## IX. ANNEXES

*Preuve du Théorème 3:* Pour prouver le Théorème 3, nous avons d'abord besoin d'introduire deux Lemmes importants.

*Lemme 6:* (Démontré dans [8]) On considère la fonction matricielle polynomiale

$$L(\sigma) = L_0 + L_1\sigma + \dots + L_N\sigma^N$$

telle que la variable  $\sigma$  est positive bornée :  $0 < \sigma < \bar{\sigma}$ . Alors, on peut trouver un polytope convexe formé par  $N+1$  sommets qui enveloppe la fonction matricielle polynomiale  $L(\sigma)$ , i.e. il existe une famille indexée  $\mu_i(\sigma) > 0$ ,  $i = 0..N$ , vérifiant  $\sum_{i=1}^N \mu_i(\sigma) = 1$ , et telle que

$$L(\sigma) = \sum_{i=1}^N \mu_i(\sigma) U_i$$

où les matrices  $U_i$  représentent les sommets du polytope et sont données pour tout  $i = 0..N$  par

$$U_i = \sum_{k=0}^i \bar{\sigma}^k L_k.$$

*Lemme 7:* On considère un état  $x \in \mathbb{R}^n$ , des scalaires  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $0 < \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma}$ , des entiers  $N \geq 0$ ,  $l \geq 1$ , et des paramètres  $\alpha > 0$ ,  $P = P^T \succ 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Si les conditions  $x^T \Phi_{i,j} x \leq 0$  sont satisfaites pour tout  $i \in \{0; \dots; N\}$  et  $j \in \{0; \dots; \lfloor \frac{\underline{\sigma} l}{\bar{\sigma}} \rfloor\}$ , avec les matrices  $\Phi_{i,j}$  définies par les équations (8) à (14) (avec  $\underline{\sigma}$  remplaçant  $\tau(x)$  dans les équations), alors pour tout  $\sigma \in [0; \underline{\sigma}]$ ,  $x^T \Phi_{P,\alpha}(\sigma) x \leq 0$ , avec  $\Phi_{P,\alpha}(\sigma)$  défini par (6).

*Preuve du Lemme 7:* Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $0 < \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma}$ ,  $N \geq 0$ ,  $l \geq 1$ ,  $P = P^T \succ 0 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\alpha > 0$ . La preuve du Lemme est divisée en quatre étapes.

1. Tout d'abord, on divise l'intervalle de temps  $[0; \bar{\sigma}]$  en  $l$  sous-divisions et on prend un temps  $\sigma \leq \underline{\sigma}$  dans une de

ces sous-divisions. Le but de cette étape est de préparer le terrain pour calculer une estimation précise de  $\Phi_{P,\alpha}(\cdot)$  en construisant  $l$  petits polytopes convexes autour de la fonction au lieu d'en construire un seul gros (voir Figure 4).

2. Ensuite, on calcule une approximation polynomiale de  $\Phi_{P,\alpha}(\cdot)$  pour la sous-division considérée.

3. Après, on borne l'erreur résiduelle de cette approximation polynomiale avec un terme constant.

4. Enfin, on construit un polytope convexe autour de l'approximation polynomiale en utilisant la méthode proposée dans [8] (voir Lemme 6), pour obtenir le nombre fini de conditions désiré.

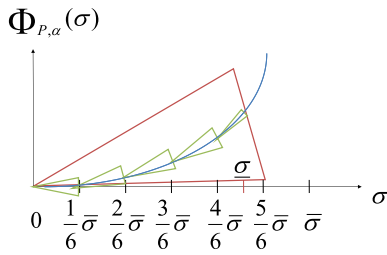


Fig. 4. Construction des sous-divisions polytopiques

*Étape 1 :* On divise l'intervalle de temps  $[0; \bar{\sigma}]$  en  $l$  sous-divisions  $[j\frac{\bar{\sigma}}{l}; (j+1)\frac{\bar{\sigma}}{l}]$ , avec  $j \in \{0; \dots; l-1\}$ . Prenons  $\sigma \in [0; \underline{\sigma}]$ . Il existe  $j \in \{0; \dots; \lfloor \frac{\underline{\sigma}l}{\bar{\sigma}} \rfloor\}$  tel que  $j\frac{\bar{\sigma}}{l} \leq \sigma \leq (j+1)\frac{\bar{\sigma}}{l}$ . On définit alors  $\sigma' = \sigma - j\frac{\bar{\sigma}}{l}$  ( $\sigma' \in [0; \chi]$ , avec  $\chi = \frac{\bar{\sigma}}{l}$  si  $j < \lfloor \frac{\underline{\sigma}l}{\bar{\sigma}} \rfloor$ , et  $\chi = \underline{\sigma} - \frac{j\bar{\sigma}}{l}$  sinon).

*Étape 2 :* Pour avoir des équations plus légères, on définit  $\Pi_1 = A^T P + PA + 2\alpha P$  et  $\Pi_2 = PBK$ . A partir des équations (6) et (7), on déduit que

$$\Phi_{P,\alpha}(\sigma) = \Lambda(\sigma)^T \Pi_1 \Lambda(\sigma) - \Lambda^T(\sigma) \Pi_2 - \Pi_2^T \Lambda(\sigma). \quad (17)$$

Pour obtenir une expression utile de  $\Lambda(\sigma)$  comme fonction de  $\sigma'$ , on utilise la relation suivante, obtenue après quelques calculs élémentaires :

$$\int_0^{a+b} e^{As} ds = \int_0^a e^{As} ds + \int_0^b e^{As} ds \left( A \int_0^a e^{As} ds + I \right),$$

qui est satisfaite pour tout scalaires  $a$  et  $b$ , pour obtenir

$$\begin{aligned} \Lambda(\sigma) &= I + \left( M_j + \int_0^{\sigma'} e^{As} ds N_j \right) (A - BK) \\ &= \Pi_{3,j} + \int_0^{\sigma'} e^{As} ds \Pi_{4,j}, \end{aligned} \quad (18)$$

avec  $M_j = \int_0^{j\frac{\bar{\sigma}}{l}} e^{As} ds$ ,  $N_j = AM_j + I$ ,  $\Pi_{3,j} = I + M_j(A - BK)$ , et  $\Pi_{4,j} = N_j(A - BK)$ . On note alors que

$$\int_0^{\sigma'} e^{As} ds = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^{i-1}}{i!} \sigma'^i. \quad (19)$$

En combinant les équations (17), (18) et (19), on peut écrire

$$\Phi_{P,\alpha}(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} L_{k,j} \sigma'^k, \quad (20)$$

avec les  $L_{k,j}$  définis par (10). Il est alors possible d'exprimer une approximation polynomiale d'ordre  $N$  de  $\Phi_{P,\alpha}$  sur la sous-division temporelle  $[j\frac{\bar{\sigma}}{l}; (j+1)\frac{\bar{\sigma}}{l}]$  par

$$\hat{\Phi}_{P,\alpha,N,j}(\sigma') = \sum_{k=0}^N L_{k,j} \sigma'^k, \sigma' \in [0; \frac{\bar{\sigma}}{l}].$$

*Étape 3 :* Notons le résidu de l'approximation  $R_{P,\alpha,N,j}(\sigma') = \Phi_{P,\alpha}(\sigma) - \hat{\Phi}_{P,\alpha,N,j}(\sigma')$ . Si on peut calculer une borne avec un scalaire  $\nu$  indépendant de  $\sigma'$  telle que  $R_{P,\alpha,N,j}(\sigma') \preceq \nu I$ , alors la condition  $x^T (\hat{\Phi}_{P,\alpha,N,j}(\sigma') + \nu I) x \leq 0$  entrainera  $x^T \Phi_{P,\alpha}(\sigma) x \leq 0$ . Pour un  $\sigma'$  donné, puisque  $R_{P,\alpha,N,j}(\sigma') = \Phi_{P,\alpha}(\sigma) - \hat{\Phi}_{P,\alpha,N,j}(\sigma')$  est symétrique, alors si on note  $\lambda_{\sigma'}$  la plus grande valeur propre de  $R_{P,\alpha,N,j}(\sigma')$ , on a  $R_{P,\alpha,N,j}(\sigma') \preceq \lambda_{\sigma'} I$ .

Par conséquent, on peut écrire  $R_{P,\alpha,N,j}(\sigma') \preceq \nu I$  avec  $\nu$  une constante définie par (13).

*Étape 4 :* Puisque la fonction  $\hat{\Phi}_{P,\alpha,N,j}(\cdot) + \nu I : [0; \chi] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est polynomiale, on peut utiliser le polytope convexe présenté dans le Lemme 6 pour prouver que si  $x^T \Phi_{i,j} x \leq 0$  pour tout  $i \in \{1; \dots; n\}$ , avec  $\Phi_{i,j} = \left( \sum_{k=0}^i L_{k,j} \chi^k \right) + \nu I$ , alors  $x^T (\hat{\Phi}_{P,\alpha,N,j}(\sigma') + \nu I) x \leq 0$ , et donc  $x^T \Phi_{P,\alpha}(\sigma) x \leq 0$ , ce qui achève la preuve du Lemme 7. ■

La preuve du Théorème 3 est obtenue en implémentant les conditions du Lemme 7 pour satisfaire  $x^T \Phi_{P,\alpha}(\sigma) x \leq 0, \forall \sigma \in [0; \bar{\sigma}]$  dans le Lemme 2 avec  $\bar{\sigma} \geq \|\tau\|_{\infty}$  et  $\underline{\sigma} = \tau(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . ■

## RÉFÉRENCES

- [1] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan. Linear matrix inequalities in system and control theory. *SIAM, Studies in Applied Mathematics*, 15 :23–24, 1994.
- [2] M.B.G. Cloosterman, L. Hetel, N. van de Wouw, W.P.M.H. Heemels, J. Daafouz, and H. Nijmeijer. Controller synthesis for networked control systems. *Automatica*, 46(10) :1584–1594, 2010.
- [3] C. Fiter, L. Hetel, W. Perruquetti, and J.-P. Richard. A state dependent sampling for linear state feedback. *Submitted*.
- [4] E. Fridman. A refined input delay approach to sampled-data control. *Automatica*, 46(2) :421–427, 2010.
- [5] E. Fridman, A. Seuret, and J.-P. Richard. Robust sampled-data stabilization of linear systems : An input delay approach. *Automatica*, 40(8) :1441–1446, 2004.
- [6] H. Fujioka. Stability analysis of systems with aperiodic sample-and-hold devices. *Automatica*, 45(3) :771–775, 2009.
- [7] W.P.M.H. Heemels, J.-H. Sandee, and P.P.J. Van Bosch. Analysis of event-driven controllers for linear systems. *International Journal of Control*, 81(4) :571–590, 2008.
- [8] L. Hetel, J. Daafouz, and C. Iung. LMI control design for a class of exponential uncertain systems with application to network controlled switched systems. In *American Control Conference 2007*, pages 1401–1406, New York City, USA, 2007.
- [9] J. Lunze and D. Lehmann. A state-feedback approach to event-based control. *Automatica*, 46(1) :211–215, 2010.
- [10] M. Mazo-Jr., A. Anta, and P. Tabuada. An ISS self-triggered implementation of linear controllers. *Automatica*, 46(8) :1310–1314, 2010.
- [11] A. Seuret. Stability analysis for sampled-data systems with a time-varying period. In *Conference on Decision and Control 2009*, Shanghai, China, 2009.
- [12] P. Tabuada. Event-triggered real-time scheduling of stabilizing control tasks. *Transactions on Automatic Control*, 52(9) :1680–1685, 2007.
- [13] X. Wang and M.D. Lemmon. Self-triggering under state-independent disturbances. *Transactions on Automatic Control*, 55(6) :1494–1500, 2010.
- [14] W. Zhang, M.S. Branicky, and S.M. Phillips. Stability of networked control systems. *IEEE Control Systems Magazine*, 21(1) :84–99, 2001.