

# Assimilation d'images dans un modèle réduit pour l'estimation du mouvement

Karim Drifi, Isabelle Herlin

► **To cite this version:**

Karim Drifi, Isabelle Herlin. Assimilation d'images dans un modèle réduit pour l'estimation du mouvement. GRETSI 2011 - Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images, Sep 2011, Bordeaux, France. inria-00623188

**HAL Id: inria-00623188**

**<https://hal.inria.fr/inria-00623188>**

Submitted on 13 Sep 2011

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Assimilation d'images dans un modèle réduit pour l'estimation du mouvement

Karim DRIFI<sup>1,2</sup>, Isabelle HERLIN<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>INRIA, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique  
Domaine de Voluceau, Rocquencourt - BP 105 78153 Le Chesnay Cedex, France

<sup>2</sup>CEREA, joint laboratory ENPC - EDF R&D, Université Paris-Est  
6-8 avenue Blaise Pascal, Cité Descartes Champs-sur-Marne 77455 Marne la Vallée Cedex 2, France  
karim.drifi@inria.fr, isabelle.herlin@inria.fr

**Résumé** – Cet article décrit une méthode d'estimation du champ de vitesse apparent, sous-jacent à l'évolution temporelle d'une séquence d'images. Un modèle d'évolution, dit **complet**, est choisi pour représenter la dynamique du champ de vitesse et des images. La méthode de décomposition orthogonale propre est appliquée et fournit des bases de représentation des champs de vitesse et des images. La projection de Galerkin du modèle complet sur ces bases réduites définit alors le modèle **réduit**. Un algorithme d'assimilation variationnelle de données est conçu afin d'estimer les coefficients des champs de vitesse à partir des coefficients des images observées. Le mouvement est ensuite restitué à partir de ces coefficients estimés. La méthode est validée sur des données synthétiques afin de quantifier les résultats.

**Abstract** – This paper concerns the estimation of apparent motion from an image sequence. A model, named **full model**, is defined to describe the dynamics of motion field and images. The Proper Orthogonal Decomposition (POD) is used to derive basis to characterize motion fields and images. The Galerkin projection of the full model on these basis defines the so-called **reduced model**. Coefficients of motion fields are retrieved from those of observations with the help of a 4D-var assimilation method. Last motion results are obtained from the coefficients. The method has been tested on twin experiments to validate the approach.

## 1 Introduction

L'estimation du mouvement est un problème fondamental du traitement d'image. Il s'agit d'estimer le champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  à partir d'une séquence d'images. Dans le cas d'acquisitions satellite, les applications concernent principalement l'océanographie et la météorologie. La littérature décrit l'estimation du mouvement par des algorithmes de traitement d'image, par exemple Horn & Schunck [4], ou par des algorithmes d'assimilation de données [1, 2, 7]. Ces dernières méthodes exploitent un modèle dynamique, issu d'une connaissance a priori sur la séquence. Leurs principales limitations sont le temps de calcul et le volume de mémoire nécessaires. Un moyen d'éviter ces difficultés est d'utiliser une technique dite de réduction. Un modèle réduit, obtenu par projection de Galerkin, a été utilisé par D'Adamo et Papadakis dans [3, 6] pour estimer la dynamique à partir d'observations du champ de mouvement acquises par « Particle Image Velocimetry ». Le modèle dynamique réduit décrit l'évolution temporelle des coefficients de projection  $a_i(t)$  sur une base  $\Phi = \{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1\dots K}$  afin d'approximer l'évolution temporelle du champ de vitesse  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Cette base  $\Phi$  est obtenue par décomposition orthogonale propre [5] sur les deux premières images  $I^1$  et  $I^2$  de la séquence afin des observations.

Dans cet article, on souhaite estimer un mouvement,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  à partir d'une séquence discrète d'images  $I = \{I^z\}_z = \{I(\mathbf{x}, t_z)\}_z$ , acquise aux dates  $t_i$ .

On considère le vecteur d'état  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}, t))^T$ , où le traceur passif  $q$  est une quantité scalaire équivalente aux images de  $I$ . L'évolution temporelle de  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t)$  est décrite par un modèle complet  $\mathbb{M}_C$ , choisi à partir d'heuristiques. Le vecteur  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t)$  est projeté sur un espace réduit, engendré par des bases  $\Phi$  et  $\Psi$ , dont l'obtention est décrite ultérieurement :

- $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  est projeté sur  $\Phi$  et associé aux coefficients  $a_i(t)$ ,
- $q(\mathbf{x}, t)$  est projeté sur  $\Psi$  et associé aux coefficients  $b_j(t)$ .

La projection de Galerkin du modèle complet  $\mathbb{M}_C$ , sur  $\Phi$  et  $\Psi$ , fournit un modèle réduit  $\mathbb{M}_R$  décrivant l'évolution des coefficients  $a_i(t)$  et  $b_j(t)$ . Afin de réaliser l'estimation du mouvement, les images observées  $I^z$  sont projetées sur  $\Psi$ , fournissant des valeurs  $b_j^{obs}(t_z)$ , qui sont ensuite assimilées dans  $\mathbb{M}_R$ . Les coefficients  $a_i(t)$  ainsi obtenus permettent de restituer le champ de mouvement  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

Comment sont obtenues les bases  $\Psi$  et  $\Phi$ ? La méthode de décomposition orthogonale propre, appliquée à  $I$ , permet de calculer  $\Psi$ . Un algorithme de calcul de mouvement est utilisé

pour calculer  $\Phi$ . Un algorithme de calcul de mouvement est utilisé

d'obtenir une initialisation  $\mathbf{v}_0$ . Une séquence  $V = \{\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_z)\}_z$  est ensuite calculée en intégrant  $\mathbf{v}_0$  avec le modèle  $\mathbb{M}_C$ . Une décomposition orthogonale propre est enfin appliquée à  $V$  afin d'obtenir la base  $\Phi$ .

La Section 2 décrit le calcul des bases réduites au moyen de la décomposition orthogonale propre. La Section 3 résume la projection de Galerkin du modèle complet afin d'obtenir le modèle réduit. La Section 4 décrit le cadre de l'assimilation variationnelle de données dans le cas particulier d'un modèle réduit pour l'estimation du mouvement. Enfin, la Section 5 présente l'application de la méthode pour des expériences jumelles.

## 2 Calcul des bases réduites

On résume, dans cette section, l'obtention des bases réduites  $\Psi = \{\psi_j(\mathbf{x})\}_{j=1\dots L}$ , pour la représentation du traceur  $q$ , et  $\Phi = \{\phi_i(\mathbf{x})\}_{i=1\dots K}$ , pour le mouvement  $\mathbf{v}$ .

**Décomposition orthogonale propre** Dans un cadre général, on considère une séquence discrète  $E = \{E^m\}_{m \in \{1, \dots, M\}}$ .  $E$  peut être scalaire,  $E = I$ , ou vectorielle  $E = V$ . Un élément  $E^m$  est représenté sur la base canonique  $\{e_n\}_{n=1\dots N}$  :

$$\forall m \in \{1, \dots, M\}, \quad E^m = \sum_{n=1}^N E_n^m e_n \quad (1)$$

avec  $N$  le nombre de pixels. Considérons la matrice  $\underline{E}$  de taille  $N \times M$ , telle que l'élément de la  $n^{\text{ième}}$  ligne et  $m^{\text{ième}}$  colonne est  $E_n^m$ . Soit  $G = \underline{E} \underline{E}^T$  la matrice de Gram de taille  $N \times N$ . Les  $P$  premiers vecteurs propres, expliquant 90% de la variance de  $E$ , sont choisis pour constituer la base réduite  $\Gamma = \{\gamma_p\}_{p=1\dots P}$ .

## 3 Projection de Galerkin

Soit  $\mathbb{M}_C$  le modèle dynamique complet associé au vecteur d'état  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t)$ . On a :

$$\frac{\partial \mathbf{X}_C}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}_C(\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t)) = 0$$

Dans l'article,  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, t) = (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}, t))$ .  $\mathbb{M}_C$  caractérise la dynamique de  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et de  $q(\mathbf{x}, t)$ . Les équations d'évolution choisies sont l'advection de la vitesse par elle-même et l'advection du traceur par la vitesse. La condition initiale, à  $t = 0$ , de  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et  $q(\mathbf{x}, t)$  est  $\mathbf{X}_C(\mathbf{x}, 0) = (\mathbf{v}_0(\mathbf{x}), q_0(\mathbf{x}))$ . On obtient ainsi le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = 0 \\ \frac{\partial q}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla q(\mathbf{x}, t)) = 0 \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad q(\mathbf{x}, 0) = q_0(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (2)$$

Soient  $a_i(t)$  les coefficients de projection de  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  sur  $\phi_i$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  peut être approximé par  $\sum_{i=1}^K a_i(t) \phi_i(\mathbf{x})$ . De même  $q(\mathbf{x}, t)$  est approximé par  $\sum_{j=1}^L b_j(t) \psi_j(\mathbf{x})$  avec  $b_j$  les coefficients de projection de  $q(\mathbf{x}, t)$  sur  $\psi_j$ .  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et  $q(\mathbf{x}, t)$  sont remplacés par leurs approximations dans le Système (2) afin d'obtenir :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^K \frac{da_i}{dt}(t) \phi_i(\mathbf{x}) \\ + \left[ \sum_{i=1}^K (a_i(t) \phi_i(\mathbf{x})) \cdot \nabla \right] \sum_{j=1}^K a_j(t) \phi_j(\mathbf{x}) = 0 \\ \sum_{i=1}^L \frac{db_i}{dt}(t) \psi_i(\mathbf{x}) \\ + \left[ \sum_{i=1}^K (a_i(t) \phi_i(\mathbf{x})) \right] \cdot \nabla \left[ \sum_{j=1}^L b_j(t) \psi_j(\mathbf{x}) \right] = 0 \\ \sum_{i=1}^K a_i(0) \phi_i(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^K a_{i0} \phi_i(\mathbf{x}) \\ \sum_{j=1}^L b_j(0) \psi_j(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^L b_{j0} \psi_j(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (3)$$

On fait ensuite le produit scalaire du Système d'équations (3) avec les  $\phi_k$  et  $\psi_l$  afin d'obtenir le système d'ODE suivant :

$$\begin{cases} \frac{da_k}{dt}(t) + \left\langle \left( \sum_{i=1}^K a_i(t) \phi_i \cdot \nabla \right) \sum_{i=1}^K a_i(t) \phi_i, \phi_k \right\rangle = 0, \\ \frac{db_l}{dt}(t) + \left\langle \left( \sum_{i=1}^K a_i(t) \phi_i \right) \cdot \nabla \left[ \sum_{j=1}^L b_j(t) \psi_j, \psi_l \right] \right\rangle = 0, \\ a_k(0) = a_{k0}, \quad b_l(0) = b_{l0}, \end{cases} \quad (4)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  représente le produit scalaire dans l'espace des fonctions de carré sommable  $L_2$  :

$$\langle f, g \rangle = \int f(\mathbf{x}) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5)$$

Le Système (4) se simplifie en :

$$\begin{cases} \frac{da_k}{dt}(t) + a^T(t) B(k) a(t) = 0, \quad k = 1 \dots K. \\ \frac{db_l}{dt}(t) + a^T(t) G(l) b(t) = 0, \quad l = 1 \dots L. \\ a(0) = a_0, \quad b(0) = b_0 \end{cases} \quad (6)$$

avec :

- $a(t) = (a_1(t), \dots, a_K(t))^T$ ,  $b(t) = (b_1(t), \dots, b_L(t))^T$ ,
- $B(k)$  la matrice de taille  $K \times K$  dont les éléments sont  $B(k)_{i,j} = \langle (\phi_i \cdot \nabla) \phi_j, \phi_k \rangle$ ,
- $G(l)$  la matrice de taille  $K \times L$  dont les éléments sont  $G(l)_{i,j} = \langle \phi_i \cdot \nabla \psi_j, \psi_l \rangle$ ,
- $a_0$  et  $b_0$  vecteurs de tailles respective  $K$  et  $L$ .

Soit  $\mathbf{X}_R(\mathbf{x}, t) = (a(t), b(t))^T$ , appelé vecteur d'état réduit, le Système (6) se réécrit :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}_R}{dt}(\mathbf{x}, t) + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R(\mathbf{x}, t)) = 0 \\ \mathbf{X}_R(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{X}_{R0}(\mathbf{x}) = (a_0, b_0)^T \end{cases} \quad (7)$$

$\mathbb{M}_R$  est appelé modèle réduit et correspond à la projection de Galerkin de  $\mathbb{M}_C$  sur  $\Phi$  et  $\Psi$ .

## 4 Assimilation variationnelle de données

On décrit succinctement, dans cette section, les principes de l'assimilation variationnelle de données, pour le cas d'un modèle réduit ne dépendant que du temps.

### 4.1 Formulation

Soit  $\mathbf{X}_R$  un vecteur d'état dépendant du temps et défini sur  $[0, T]$ .  $\mathbf{X}_R$  obéit à l'équation :

$$\frac{d\mathbf{X}_R}{dt}(t) + \mathbb{M}_R(\mathbf{X})(t) = \mathcal{E}_m(t) \quad (8)$$

$\mathbb{M}_R$  est supposé différentiable et décrit la dynamique du vecteur d'état  $\mathbf{X}_R$ .  $\mathcal{E}_m$  est l'erreur modèle, qui quantifie l'écart entre la dynamique effective de  $\mathbf{X}_R$  et  $\mathbb{M}_R$ . On considère des observations  $\mathbf{Y}(t)$ , qui sont liées à  $\mathbf{X}_R$  par l'équation d'observation :

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbb{H}\mathbf{X}_R(t) + \mathcal{E}_O(t) \quad (9)$$

$\mathbb{H}$  est la matrice associée à la projection  $(a(t), b(t))^T \rightarrow b(t)^T$ .  $\mathcal{E}_O$  représente l'erreur liée à l'observation. On considère une estimation  $\mathbf{X}_{R,b}$  du vecteur d'état à la date  $t = 0$  :

$$\mathbf{X}_R(0) = \mathbf{X}_{R,b} + \mathcal{E}_b \quad (10)$$

$\mathcal{E}_b$  est l'erreur associée à cette ébauche. L'intégration de  $\mathbf{X}_{R,b}$  sur la fenêtre temporelle  $[0, T]$  permet d'obtenir l'ébauche  $\mathbf{X}_R(t)$ . On fait l'hypothèse que les erreurs  $\mathcal{E}_m$ ,  $\mathcal{E}_O$  et  $\mathcal{E}_b$  sont décorrélées en temps et gaussiennes de moyenne nulle. Elles sont caractérisées par leurs matrices de covariance respectives  $Q$ ,  $R$  et  $B$ .

### 4.2 Méthode variationnelle

On minimise la fonction de coût  $E$  pour estimer  $\mathbf{X}_R$  :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{X}_R) = & \frac{1}{2} \int_{[0,T]} \left( \frac{d\mathbf{X}_R}{dt} + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R) \right)^T Q^{-1} \left( \frac{d\mathbf{X}_R}{dt} + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R) \right) dt \\ & + \frac{1}{2} \int_{[0,T]} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}_R))^T R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}_R)) dt \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{X}_R(0) - \mathbf{X}_{R,b})^T B^{-1} (\mathbf{X}_R(0) - \mathbf{X}_{R,b}) \end{aligned}$$

Cette fonction exprime une contrainte dynamique faible, avec une erreur modèle représentée par le premier terme. Le système d'optimalité à résoudre pour minimiser  $E$  s'obtient en calculant les équations d'Euler-Lagrange :

$$\lambda(T) = 0 \quad (11)$$

$$-\frac{d\lambda}{dt} + \left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial \mathbf{X}} \right)^* \lambda = \mathbb{H}^T R^{-1} (\mathbf{Y} - \mathbb{H}(\mathbf{X}_R)) \quad (12)$$

$$\mathbf{X}_R(0) = B\lambda(0) + \mathbf{X}_{R,b} \quad (13)$$

$$\frac{d\mathbf{X}_R}{dt} + \mathbb{M}_R(\mathbf{X}_R) = Q\lambda(t) \quad (14)$$

avec :

- $\lambda$  : variable adjointe du système (même dimension que  $\mathbf{X}_R$ ),
- $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial \mathbf{X}} \right)$  le modèle tangent linéaire et  $\left( \frac{\partial \mathbb{M}_R}{\partial \mathbf{X}} \right)^*$  son adjoint.

Le calcul du système d'optimalité (Eqs.11 à 14) ainsi que sa résolution par un algorithme incrémental est détaillé dans [1]. Le principe est d'estimer à chaque itération l'ébauche  $\mathbf{X}_{R,b}$ , en ajoutant un incrément  $\delta \mathbf{X}$ , calculé par la méthode adjointe.

**Vecteur d'état** Dans le cas de l'estimation du mouvement, le vecteur d'état est constitué de l'ensemble des coefficients  $a_i$  et  $b_j$  du modèle réduit :  $\mathbf{X}_R(t) = (a_1(t), \dots, b_L(t))^T$ .

**Matrices de covariances d'erreur** Les matrices de covariance d'erreur  $Q$ ,  $R$  et  $B$  proviennent d'une modélisation des erreurs  $\mathcal{E}_m$ ,  $\mathcal{E}_O$  et  $\mathcal{E}_b$  suivant une loi normale. On estime ces matrices à partir des observations pour les  $b_j$  et de la projection sur  $\Phi$  de la séquence  $V$  pour les  $a_i$ .

## 5 Expérience et Résultats

### 5.1 Description de l'expérience jumelle

Une simulation du modèle complet, Équation (2), est réalisée sur une fenêtre temporelle  $[0, T]$ , à partir de conditions initiales  $(\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0), q(\mathbf{x}, 0))$  (voir Figure 1). Une séquence  $(\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}, t))$  est ainsi obtenue. Le choix des dates d'observation  $t_z$  fournit les images  $I^z = q(\mathbf{x}, t_z)$ , utilisées pour calculer la base  $\Psi$ , et les champs  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t_z)$ , nécessaires à l'obtention de la base  $\Phi$ . 4 vecteurs sont conservés pour chaque base ( $K = 4, L = 4$ ). Le modèle réduit (6) est alors défini. Les observations utilisées

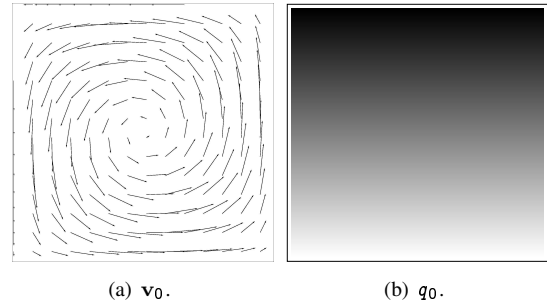


FIG. 1 – Conditions initiales.

pour l'assimilation sont les coefficients de projection  $b_j^{obs}(t_z)$  des acquisitions images  $I^z$ . La première observation est choisie comme ébauche pour  $b$  à la date  $t = 0$ . L'ébauche  $\mathbf{X}_{R,b} = (a_b, b_b)^T$  est donc obtenue par projection de  $(0, I^1)^T$  et vaut  $\mathbf{X}_{R,b} = (0, b^{obs}(t_1))^T$ .

### 5.2 Résultats

Les courbes  $a_i^a$ , obtenues après le processus d'assimilation et les courbes  $a_i^p$ , obtenues par projection de  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  sur  $\Phi$ , sont représentées sur la Figure 2. Les courbes  $a_i^a$  sont très proches

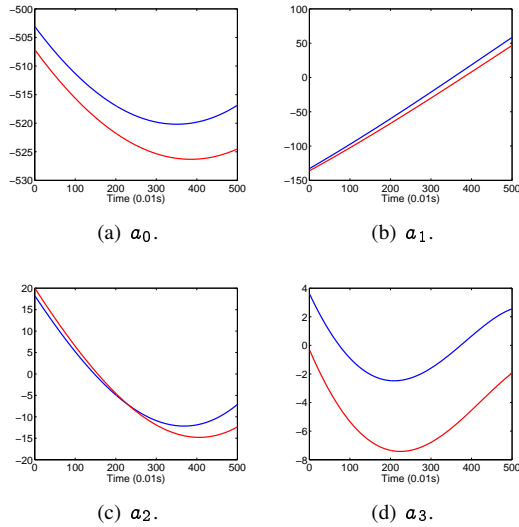


FIG. 2 – Résultats d’assimilation :  $a_i^a$  estimés par assimilation (rouge), projections  $a_i^p$  (bleu).

des courbes  $a_i^p$ . En particulier  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont très bien estimés. L’évolution de  $a_4^a$  est très proche de celle de  $a_4^p$  avec un biais constant de 4. Les courbes  $a_i^a$  obtenues par assimilation permettent ensuite de restituer des champs de vitesses  $\mathbf{v}^a(\mathbf{x}, t)$ . Ces champs sont comparés Figure 3 à la séquence originale  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Quelques statistiques d’erreurs sont fournies Tableau 1 pour différentes dates. Les champs  $\mathbf{v}^a(\mathbf{x}, t)$  approximent avec précision la séquence  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . L’erreur relative en norme et l’erreur angulaire restent inférieures, sur toute la séquence, à 1.9% et 3.70 degrés respectivement.

TAB. 1 – Statistiques d’erreur entre la séquence synthétique  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  et la séquence reconstruite  $\mathbf{v}^a(\mathbf{x}, t)$ .

$t$	Erreurs	
	relative en norme	maximum angulaire
0s	0.011	2.901
2.5s	0.014	2.780
5s	0.019	1.671

### 5.3 Conclusions et perspectives

Dans cet article, nous avons conçu et présenté une méthode d’assimilation de données dans un modèle dynamique réduit. Cette approche permet d’estimer des champs de vitesse à partir d’une séquence d’images discrète. Une expérience jumelle, réalisée sur des données synthétiques, démontre l’intérêt de la méthode. Des tests ont été effectués en ajoutant un bruit additif sur les observations (écart type du bruit à 5% de celui du signal). Ils ont démontré la stabilité des résultats obtenus. Les

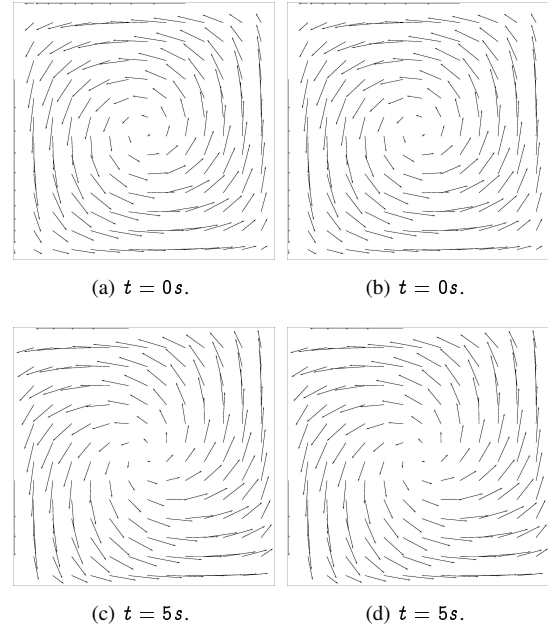


FIG. 3 – Champs de vitesse  $\mathbf{v}^a(\mathbf{x}, t)$  (gauche) estimés comparés aux données synthétiques  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  (droite).

champs de vitesse sont correctement estimés à partir de vecteurs d’état à 8 composantes. Le calcul de la base  $\Phi$  du mouvement utilise une estimation bruitée de la condition initiale  $\mathbf{v}_0$  par un algorithme de traitement d’image. Une perspective de l’étude est donc de réaliser une base robuste  $\Phi$  à partir de  $\mathbf{v}_0$ .

### Références

- [1] Dominique Béréziat and Isabelle Herlin. Solving ill-posed image processing problems using data assimilation. *Numerical Algorithms*, 54, 2011.
- [2] Th. Corpetti, P. Héas, E. Mémin, and N. Papadakis. Variational pressure image assimilation for atmospheric motion estimation. In *Proc. Int. Geoscience and Remote Sensing Symp. (IGARSS’08)*, volume 2, pages 505–508, Boston, MA, July 2008.
- [3] J. D’Adamo, N. Papadakis, E. Mémin, and Artana G. Variational assimilation of POD low-order dynamical systems. *Journal of Turbulence*, 8(9) :1–22, 2007.
- [4] B.K.P. Horn and B.G. Schunk. Determining optical flow. *Artificial Intelligence*, 17 :185–203, 1981.
- [5] M. Loève. *Probability Theory*. Springer-Verlag, 1978.
- [6] N. Papadakis. *Assimilation de données images : application au suivi de courbes et de champs de vecteurs*. PhD thesis, université de Rennes 1, Mention Mathématiques et Applications, 2007.
- [7] O. Titaud, A. Vidard, I. Souopgui, and F.-X. Le Dimet. Assimilation of image sequences in numerical models. *Tellus A*, 62 :30–47, 2010.