Inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs

Aissa Guesmia

Université Paul Verlaine - Metz

LMAM - CNRS UMR 7122

Habilitation à Diriger des Recherches

Spécialité : **Mathématiques**

INEGALITES INTEGRALES ET APPLICATIONS A LA STABILISATION DES SYSTEMES DISTRIBUES NON DISSIPATIFS

Présentée par : **Dr. Aïssa GUESMIA**

Soutenue le 31 Octobre 2006 devant le jury composé de

Fatiha ALABAU-BOUSSOUIRA	
Francis CONRAD	
Jean-Pierre CROISILLE	
Alain HARAUX	**Rapporteur**
Vilmos KOMORNIK	
Mohand MOUSSAOUI	**Rapporteur**
Reinhard RACKE	
Enrique ZUAZUA	**Rapporteur**

à ma femme Saïda
à mon fils Rayan

REMERCIEMENTS

Je tiens tout d'abord à témoigner ma vive reconnaissance au Professeur Vilmos KOMORNIK qui a guidé avec beaucoup d'attention, de gentillesse et de patience mes premiers pas en recherche en tant que directeur de mémoire de DEA et de thèse de doctorat pour tout ce qu'il m'a apporté et m'apporte scientifiquement et humainement, et pour toutes les agréables et fructueuses six années passées ensemble à Strasbourg.

Je tiens aussi à remercier tout particulièrement Fatiha ALABAU-BOUSSOUIRA qui suit mes travaux depuis mes debuts dans la recherche pour tous les précieux conseils et encouragements qu'elle m'a prodigués et me produgue toujours, ainsi pour sa précieuse amitié.

Je voudrais exprimer ma profonde gratitude aux Professeurs Alain HARAUX, Mohand MOUSSAOUI et Enrique ZUAZUA qui m'ont fait l'honneur de rapporter sur mes travaux, je les remercie vivement de leurs disponibilité, de l'attention qu'ils ont portée à ces travaux et d'avoir accepter de consacrer une partie de leur temps à la rédaction de rapports et à la participation au jury.

Je remercie aussi de tout cœur les Professeurs Francis CONRAD, Jean-Pierre CROISILLE et Reinhard RACKE d'avoir accepté volontiers de dégager une partie de leur temps pour faire partie de ce jury. J'en suis flatté et je leur exprime toute ma reconnaissance.

Je suis très heureux de témoigner toute mon amitié à tous les membres de l'équipe EDP (que, malheureusement, je ne peux pas les citer tous), en particulier ma collègue de bureau Renata Bunoiu, de m'avoir chaleureusement accueilli quand je suis arrivé en 2001 et gentiment aidé et permis de m'intégrer au sein de l'équipe et de passer des années agréables et enrichissantes.

Tous mes remerciements également à tout le personnel administratif et technique de notre laboratoire de leurs disponibilité et dévouement qui nous permettent de travailler dans un excellent environnement scientifique et humain.

Un grand merci à tous mes collègues, à tous mes amis et à tous ceux qui m'ont aidé un jour.

Enfin, et à ce stade, ils doivent déjà se sentir oubliés, je pense à ma mère, mon père, mes sœurs, mes frères et toute ma famille. Leurs amour, affection et soutient sont au-dessus de tous les remerciements. J'espère être toujours digne de leur confiance et à la hauteur de leurs attentes.

Et pour finir, je pense à mes grands, uniques, préférés et favoris collaborateurs (dans tous les domaines) : ma femme Saïda et mon fils Rayan.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

PARTIE 1. Après avoir rappelé quelques inégalités intégrales connues et largement appliquées à la stabilisation des systèmes *dissipatifs*, on montre tout d'abord quelques inégalités intégrales nouvelles permettant d'obtenir une estimation sur le comportement à l'infini d'une fonction positive *non nécessairement décroissante*. Ceci étend des inégalités intégrales dues à A. Haraux [28, 29], V. Komornik [38], P. Martinez [56], M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise [26] et F. Alabau-Boussouira [1] concernant des fonctions *décroissantes*. Ensuite on donne des applications à la stabilisation (interne ou frontière) de certains systèmes distribués *non dissipatifs*.

Chapitre 1. Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes *dissipatifs* sont basés sur le lemme suivant, dû à A. Haraux [28, 29], V. Komornik [38] et P. Martinez [56] :

Lemme 0.1. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ (où $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$) une fonction continue décroissante et $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante de classe C^1 telle que*

$$\phi(0) = 0 \quad et \quad \lim_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty. \tag{0.1}$$

Supposons qu'il existe $r \geq 0$ et $d > 0$ tels que

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t) E^{r+1}(t)\, dt \leq \frac{1}{d} E^r(0) E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{0.2}$$

Alors E vérifie les estimations de décroissance suivantes :

$$E(t) \leq E(0) e^{1 - d\phi(t)} \quad si \quad r = 0, \tag{0.3}$$

$$E(t) \leq E(0) \Big(\frac{1 + r}{1 + rd\phi(t)} \Big)^{\frac{1}{r}} \quad si \quad r > 0. \tag{0.4}$$

Ce lemme a été démontré et utilisé par A. Haraux [28] dans le cas $r = 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour l'étude de la stabilisation de certains problèmes linéaires *dissipatifs*. A. Haraux [29] a démontré aussi le Lemme 0.1 dans le cas particulier $r = \frac{1}{2}$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ et V. Komornik [38] l'a généralisé au cas $r > 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour étudier la stabilisation des problèmes *dissipatifs* non nécessairement linéaires. V. Komornik [38] a démontré aussi l'optimalité de (0.3) et (0.4) dans ce cas-là.

Quand $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$, la fonction E est forcément intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et converge vers zéro au moins polynômialement. En utilisant un changement de variables, P. Martinez [56] a démontré (0.3) et (0.4) ce qui lui a permis de considérer des fonctions *décroissantes* qui convergent vers zéro plus lentement que $t \mapsto \frac{1}{(t+1)^p}$ pour tout $p > 0$ (comme par exemple, $E(t) = \frac{1}{\ln(t+2)}$).

Dans l'objectif de trouver une formule générale qui permet d'obtenir un taux de décroissance de l'énergie de certains systèmes hyperboliques *dissipatifs* en fonction du comportement au voisinage de zéro du terme de dissipation (ce qui permet d'unifier tous les cas et notamment ceux pour lesquels le feedback croît polynômialement et ceux pour lesquels il s'écrase exponentiellement en zéro lorsque t tend vers l'infini), M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise [26] et F. Alabau-Boussouira [1] ont considéré le cas (plus général que (0.2)) d'une fonction *décroissante* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\, dt \leq \frac{1}{d} E(s), \quad \forall s \geq 0$$

où d est un réel strictement positif et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$ et ils ont montré, pour un $t_0 > 0$ et une fonction $h : [t_0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ définie explicitement en fonction de φ, que

$$E(t) \leq h(t), \quad \forall t \geq t_0. \tag{0.5}$$

En combinant la méthode des multiplicateurs et les techniques d'analyse micro-locale développées par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [8], I. Lasiecka et D. Tataru [50] et I. Lasiecka et R. Triggiani [51] ont traité le cas de l'équation des ondes *dissipative* (avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur le bord) sous des hypothèses géométriques plus générales avec un feedback non linéaire sans hypothèse de croissance à l'origine. Le taux de décroissance obtenu pour l'énergie dépend de celui d'une équation différentielle; plus précisément, ils ont déduit l'estimation (0.5) pour $h(t) = h_1(\frac{t}{t_0} - 1)$ où h_1 est la solution de l'équation différentielle

$$h_1'(t) + q(h_1(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad h_1(0) = E(0)$$

et q est une fonction qui fait intervenir implicitement la nonlinéarité du feedback en montrant que E vérifie

$$(Id - q)^{-1}\Big(E((m+1)t_0)\Big) \leq E(mt_0), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

La décroissance de E joue un rôle crucial dans la démonstration de (0.3), (0.4) et (0.5). Or, dans l'étude de la stabilisation des divers systèmes distribués, on tombe sur une fonction positive *non nécessairement décroissante*, l'obtention d'une estimation de stabilisation dans une telle situation est l'objectif principal de cette partie.

Chapitre 2. On donne ici de nouvelles inégalités intégrales qui généralisent dans plusieurs directions celles citées dans le paragraphe précédent.

Lemme 0.2. *Soient* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction dérivable,* $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ *(où* $\mathbb{R}^{+*} =]0, +\infty[$*) et* $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *deux fonctions continues. Soit*

$$\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau.$$

Supposons qu'il existe $r \geq 0$ *tel que*

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)\, dt \leq a(s)E(s), & \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda(t)E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{0.6}$$

Alors E *vérifie, pour tout* $t \geq 0$*, les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)}\omega(h(t))e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))}e^{-\int_0^{h(t)}\omega(\tau)\, d\tau} \quad si\ r = 0, \tag{0.7}$$

$$E(t) \leq \omega(h(t))e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))}\Big(\big(\frac{\omega(0)}{E(0)}\big)^r + r\int_0^{h(t)}(\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau\Big)^{\frac{-1}{r}} \quad si\ r > 0 \tag{0.8}$$

où $\omega = \frac{1}{a}$ *et* g, $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *sont deux fonctions définies par :*

$$(\omega(s))^{r+1}\int_s^{g(s)} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \tag{0.9}$$

$$= e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)}\Big(\big(\frac{\omega(0)}{E(0)}\big)^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau\Big),$$

$$h(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \in [0, g(0)], \\ \max g^{-1}(\{t\}) & si \quad t \in]g(0), +\infty[. \end{cases} \tag{0.10}$$

Commentaire. Le Lemme 0.2 donne des estimations précises ((0.7) et (0.8)) sur le comportement de E, ces estimations sont définies à partir d'une fonction g qui est la solution d'une équation intégrale. Mais les estimations (0.7) et (0.8) restent vraies pour toute fonction h positive vérifiant :

$$h(t) < t \quad \text{sur} \quad]T_0, +\infty[$$

pour un certain $T_0 > 0$ (voir Chapitre 2). Donc pour des choix simples de h, on obtient des estimations moins fortes que (0.7) et (0.8) mais qui sont aisément calculables.

Dans le lemme suivant on considère des hypothèses plus générales que (0.6) en incluant le cas d'une perturbation du second membre.

Lemme 0.3. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $a_3 \in \mathbb{R}^+$, a_1, $a_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ trois fonctions continues. Supposons qu'il existe r, $p \geq 0$ tels que*

$$a_3(r+1) \sup_{t \geq 0} \{\lambda(t)\} < 1, \tag{0.11}$$

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t)\, dt \leq a_1(s)E(s) + a_2(s)E^{p+1}(s) + a_3 E^{r+1}(T), \\ E'(t) \leq \lambda(t)E(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{0.12}$$

Alors E vérifie (0.7) et (0.8) où $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$, $\omega = \frac{1}{a}$ et a est une fonction dépendant des différentes données.

Dans le cas particulier où λ et a_i sont des constantes, le Lemme 0.3 donne le résultat suivant qui sera largement appliqué dans les chapitres 3, 4 et 5.

Lemme 0.4. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ et a_3, r, p, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ des réels fixés. Supposons que*

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t)\, dt \leq a_1 E(s) + a_2 E^{p+1}(s) + a_3 E^{r+1}(T), \quad \forall 0 \leq s \leq T, \\ E'(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{0.13}$$

Si $a_3\lambda(r+1) < 1$, il existe deux constantes strictement positives c et ω telles que

$$E(t) \leq c e^{-\omega t} \quad \text{si} \quad r = 0, \tag{0.14}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-1}{r}} \quad \text{si} \quad r > 0 \text{ et } \lambda = 0, \tag{0.15}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad \text{si} \quad r > 0 \text{ et } \lambda > 0. \tag{0.16}$$

A la fin de ce chapitre, on considère le cas général

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\,dt \le E(s), & \forall s \ge 0, \\ E'(t) \le \lambda E(t), & \forall t \ge 0 \end{cases}$$

où λ est un réel positif et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction convexe strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$, et on montre (0.5) où h est une fonction définie explicitement en fonction de φ et de λ. Ceci unifie, améliore dans certains cas et généralise au cas non dissipatif tous les cas considérés auparavant dans la littérature.

Chapitre 3. On applique maintenant les résultats du Chapitre 2 pour démontrer des estimations de stabilisation de certains systèmes distribués non dissipatifs. On commence par considérer l'équation des ondes avec un terme perturbant d'ordre 1 soumises à un feedback interne

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) + g(u') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{$P1$}$$

ou frontière

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + g(u') = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{$P1'$}$$

où Ω est un ouvert borné assez régulier de $\mathbb{R}^n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$ dans toute la suite) de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ est la partition usuelle de Γ, f, $g \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ sont deux fonctions croissantes, $f(0) = g(0) = 0$, $h \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ vérifiant, pour $\hat{\zeta} \in \mathbb{R}^n$, α, β, $q \ge 0$, c_1, $c_2 > 0$ et $r \ge 1$ avec $(n-2)q \le n$:

$$|f(s_1) - f(s_2)| \le \alpha(1 + |s_1|^q + |s_2|^q)|s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R},$$

$$\|\nabla h\|_\infty < \infty, \quad |h(\zeta) + \hat{\zeta} \cdot \zeta| \le \beta|\zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n,$$

$$c_1 \min\{|s|, |s|^r\} \le |g(s)| \le c_2 \max\{|s|^{\frac{1}{r}}, |s|\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Dans tous les systèmes considérés dans cette thèse, $\cdot$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$; $'$ désigne la dérivée par rapport à t; ν désigne le vecteur normal unitaire extérieur à Ω; ∂_y désigne la dérivée par rapport à y; Δ et ∇ représentent respectivement le laplacien et le gradient par rapport à la variable de l'espace; $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$; et $\|\cdot\|_\infty$ désigne la norme de la convergence uniforme sur Ω, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$.

Le vecteur $\hat{\zeta}$ représente la partie linéaire de h (qui pose moins de difficultés pour la stabilisation que la partie non linéaire).

En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, on peut montrer que, pour tout $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ (où $H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma\}$),

$$\exists!\, u \in C(]0, +\infty[; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(]0, +\infty[; L^2(\Omega)).$$

Problème de stabilisation. L'énergie usuelle est définie par :

$$E(t) = \int_\Omega \Big(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u)\Big)\, dx + \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma$$

où $F(s) = \int_0^s f(\sigma)\, d\sigma \geq 0$.

Dans le cas où $h = 0$, la stabilisation de $(P1)$ et $(P1')$ a été largement étudiée, voir par exemple J. E. Lagnese [45, 46], R. Triggiani [81], A. Haraux [29], V. Komornik [36-39], E. Zuazua [84-87], V. Komornik et E. Zuazua [44], M. Nakao [64-67], S. Nicaise [69], P. Pucci et J. Serrin [71] et I. Lasiecka et D. Tataru [50].

Dans tous ces travaux, $(P1)$ et $(P1')$ sont *dissipatifs*; autrement dit, les énergies de $(P1)$ et $(P1')$ vérifient respectivement :

$$E'(t) = -2\int_\Omega u' g(u')\, dx \leq 0 \quad \text{et} \quad E'(t) = -2\int_{\Gamma_1} u' g(u')\, d\Gamma \leq 0,$$

et les résultats de stabilité suivants ont été obtenus (pour $c, \omega > 0$) :

$$\begin{cases} E(t) \leq cE(0)e^{-\omega t} & \text{si } \ \text{r=1 (stabilité exponentielle),} \\ E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-2}{r-1}} & \text{si } \ \text{r}\in]1, +\infty[\text{ (stabilité polynômiale).} \end{cases} \tag{0.17}$$

Dans le cas où $h \neq 0$, $(P1)$ et $(P1')$ ne sont pas nécessairement dissipatifs car

$$E'(t) = -2\int_\Omega u' g(u')\, dx - 2\int_\Omega u' h(\nabla u)\, dx$$

dans le cas de $(P1)$, et dans le cas de $(P1')$,

$$E'(t) = -2\int_{\Gamma_1} u' g(u')\, d\Gamma - 2\int_\Omega u' h(\nabla u)\, dx.$$

Donc le Lemme 0.1 ne peut pas être appliqué.

En appliquant le Lemme 0.4, on montre, sous certaines hypothèses supplémentaires, les résultats de stabilité suivants :

Cas 1 : $\beta = 0$. On montre le théorème suivant :

Théorème 0.5. *L'énergie équivalente*

$$E(t) = \int_\Omega e^{\hat{\zeta}\cdot x}\left(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u)\right)dx + \int_{\Gamma_1} e^{\hat{\zeta}\cdot x}|u|^2 d\Gamma$$

vérifie (0.17).

Cas 2 : $\beta > 0$. On montre le théorème suivant :

Théorème 0.6. *Supposons que $r = 1$ et β est assez petit. Alors l'énergie équivalente vérifie (stabilité exponentielle ou uniforme) :*

$$E(t) \leq ce^{-\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{0.18}$$

Chapitre 4. On considère dans ce chapitre l'équation des ondes avec conditions aux limites de type mémoire suivante :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + F(x,t,u,\nabla u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u + \int_0^t g(t-s)\partial_\nu u(s)ds = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{$P2$}$$

où F et g sont deux fonctions données vérifiant certaines hypothèses.

La stabilisation uniforme et polynômiale de $(P2)$, sous des hypothèses plutot restrictives sur g et F, est déjà démontrée par de nombreux chercheurs (voir M. M. Cavalcanti, N. A. Lar'kin et J. A. Soriano [17] et ses références).

En utilisant notre Lemme 0.4 et en introduisant une énergie équivalente, on généralise et on améliore les résultats existants en donnant des estimations générales qui relient la décroissance de g et le comportement de la solution à l'infini. Dans le cas particulier où g est exponentiellement ou polynômialement décroissante, on montre la même propriété pour la solution.

Chapitre 5. La méthode introduite et développée dans les chapitres 2, 3 et 4 est directe et très flexible; elle peut être appliquée à des problèmes non dissipatifs variés (élasticité, thermo-élasticité, systèmes couplés, coefficients variables, $\cdots$), soumis à un feedback interne ou frontière, dans le but de généraliser et d'améliorer des estimations différentes de stabilité (connues dans le cas dissipatif).

On donne dans ce chapitre quelques applications à la stabilisation de certains systèmes non dissipatifs : équation générale des ondes, système de Petrovsky, système général d'élasticité, coefficients variables, systèmes couplés.

PARTIE 2. La stabilisation des systèmes couplés soumis à un seul feedback (stabilisation indirecte) a suscité l'intérêt de nombreux auteurs ces dernières années. Les résultats les plus récents dans cette direction sont ceux obtenus par F. Alabau-Boussouira [2] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3] où des estimations polynômiales (dépendant de la régularité des solutions) ont été démontrées pour quelques systèmes hyperboliques linéaires faiblement couplés. Ces résultats sont basés sur le Théorème 0.7 obtenu par F. Alabau-Boussouira [2] (sous une forme moins générale) et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3].

L'objectif de cette partie est d'étendre le Théorème 0.7 au cas de systèmes *non linéaires* ou *non dissipatifs* et de donner deux applications à la stabilisation indirecte par un feedback non linéaire localement distribué et dégénéré ainsi qu' à la stabilisation d'un système couplé de deux équations des ondes générales.

Chapitre 6. Soient $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu $e^{t\mathcal{A}}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ son domaine et $E \in C(\mathcal{H}, \mathbb{R}^+)$ une fonction donnée. Pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, on note : $E_0(t) = E(t) = E(\mathcal{U}(t))$ et $E_k(t) = E(\mathcal{U}^{(k)}(t))$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Les résultats de F. Alabau-Boussouira [2] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3] sont basés sur le théorème suivant :

Théorème 0.7. *Supposons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire. Supposons qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante positive c tels que*

$$\int_0^T E(t)\,dt \leq c\sum_{k=0}^{m} E_k(0), \quad \forall T \geq 0, \quad \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m).$$

Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{nm})$

$$\int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!} E(t)\,dt \leq c^n (1+m)^{n-1} \sum_{k=0}^{nm} E_k(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T.$$

Si, de plus, E est décroissante pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{nm})$

$$E(t) \leq c^n(1+m)^{n-1}\frac{n!}{t^n}\sum_{k=0}^{nm} E_k(0), \quad \forall t > 0.$$

F. Alabau-Boussouira a considéré dans [2] le problème de la stabilisation de quelques systèmes hyperboliques *dissipatifs* couplés par un seul feedback frontière *linéaire*. En montrant le Théorème 0.7, l'auteur de [2] a obtenu des estimations polynômiales qui dépendent de la régularité des solutions. Les mêmes estimations ont été démontrées par F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3] dans le cas d'un feedback interne. Or, si le système *n'est pas dissipatif* (comme dans le cas de deux constantes de couplage différentes) ou si le feedback est *non linéaire*, ces résultats ne sont plus applicables. L'objectif des chapitres 7-9 est d'étendre ces résultats, entre autres, dans ces cas précis.

Chapitre 7. On montre dans ce chapitre deux théorèmes qui permettent d'obtenir quelques estimations (polynômiales par exemple) de stabilité indirecte de certains systèmes couplés (le système est contrôlé par une seule équation). Ces deux théorèmes généralisent le Théorème 0.7 dans plusieurs directions.

On considère les mêmes notations utilisées dans le Chapitre 6. On présente les théorèmes 0.8 et 0.9 qui permettent de traiter le cas *non linéaire* et le cas *non dissipatif* respectivement.

Théorème 0.8. *Supposons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire et que la fonction E est décroissante. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+)$ une fonction dérivable, décroissante et strictement positive telle qu'il existe $a_1 \geq a_2 > 0$ vérifiant : pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, il existe $a > 0$ tel que*

$$\int_S^T f(t)E^{a_1}(t)\,dt \leq a f(S)E^{a_2}(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \tag{0.19}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, il existe $\bar{a}, \hat{a} > 0$ tels que

$$(E(T))^{(n-1)(a_1-a_2)}\int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!}f(t)E^{a_1}(t)\,dt \tag{0.20}$$

$$\leq \bar{a} f(S)E^{a_2}(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T,$$

$$E(t) \le \hat{a}\Big(\frac{E^{a_2}(0)}{f(t)t^n}\Big)^{\frac{1}{na_1-(n-1)a_2}}, \quad \forall t > 0. \tag{0.21}$$

Théorème 0.9. *Supposons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire et que la fonction E est dérivable. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+)$ une fonction dérivable, décroissante et strictement positive telle qu'il existe a_0, a_1, $a_2 \ge 0$ et $m \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\lim_{t\to+\infty} \frac{a_0 a_2}{f(t)} < 1$ et*

$$\int_0^T f(t)E(t)\,dt \le a_1 \sum_{k=0}^m E_k(0) + a_2 E(T), \quad \forall T \ge 0, \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m),$$

$$E'(t) \le a_0 E(t), \quad \forall t \ge 0, \forall U^0 \in \mathcal{H}.$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\bar{a}$, $\hat{a} > 0$ tels que

$$\int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)E(t)\,dt \le \bar{a} f(S) \sum_{k=0}^{mn} E_k(S), \quad \forall 0 \le S \le T, \ \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}),$$

$$E(t) \le \hat{a}\Big(\sum_{k=0}^{mn} E_k(0)\Big)\frac{a_0 t + 1}{f(t)t^n}, \quad \forall t > 0, \ \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}).$$

Remarques. 1. Si $\mathcal{A}$ est non linéaire, on obtient les résultats du Théorème 0.8 et du Théorème 0.9 uniquement pour $n = 1$.

2. Si $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = 1$ et $f(t) = 1$, les résultats du Théorème 0.8 et du Théorème 0.9 coïncident avec ceux du Théorème 0.7.

Chapitre 8. On donne maintenant une application du Théorème 0.8 à la stabilisation par un feedback localement distribué et dégénéré de deux équations des ondes faiblement couplées.

Dans toute la suite, c_0 désigne la plus petite constante vérifiant (inégalité de Poincaré) :

$$\int_\Omega |v|^2\,dx \le c_0 \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{0.22}$$

On considère maintenant le système couplé suivant :

$$\begin{cases} u_1'' - \Delta u_1 + \alpha u_2 + a(x)g(u_1') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_2'' - \Delta u_2 + \alpha u_1 = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_1 = u_2 = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x), \ i = 1,2 & \Omega \end{cases} \tag{P9}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \in \mathbb{N}^*$ dans toute la suite) est un ouvert borné assez régulier, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $a \in C(\Omega)$ et $g \in C^1(\mathbb{R})$ vérifiant : $0 < |\alpha| < \frac{1}{c_0}$ et, pour d_1, $d_2 > 0$,

$$d_2 \leq g'(s) \leq d_1 \quad \text{et} \quad d_2|s| \leq |g(s)| \leq d_1|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{0.23}$$

$$a(x) > 0, \quad \forall x \in \omega \quad \text{et} \quad a(x) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega \tag{0.24}$$

où ω et Ω vérifient les mêmes hypothèses géométriques considérées dans [9, 10] par A. Beyrath.

Le problème $(P9)$ est bien posé (voir A. Beyrath [9, 10]) au sens suivant. On pose :

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et on définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = (-v_3, -v_4, -\Delta v_1 + \alpha v_2 + a(x)g(v_3), -\Delta v_2 + \alpha v_1)^T$$

et $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$. Le problème $(P9)$ peut être reformulé sous la forme abstraite :

$$U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{et} \quad U = (u_1, u_2, u_1', u_2')^T.$$

Pour tout $U^0 = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H}$, le système $(P9)$ admet une unique solution $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Si $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, la solution $U \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Si g est linéaire et $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, la solution U vérifie :

$$U \in \cap_{k=0}^n C^{n-k}(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A}^k)).$$

L'énergie de $(P9)$ est définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|u_1'|^2 + |u_2'|^2 + |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + 2\alpha u_1 u_2)\, dx,$$

et on a :

$$E(t) \geq \frac{1}{2}(1 - |\alpha| c_0) \int_\Omega (|u_1'|^2 + |u_2'|^2 + |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2)\, dx,$$

$$E'(t) = -\int_\Omega a(x) u_1' g(u_1')\, dx \leq 0. \tag{0.25}$$

On sait que

1. $(P9)$ n'est jamais exponentiellement stable (voir F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3]).

2. Si g est linéaire, $|\alpha|$ est assez petit et $a(x) \geq \delta > 0$, $\forall x \in \omega$ (cas non dégénéré), alors (voir A. Beyrath [9, 10])

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n) :\ E(t) \leq ct^{-n},\ \forall t > 0,$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0.$$

Dans ce chapitre, on s'intéresse au cas dégénéré en supposant que

$$\exists p > 0 :\ \int_\omega a^{-p}(x)\, dx < +\infty \tag{0.26}$$

et on montre les résultats de stabilité suivants :

Théorème 0.10. *Soient $|\alpha|$ assez petit et*

$$r = \begin{cases} \frac{N}{2p} & si\ N \geq 3, \\ \frac{1+\epsilon_0}{p} & si\ N = 1, 2\ (\epsilon_0 > 0\ quelconque). \end{cases}$$

Alors il existe une constante $c > 0$ (qui ne dépend que des données initiales, et ce, de manière continue) telle que

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) :\ E(t) \leq \begin{cases} ct^{-\frac{1}{r+1}} & si\ r < 1, \\ ct^{-\frac{1}{r}} & si\ r \geq 1, \end{cases} \quad \forall t > 0, \tag{0.27}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0. \tag{0.28}$$

Si g est linéaire, alors pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $(u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$

$$E(t) \leq ct^{-\frac{n}{n(r+1)-(n-1)\min\{1,r\}}}, \quad \forall t > 0. \tag{0.29}$$

Remarque. En utilisant les techniques de P. Martinez [56] et en appliquant le Théorème 0.8, on peut affaiblir (0.23) en supposant l'inégalité $d_2|s| \leq |g(s)|$ uniquement pour $|s| \geq 1$ et montrer que

$$E(t) \leq c\Big(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\Big)^{\frac{-1}{r+1}}, \quad \forall t > 0$$

où f est une fonction qui dépend uniquement de g. D'après les hypothèses sur f dans le Théorème 0.8, cette estimation est plus faible que (0.27).

Chapitre 9. On considère dans ce chapitre un système couplé de deux équations des ondes générales avec deux termes perturbants d'ordre 1 dont la première équation est soumise à un feedbak interne. L'objectif est de démontrer quelques estimations polynômiales de stabilité en appliquant le Théorème 0.9. Soit le système couplé suivant :

$$\begin{cases} u_1'' - A_1u_1 - (\nabla\phi_1)\cdot(D_1u_1) + \beta_1u_1 + \alpha_2u_2 + g(u_1') = 0 & \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u_2'' - A_2u_2 - (\nabla\phi_2)\cdot(D_2u_2) + \beta_2u_2 + \alpha_1u_1 = 0 & \Omega\times\mathbb{R}^+, \\ u_1 = u_2 = 0 & \Gamma\times\mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x),\ i = 1,2 & \Omega \end{cases} \tag{$P10$}$$

où $g \in C^1(\mathbb{R})$, ϕ_1, $\phi_2 \in C^1(\bar{\Omega})$, α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in C(\bar{\Omega})$,

$$A_1u_1 = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j}u_1) \quad \text{et} \quad A_2u_2 = \sum_{i,j=1}^{N} \partial_{x_i}(b_{ij}(x)\partial_{x_j}u_2)$$

avec des coefficients a_{ij}, $b_{ij} \in C^1(\bar{\Omega})$ tels que

$$\exists d_1,\, d_2 > 0 :\ d_2 \le g'(s) \le d_1 \quad \text{et} \quad d_2|s| \le |g(s)| \le d_1|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x),\ b_{ij}(x) = b_{ji}(x), \quad \forall i,j \in \{1,\cdots,N\},\ \forall x \in \Omega,$$

$$\exists \lambda_1,\, \lambda_2 > 0 :\ \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda_1|\xi|^2,\ \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda_2|\xi|^2,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N,\ \forall x \in \Omega,$$

$$\inf_{\Omega} \beta_1 > -\frac{\lambda_1}{c_0} \quad \text{et} \quad \inf_{\Omega} \beta_2 > -\frac{\lambda_2}{c_0},$$

$$\max\{\|\alpha_1\|_\infty, \|\alpha_2\|_\infty\} \text{est assez petit} \quad \text{et} \quad \inf_{\Omega} |\alpha_2| > 0.$$

Ici on utilise les notations :

$$D_1u_1 = \Big(\sum_{j=1}^{N} a_{1j}(x)\partial_{x_j}u_1, \cdots, \sum_{j=1}^{N} a_{Nj}(x)\partial_{x_j}u_1\Big),$$

$$D_2u_2 = \Big(\sum_{j=1}^{N} b_{1j}(x)\partial_{x_j}u_2, \cdots, \sum_{j=1}^{N} b_{Nj}(x)\partial_{x_j}u_2\Big).$$

On peut montrer (exactement de la même façon que pour le problème $(P9)$) que le problème $(P10)$ est bien posé au sens suivant. On note :

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega)$$

et on définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))\times H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = (-v_3, -v_4, -A_1v_1 - (\nabla\phi_1)\cdot(D_1v_1) + \beta_1v_1 + \alpha_2v_2 + g(v_3),$$
$$-A_2v_2 - (\nabla\phi_2)\cdot(D_2v_2) + \beta_2v_2 + \alpha_1v_1)^T$$

et $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$.

Le problème $(P10)$ peut être reformulé sous la forme abstraite :

$$U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{et} \quad U = (u_1, u_2, u_1', u_2')^T.$$

Pour tout $U^0 = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H}$, le système $(P10)$ admet une unique solution $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Si $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, la solution U est plus régulière et elle appartient à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Si g est linéaire et $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, la solution U vérifie :

$$U \in \cap_{k=0}^n C^{n-k}(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A}^k)).$$

On définit l'énergie (équivalente) de $(P10)$ par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_1}\Big(|u_1'|^2 + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1 + \beta_1|u_1|^2\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_2}\Big(|u_2'|^2 + \sum_{i,j=1}^N b_{ij}(x)\partial_{x_i}u_2\partial_{x_j}u_2 + \beta_2|u_2|^2\Big)\,dx + \int_\Omega \alpha_1 e^{\phi_2}u_1u_2\,dx.$$

On sait que

1. $(P10)$ n'est jamais exponentiellement stable (voir F. Alabau-Boussouira [2] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3]).

2. Si g est linéaire, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \text{const}$, alors (voir F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3]) : soit $m = 1$ si $A_1 = A_2$, et $m = 2$ sinon. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall(u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}) :\ E(t) \le ct^{-n},\ \forall t > 0,$$

$$\forall(u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0.$$

On montre ici les résultats de stabilité indirecte suivants :

Théorème 0.11. *Soit m un entier tel que $m = 1$ si $A_1 = A_2$, et $m = 2$ sinon.*

1. Si g est linéaire et $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$, il existe $c > 0$ (ne dépendant pas de $(u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1)$) vérifiant, pour tout $t > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}) : \, E(t) \leq c\Big(\sum_{k=0}^{mn} E_k(0)\Big) t^{-n}, \tag{0.30}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} : \, E(t) \to 0. \tag{0.31}$$

2. Si g est non linéaire et $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$, les estimations (0.30) pour $n = 1$ et (0.31) sont satisfaites.

3. Si $A_1 = A_2$ et g est linéaire tel que $\|\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1}\|_\infty$ est assez petit, alors il existe $c > 0$ (ne dépendant pas de $(u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1)$) vérifiant, pour tout $t > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{n}) : \, E(t) \leq c\Big(\sum_{k=0}^{n} E_k(0)\Big) t^{-n+1}, \tag{0.32}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} : \, E(t) \to 0. \tag{0.33}$$

PARTIE 1

STABILISATION DIRECTE

CHAPITRE 1

Rappels de quelques inégalités intégrales connues

On rappelle dans ce chapitre quelques inégalités intégrales connues et largement appliquées à la stabilisation des systèmes distribués d'évolution *dissipatifs.*

Les résultats de nombreux auteurs concernant l'estimation de décroissance de l'énergie de certains problèmes *dissipatifs* sont basés sur le lemme suivant, dû à A. Haraux [28, 29], V. Komornik [38] et P. Martinez [56] :

Lemme 1.1. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante et $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante de classe C^1 telle que*

$$\phi(0) = 0 \quad et \quad \lim_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty. \tag{1.1}$$

Supposons qu'il existe $r \geq 0$ et $d > 0$ tels que

$$\int_s^{+\infty} \phi'(t) E^{r+1}(t)\, dt \leq \frac{1}{d} E^r(0) E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{1.2}$$

Alors E vérifie les estimations de décroissance suivantes :

$$E(t) \leq E(0) e^{1 - d\phi(t)} \quad si \quad r = 0, \tag{1.3}$$

$$E(t) \leq E(0) \Big(\frac{1+r}{1 + rd\phi(t)} \Big)^{\frac{1}{r}} \quad si \quad r > 0. \tag{1.4}$$

Ce lemme a été démontré et utilisé par A. Haraux [28] dans le cas $r = 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour l'étude de la stabilisation de certains problèmes linéaires *dissipatifs.* A. Haraux [29] a démontré aussi le Lemme 1.1 dans le cas particulier $r = \frac{1}{2}$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ et V. Komornik [38] l'a généralisé au cas $r > 0$ et $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$ pour étudier la stabilisation des problèmes *dissipatifs* non nécessairement linéaires. V. Komornik [38] a démontré aussi l'optimalité de (1.3) et (1.4) dans ce cas-là.

Quand $\phi(t) = t$ sur $\mathbb{R}^+$, la fonction E est forcément intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et converge vers zéro au moins polynômialement. En utilisant un changement de variables, P. Martinez [56] a démontré (1.3) et (1.4) ce qui lui a permis de considérer des fonctions *décroissantes* qui convergent vers zéro plus lentement que $t \mapsto \frac{1}{(t+1)^p}$ pour tout $p > 0$ (comme par exemple, $E(t) = \frac{1}{\ln(t+2)}$).

En combinant la méthode des multiplicateurs et les techniques d'analyse micro-locale développées par C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [8], I. Lasiecka et D. Tataru [50] et I. Lasiecka et R. Triggiani [51] ont traité le cas de l'équation des ondes *dissipative* (avec des conditions de Dirichlet ou de Neumann sur le bord) sous des hypothèses géométriques plus générales avec un feedback non linéaire sans hypothèse de croissance à l'origine. Le taux de décroissance obtenu pour l'énergie dépend de celui d'une équation différentielle; plus précisément, ils ont déduit l'estimation

$$E(t) \leq h(\frac{t}{t_0} - 1), \quad \forall t \geq t_0 \tag{1.5}$$

où $t_0 > 0$, h est la solution de l'équation différentielle

$$h'(t) + q(h(t)) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et} \quad h(0) = E(0) \tag{1.6}$$

et q est une fonction qui fait intervenir implicitement la nonlinéarité du feedback en montrant que E vérifie

$$(Id - q)^{-1}\Big(E((m+1)t_0)\Big) \leq E(mt_0), \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Dans l'objectif de trouver une formule générale qui permet d'obtenir un taux de décroissance de l'énergie de certains systèmes hyperboliques *dissipatifs* en fonction du comportement au voisinage de zéro du terme de dissipation (ce qui permet d'unifier tous les cas et notamment ceux pour lesquels le feedback croît polynômialement et ceux pour lesquels il s'écrase exponentiellement en zéro lorsque t tend vers l'infini), M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise [26] et F. Alabau-Boussouira [1] ont considéré le cas d'une fonction *décroissante* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ vérifiant :

$$\int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\, dt \leq \frac{1}{d} E(s), \quad \forall s \geq 0 \tag{1.7}$$

où d est un réel strictement positif et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est une fonction convexe et strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$ et ils ont montré les résultats suivants :

Lemme 1.2 (M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise [26]). *Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante vérifiant (1.7). Alors il* *existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 et c_1 tels que*

$$E(t) \leq \varphi^{-1}\Big(\frac{\psi^{-1}(c_0 t)}{c_1 t}\Big), \quad \forall t \geq t_0 \tag{1.8}$$

où $\psi : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\psi(s) = \int_s^1 \frac{1}{\varphi(t)}\, dt, \quad \forall s > 0. \tag{1.9}$$

Lemme 1.3 (F. Alabau-Boussouira [1]). *Soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue décroissante vérifiant (1.7) avec*

$$\varphi(t) = tF^{-1}(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{1.10}$$

et $F : \mathbb{R}^+ \to [0, b[$ est une fonction strictement croissante vérifiant, pour un réel $b > E(0)$,

$$F(0) = 0 \quad et \quad \lim_{t \to +\infty} F(t) = b.$$

Alors il existe trois réels strictement positifs t_0, c_0 et c_1 tels que

$$E(t) \leq F\Big(\frac{1}{\psi^{-1}(c_0 t)}\Big), \quad \forall t \geq t_0 \tag{1.11}$$

où $\psi : [c_0 t_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\psi(s) = s + \int_{F(\frac{1}{s})}^{c_1} \frac{1}{\varphi(t)}\, dt, \quad \forall s \geq c_0 t_0. \tag{1.12}$$

Dans le cas polynômiale ou exponentiel ($\varphi(s) = q(s) = s^{r+1}$ et $r \geq 0$ dans (1.6)-(1.7) et $\phi(s) = s$ dans (1.2)), les estimations (1.5), (1.8) et (1.11) coïncident avec (1.3) et (1.4). L'estimation de F. Alabau-Boussouira [1] ne s'applique pas dans le cas exponentiel ($\varphi(s) = s$ dans (1.7)) mais elle est en général plus fine que celle de M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise [26] et améliore, dans certains cas, celle de I. Lasiecka et D. Tataru [50]. L'estimation de F. Alabau-Boussouira [1] conduit, pour certains feedbacks frontières très particuliers, à des taux optimaux de stabilité pour l'équation des ondes en dimension 1.

La décroissance de E joue un rôle crucial dans la démonstration de (1.3), (1.4), (1.5), (1.8) et (1.11). Or dans l'étude de la stabilisation des divers systèmes distribués, on tombe sur une fonction positive *non nécessairement décroissante*, l'obtention d'une estimation de stabilisation dans une telle situation est l'objectif principal de la première partie de cette thèse. Les résultats que j'ai obtenus dans [16], [17] et [18] constituent une première tentative dans cette direction.

CHAPITRE 2

Nouvelles inégalités intégrales

On montre dans ce chapitre des inégalités intégrales nouvelles permettant d'obtenir une estimation sur le comportement à l'infini d'une fonction positive *non nécessairement décroissante*. Ces nouvelles inégalités intégrales améliorent dans certains cas et généralisent dans plusieurs directions celles citées dans le chapitre 1.

Avant d'énoncer le premier résultat principal de ce chapitre, on introduit une fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dont l'intérêt est d'obtenir de meilleures estimations de stabilité en minimisant, par rapport à $h(t)$, les termes à droite de (2.14) et (2.15) ci-après.

Soient r un réel positif, α un réel strictement positif, $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. On note : $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau$ et on trouve que

$$\int_0^{+\infty} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t)}\,dt = +\infty. \tag{2.1}$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}^+$ fixé, on définit la fonction $I_s : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par :

$$I_s(t) = (\omega(s))^{r+1} \int_s^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau$$

$$-e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)}\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big).$$

On a : $I_s \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $I_s'(t) = (\omega(s))^{r+1} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t)} > 0$,

$$I_s(0) = (\omega(s))^{r+1} \int_s^0 e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau$$

$$-e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)}\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big) < 0$$

et, d'après (2.1), $\lim_{t\to+\infty} I_s(t) = +\infty$. Donc I_s admet une seule racine dans $\mathbb{R}^{+*}$ notée $g(s)$ d'où on définit $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ par :

$$I_s(g(s)) = 0, \quad \forall s \geq 0. \tag{2.2}$$

D'une part, comme ω est continue, il en est de même pour la fonction g. D'autre part, on a :

$$I_s(s) = -e^{(r+1)\tilde{\lambda}(s)}\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big) < 0,$$

d'où $g(s) > s$, et par conséquent $\lim_{s\to+\infty} g(s) = +\infty$. Donc g est surjective de $\mathbb{R}^+$ sur $[g(0), +\infty[$.

Soit maintenant $t \in]g(0), +\infty[$ fixé. On définit la fonction $J_t : [0,t] \to \mathbb{R}^+$ par :

$$J_t(s) = \Big(\int_s^t e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau\Big)e^{\int_0^s \omega(\tau)\,d\tau} \quad \text{si } r = 0,$$

$$J_t(s) = \Big(\int_s^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau\Big)\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big)^{\frac{1}{r}} \quad \text{si } r > 0.$$

La fonction J_t est positive et dérivable sur $[0,t]$, et on a :

$$J_t'(s) = I_s(t)e^{\int_0^s \omega(\tau)\,d\tau} \quad \text{si } r = 0,$$

$$J_t'(s) = I_s(t)\Big((\alpha\omega(0))^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau\Big)^{\frac{1}{r}-1} \quad \text{si } r > 0.$$

Comme $J_t'(s)$ est de même signe que $I_s(t)$, alors $J_t' > 0$ à droite de 0 (car $t > g(0)$) et $J_t' < 0$ à gauche de t (car $g(s) > s$). Donc J_t atteint son maximum sur $[0,t]$ au moins en un point $s_0 \in]0,t[$ vérifiant $I_{s_0}(t) = 0$ d'où $s_0 \in g^{-1}(\{t\})$.

On définit maintenant la fonction $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0, g(0)], \\ \max g^{-1}(\{t\}) & \text{si} \quad t \in]g(0), +\infty[. \end{cases} \tag{2.3}$$

On a, pour tout $t > g(0)$: $h(t) \in g^{-1}(\{t\})$ et $I_{h(t)}(t) = 0$. Pour minimiser les termes à droite de (2.14) et (2.15) ci-après par rapport à $h(t)$, il suffit de maximiser J_t (avec $\alpha = \frac{1}{E(0)}$). Donc les termes à droite de (2.14) et (2.15) atteignent leur minimum en $h(t)$ pour tout $t > g(0)$.

Si ω est une constante, alors g est strictement croissante (il suffit de dériver l'égalité (2.2)), et dans ce cas-là,

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0, D^{-1}(\frac{\alpha^r}{\omega})], \\ g^{-1}(t) = K^{-1}(D(t)) & \text{si} \quad t \in]D^{-1}(\frac{\alpha^r}{\omega}), +\infty[\end{cases}$$

où K et D sont les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$K(t) = D(t) + e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t)}(rt + \frac{\alpha^r}{\omega}), \quad D(t) = \int_0^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau.$$

On généralise maintenant le lemme 1.1 dans plusieurs directions en montrant le premier lemme principal suivant :

Lemme 2.1. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ deux fonctions continues. Supposons qu'il existe $r \geq 0$ tels que*

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)\, dt \leq a(s)E(s), & \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda(t)E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Alors E vérifie, pour tout $t \geq 0$, les estimations suivantes :

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)}\omega(h(t))e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))}e^{-\int_0^{h(t)}\omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{2.5}$$

$$E(t) \leq \omega(h(t))e^{\tilde{\lambda}(t)-\tilde{\lambda}(h(t))}\Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^r + r\int_0^{h(t)}(\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau\Big)^{\frac{-1}{r}} \quad \text{si } r > 0 \tag{2.6}$$

où $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau$, h est définie par (2.3) avec $\alpha = \frac{1}{E(0)}$ et $\omega = \frac{1}{a}$.

Remarques. 1. En utilisant un changement de variables, les estimations (2.5) et (2.6) peuvent être généralisées au cas suivant :

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \phi'(t)E^{r+1}(t)\, dt \leq a_1(s)E(s), & \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda_1(t)E(t), & \forall t \geq 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

où $a_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ sont deux fonctions continues et ϕ vérifie les mêmes hypothèses que dans le Lemme 1.1. En effet, on pose $E_1 = E \circ \phi^{-1}$, $a = a_1 \circ \phi^{-1}$ et $\lambda = \frac{\lambda_1 \circ \phi^{-1}}{\phi' \circ \phi^{-1}}$. D'après (2.7), on a :

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} E_1^{r+1}(t)\, dt \leq a(s)E_1(s), & \forall s \geq 0, \\ E_1'(t) \leq \lambda(t)E_1(t), & \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Donc E_1 vérifie (2.5) et (2.6), et par conséquent, E vérifie (2.5) et (2.6) avec t remplacé par $\phi(t)$.

Si, dans (2.7), $\lambda_1 = 0$ et $a_1 = \frac{1}{d}E^r(0)$ avec d une constante strictement positive (comme dans (1.2)), alors E vérifie (2.5) et (2.6) avec

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; t \in [0, \frac{1}{d}], \\ \frac{1}{r+1}(t - \frac{1}{d}) & \text{si } \; t \in]\frac{1}{d}, +\infty[\end{cases}$$

et t remplacé par $\phi(t)$. Et donc (2.5) et (2.6) avec t remplacé par $\phi(t)$ coïncident avec (1.3) et (1.4) respectivement.

2. Si, dans (2.4), $\lambda = 0$ et a est une constante, alors (2.5) et (2.6) sont optimales (voir V. Komornik [38]).

Preuve du Lemme 2.1. Si $E(s) = 0$ ou si $a(s) = 0$ pour un $s \geq 0$, la première inégalité de (2.4) implique que $E(t) = 0$ pour tout $t \geq s$, et dans ce cas-là, il n'y a rien à démontrer. Donc, on peut supposer que $E(t) > 0$ et $a(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ sans perte de généralité.

On pose : $\omega = \frac{1}{a}$ et $\psi(s) = \int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)dt$. On a :

$$\psi(s) \leq \frac{1}{\omega(s)} E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{2.8}$$

La fonction ψ est positive décroissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant, d'après (2.8) :

$$\psi'(s) = -E^{r+1}(s) \leq -(\omega(s)\psi(s))^{r+1}, \quad \forall s \geq 0,$$

alors, par intégration,

$$\psi(s) \leq \psi(0)e^{-\int_0^s \omega(\tau)\,d\tau} \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{-\int_0^s \omega(\tau)\,d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{2.9}$$

$$\psi(s) \leq \Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^r + r\int_0^s (\omega(\tau))^{r+1}\,d\tau \Big)^{\frac{-1}{r}} \quad \text{si } r > 0. \tag{2.10}$$

Maintenant, pour tout $s \geq 0$, on pose :

$$f_s(t) = e^{-(r+1)\tilde{\lambda}(t)} \int_s^t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\,d\tau, \quad \forall t \geq s. \tag{2.11}$$

La fonction f_s est de classe C^1 sur $[s, +\infty[$ et strictement positive sur $]s, +\infty[$ vérifiant :

$$f_s(s) = 0 \quad \text{et} \quad f_s'(t) + (r+1)\lambda(t)f_s(t) = 1, \quad \forall t \geq s \geq 0.$$

Donc, d'après la deuxième inégalité de (2.4),

$$E^{r+1}(t) \geq \partial_t\Big(f_s(t)E^{r+1}(t)\Big), \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{2.12}$$

Donc, d'après (2.12),

$$\psi(s) \geq \int_s^{g(s)} E^{r+1}(t)\,dt \geq f_s(g(s))E^{r+1}(g(s)), \quad \forall s \geq 0 \tag{2.13}$$

où g est définie par (2.2) avec $\alpha = \frac{1}{E(0)}$.

Soient maintenant $t > g(0)$ et $s = h(t)$ où h est définie par (2.3) avec $\alpha = \frac{1}{E(0)}$. On a donc $g(s) = t$ et on déduit alors de (2.13) que, pour tout $t > g(0)$,

$$\psi(h(t)) \geq f_{h(t)}(t)E^{r+1}(t) = \Big(e^{-(r+1)\tilde{\lambda}(t)} \int_{h(t)}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau\Big) E^{r+1}(t).$$

On conclut donc de (2.9) et (2.10) que, pour tout $t > g(0)$,

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{h(t)}^{t} e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau\Big)^{-1} e^{-\int_0^{h(t)} \omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si } r = 0, \tag{2.14}$$

$$E(t) \leq e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{h(t)}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau\Big)^{\frac{-1}{r+1}} \times$$
$$\Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^{r} + r \int_0^{h(t)} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau\Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad \text{si } r > 0. \tag{2.15}$$

En utilisant le fait que $I_{h(t)}(t) = I_s(g(s)) = 0$, c-à-d :

$$\int_{h(t)}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau$$

$$= (\omega(h(t)))^{-(r+1)} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(h(t))} \Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^{r} + r \int_0^{h(t)} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau\Big),$$

on conclut (2.5) et (2.6) pour $t > g(0)$.

Si $t \in [0, g(0)]$, la deuxième inégalité de (2.4) implique que

$$E(t) \leq E(0) e^{\tilde{\lambda}(t)},$$

et comme $h(t) = 0$ sur $[0, g(0)]$, $E(0)e^{\tilde{\lambda}(t)}$ coïncide avec les termes à droite de (2.5) et de (2.6). Ceci achève la preuve du Lemme 2.1.

Commentaire. Le Lemme 2.1 donne des estimations précises ((2.5) et (2.6)) sur le comportement de E; ces estimations sont définies à partir d'une fonction g qui est la solution d'une équation intégrale (l'équation (2.2)) qui n'est pas toujours facile à résoudre. Mais les estimations (2.14) et (2.15) restent vraies pour toute fonction h positive vérifiant, pour un certain $T_0 > 0$:

$$h(t) < t \quad \text{sur} \quad]T_0, +\infty[.$$

Donc pour des choix simples de h, on obtient des estimations moins fortes que (2.5) et (2.6) mais qui sont aisément calculables d'où les résultats suivants :

Lemme 2.2. *Sous les hypothèses du Lemme 2.1, E vérifie, pour tout $t > 1$, les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{t-1}^{t} e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \Big)^{-1} e^{-\int_0^{t-1} \omega(\tau)\, d\tau} \quad si \quad r = 0, \tag{2.16}$$

$$E(t) \leq e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{t-1}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r+1}} \times$$
$$\Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^r + r \int_0^{t-1} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si\ r > 0. \tag{2.17}$$

Preuve. On choisit dans (2.13) :

$$g(s) = s + 1, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

au lieu de la racine de I_s, on obtient (2.14) et (2.15) avec $h(t) = t - 1$ pour $t > 1$. D'où (2.16) et (2.17).

Remarque. Comme $\tilde{\lambda}$ est croissante, alors

$$\int_{t-1}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \geq e^{(r+1)\tilde{\lambda}(t-1)}.$$

Donc, on déduit de (2.16) et (2.17) qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $t > 1$, on a :

$$E(t) \leq c e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(t-1)} e^{-\int_0^{t-1} \omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si} \quad r = 0, \tag{2.18}$$

$$E(t) \leq c e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(t-1)} \Big(1 + \int_0^{t-1} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad \text{si} \quad r > 0. \tag{2.19}$$

Lemme 2.3. *Sous les hypothèses du Lemme 2.1, E vérifie, pour tous $\epsilon \in]0, 1[$ et $t > 0$, les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq \frac{E(0)}{\omega(0)} e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{\epsilon t}^{t} e^{\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \Big)^{-1} e^{-\int_0^{\epsilon t} \omega(\tau)\, d\tau} \quad si \quad r = 0, \tag{2.20}$$

$$E(t) \leq e^{\tilde{\lambda}(t)} \Big(\int_{\epsilon t}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r+1}} \times$$

$$\Big((\frac{\omega(0)}{E(0)})^r + r \int_0^{\epsilon t} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si\ r > 0. \tag{2.21}$$

Preuve. On choisit dans (2.13) :

$$g(s) = \frac{1}{\epsilon} s, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

au lieu de la racine de I_s, on obtient (2.14) et (2.15) avec $h(t) = \epsilon t$ pour $t > 0$. D'où (2.20) et (2.21).

Remarque. Comme $\tilde{\lambda}$ est croissante, alors

$$\int_{\epsilon t}^{t} e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\tau)}\, d\tau \geq (1-\epsilon) t e^{(r+1)\tilde{\lambda}(\epsilon t)}.$$

Donc, on déduit de (2.20) et (2.21) qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tous $\epsilon \in]0, 1[$ et $t > 0$, on a :

$$E(t) \leq \frac{c}{(1-\epsilon)t} e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(\epsilon t)} e^{-\int_0^{\epsilon t} \omega(\tau)\, d\tau} \quad \text{si} \quad r = 0, \tag{2.22}$$

$$E(t) \leq \frac{c}{((1-\epsilon)t)^{r+1}} e^{\tilde{\lambda}(t) - \tilde{\lambda}(\epsilon t)} \Big(1 + \int_0^{\epsilon t} (\omega(\tau))^{r+1}\, d\tau \Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \text{si } r > 0. \tag{2.23}$$

Comme des cas particuliers, on déduit du Lemme 2.2 les estimations suivantes :

Lemme 2.4. *Sous les hypothèses du Lemme 2.1 et si* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *et*

$$a(s) = c_1 e^{-c_2 s} \quad avec\ c_1 > 0\ et\ c_2 \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante $c > 0$ *telle que* E *vérifie, pour tout* $t > 1$, *les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq c e^{-\frac{1}{c_1} t} \quad si \quad r = c_2 = 0,$$

$$E(t) \leq c e^{-\frac{e^{-c_2}}{c_1 c_2} e^{c_2 t}} \quad si \quad r = 0\ et\ c_2 \neq 0,$$

$$E(t) \leq c t^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0\ et\ c_2 = 0,$$

$$E(t) \leq c\Big(\frac{e^{(r+1)c_2(t-1)} - 1}{c_2}\Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ c_2 \neq 0.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\tilde{\lambda}(t) = \lambda t$ et $\omega(s) = \frac{1}{c_1}e^{c_2 s}$, et d'appliquer (2.18) et (2.19).

Remarque. Quand $c_2 < 0$, les estimations du Lemme 2.4 n'impliquent pas que E converge vers zéro.

Lemme 2.5. *Sous les hypothèses du Lemme 2.1 et si* $\lambda \in \mathbb{R}^+$ *et*

$$a(s) = c_1(s+1)^{-c_2} \quad avec \ c_1 > 0 \ et \ c_2 \in \mathbb{R},$$

alors il existe une constante $c > 0$ *telle que* E *vérifie, pour tout* $t > 1$*, les estimations suivantes :*

$$E(t) \leq ct^{\frac{-1}{c_1}} \quad si \quad r = 0 \ et \ c_2 = -1,$$

$$E(t) \leq ce^{\frac{-1}{c_1(c_2+1)}t^{c_2+1}} \quad si \quad r = 0 \ et \ c_2 \neq -1,$$

$$E(t) \leq c(\ln(t))^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ c_2 = \frac{-1}{r+1}$$

$$E(t) \leq c\Big(\frac{t^{c_2(r+1)+1} - 1}{c_2(r+1)+1}\Big)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ c_2 \neq \frac{-1}{r+1}.$$

Preuve. Il suffit de remarquer que $\tilde{\lambda}(t) = \lambda t$ et $\omega(s) = \frac{1}{c_1}(s+1)^{c_2}$, et d'appliquer (2.18) et (2.19).

Remarque. Quand $c_2 < \frac{-1}{r+1}$, les estimations du Lemme 2.5 n'impliquent pas que E converge vers zéro.

Dans le lemme suivant, on considère des hypothèses plus générales que (2.4) en incluant le cas d'une perturbation du second membre.

Lemme 2.6. *Soient* $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *une fonction dérivable,* $a_3 \in \mathbb{R}^+$*,* $a_1, a_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{+*}$ *et* $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *trois fonctions continues. Supposons qu'il existe* $r, p \geq 0$ *tels que*

$$a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\} < 1$$

et, pour tout $0 \leq s \leq T < +\infty$*,*

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t)\,dt \leq a_1(s)E(s) + a_2(s)E^{p+1}(s) + a_3E^{r+1}(T), \\ E'(t) \leq \lambda(t)E(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Alors E *vérifie (2.5) et (2.6) où* $\tilde{\lambda}(t) = \int_0^t \lambda(\tau)\,d\tau$*,* $\omega = \frac{1}{a}$ *et* a *est défini par (2.26).*

Remarques. 1. Comme dans le Lemme 2.2 et le Lemme 2.3, on peut montrer, sous les hypothèses du Lemme 2.6, que E vérifie (2.16)-(2.19) et (2.20)-(2.23) où $\omega = \frac{1}{a}$ et a est défini par (2.26).

2. Si $r = 0$, λ est une constante et $\lambda a_3 \geq 1$, alors $E(t) = e^{\lambda t}$ satisfait (2.24). Ceci implique qu'une fonction vérifiant (2.24) ne converge pas forcément vers zéro.

Preuve du Lemme 2.6. Il suffit de montrer que E vérifie la première inégalité de (2.4) pour appliquer le Lemme 2.1.

On a :

$$\begin{aligned} a_3E^{r+1}(T) &= a_3 \int_s^T (E^{r+1})'(t)dt + a_3E^{r+1}(s) \\ &\leq a_3(r+1) \int_s^T \lambda(t)E^{r+1}(t)\,dt + a_3E^{r+1}(s) \\ &\leq a_3(r+1) \sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\} \int_s^T E^{r+1}(t)\,dt + a_3E^{r+1}(s). \end{aligned}$$

Donc, d'après la première inégalité de (2.24), on obtient :

$$\int_s^{+\infty} E^{r+1}(t)\,dt \leq b(s)E(s), \quad \forall s \geq 0 \tag{2.25}$$

où

$$b(s) = \frac{a_1(s) + a_2(s)E^p(s) + a_3E^r(s)}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}, \quad \forall s \geq 0.$$

On considère la fonction f_0 (définie par (2.11) pour $s = 0$) et on intègre sur $[0, s]$ l'inégalité

$$E^{r+1}(t) \geq \partial_t\Big(f_0(t)E^{r+1}(t)\Big), \quad \forall t \geq 0,$$

on obtient, d'après (2.25) :

$$b(0)E(0) \geq \int_0^s E^{r+1}(t)\,dt \geq f_0(s)E^{r+1}(s), \quad \forall s \geq 0$$

d'où (on exclut $s = 0$ car $f_0(0) = 0$)

$$E(s) \leq \Big(\frac{b(0)E(0)}{f_0(s)}\Big)^{\frac{1}{r+1}}, \quad \forall s > 0.$$

D'autre part, la deuxième inégalité de (2.24) implique que

$$E(s) \leq E(0)e^{\tilde{\lambda}(s)}, \quad \forall s \geq 0.$$

Donc

$$E(s) \leq \min\{E(0)e^{\tilde{\lambda}(s)}, \Big(\frac{b(0)E(0)}{f_0(s)}\Big)^{\frac{1}{r+1}}\} = d(s), \quad \forall s \geq 0.$$

La fonction d est continue et strictement positive, et on a :

$$b(s) \leq \frac{a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p + a_3(d(s))^r}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}, \quad \forall s \geq 0.$$

D'où, on conclut de (2.25) la première inégalité de (2.4) avec

$$a(s) = \frac{a_1(s) + a_2(s)(d(s))^p + a_3(d(s))^r}{1 - a_3(r+1)\sup_{t\geq 0}\{\lambda(t)\}}. \tag{2.26}$$

Ceci achève la preuve du Lemme 2.6.

Dans le cas particulier où λ et a_i sont des constantes, le Lemme 2.6 généralise et améliore une version que j'ai démontrée (sous des hypothèses plus fortes) et utilisée dans mes deux articles [16] et [17].

Lemme 2.7. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, a_1, $a_2 \in \mathbb{R}^{+*}$ et a_3, r, p, $\lambda \in \mathbb{R}^+$. Supposons que*

$$\begin{cases} \int_s^T E^{r+1}(t)\,dt \leq a_1 E(s) + a_2 E^{p+1}(s) + a_3 E^{r+1}(T), & \forall 0 \leq s \leq T, \\ E'(t) \leq \lambda E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.27}$$

Si $a_3\lambda(r+1) < 1$, alors il existe deux constantes strictement positives ω et c telles que, pour tout $t \geq 0$,

$$E(t) \leq ce^{-\omega t} \quad si \quad r = 0, \tag{2.28}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-1}{r}} \quad si \quad r > 0 \ et \ \lambda = 0, \tag{2.29}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-1}{r(r+1)}} \quad si \quad r > 0 \ et \ \lambda > 0. \tag{2.30}$$

Preuve. Si $\lambda = 0$, (2.27) implique (1.2). Donc, d'après le Lemme 1.1, (1.3) et (1.4) impliquent (2.28) et (2.29) respectivement.

Supposons que $\lambda > 0$. D'après la preuve du Lemme 2.6, E vérifie la première inégalité de (2.4) où a est défini par (2.26). Donc, on déduit (2.16) et (2.17) avec $\omega(s) = \frac{1}{a(s)}$. Or, sous les hypothèses du Lemme 2.7, la fonction a est bornée. Donc $\omega(s) \geq \frac{1}{\sup_{t\geq 0}\{a(t)\}}$ (si $\sup_{t\geq 0}\{a(t)\} = 0$, alors $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, et par conséquent $E = 0$) d'où (2.16) et (2.17) impliquent, pour tout $t > 1$, (2.28) et (2.30) respectivement.

Pour $t \in [0, 1]$, on a :

$$E(t) \leq E(0)e^{\lambda t} \leq E(0)e^{\lambda}.$$

Donc E vérifie (2.28)-(2.30) aussi pour $t \in [0, 1]$.

On généralise maintenant les Lemmes 1.2 et 1.3 au cas non dissipatif en montrant le deuxième lemme principal de ce chapitre. Ceci unifie, améliore dans certains cas et généralise au cas non dissipatif tous les cas considérés dans le Chapitre 1.

Lemme 2.8. *Soient $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction dérivable, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe et strictement croissante vérifiant :*

$$\varphi(0) = 0. \tag{2.31}$$

Supposons que

$$\begin{cases} \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\, dt \leq E(s), & \forall s \geq 0, \\ E'(t) \leq \lambda E(t), & \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Alors E vérifie l'estimation suivante :

$$E(t) \leq g^{-1}\Big(e^{\lambda(t-h(t))}\varphi\Big(\psi^{-1}(h(t) + \psi(E(0)))\Big)\Big),\ \forall t > T_0 \tag{2.33}$$

où

$$\psi(t) = \int_t^1 \frac{1}{\varphi(s)}\, ds, \quad \forall t > 0, \tag{2.34}$$

$$g(t) = \begin{cases} \varphi(t) & si \quad \lambda = 0, \\ \int_0^t \frac{\varphi(s)}{s}\, ds & si \quad \lambda > 0, \end{cases} \quad \forall t \geq 0, \tag{2.35}$$

$$h(t) = K^{-1}(D(t)), \quad \forall t > T_0, \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} K(t) = D(t) + \dfrac{\psi^{-1}\Big(t+\psi(E(0))\Big)}{\varphi\Big(\psi^{-1}\Big(t+\psi(E(0))\Big)\Big)} e^{\lambda t}, \quad \forall t \geq 0, \\ D(t) = \int_0^t e^{\lambda s}\, ds, \quad \forall t \geq 0, \end{cases} \tag{2.37}$$

$$T_0 = D^{-1}\Big(\frac{E(0)}{\varphi(E(0))}\Big). \tag{2.38}$$

Remarques. 1. Si $\lambda = 0$ et $\varphi(t) = dt^{r+1}$ pour $d > 0$ et $r \geq 0$, alors l'estimation (2.33) coïncide avec (1.5), (1.8) et (1.11), et elle coïncide avec (1.3) et (1.4) si de plus $\phi(s) = s$.

2. Si $\lambda = 0$, alors l'estimation (2.33) est plus forte que (1.8) en général grâce à notre fonction h définie par (2.36) qui minimise (2.47) ci-après.

Preuve du Lemme 2.8. Si $E(s) = 0$ pour un $s \geq 0$, la première inégalité de (2.32) implique que $E(t) = 0$ pour tout $t \geq s$, et dans ce cas-là, il n'y a rien à démontrer. Donc, on peut supposer que $E(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ sans perte de généralité.

On pose :

$$L(s) = \int_s^{+\infty} \varphi(E(t))\, dt, \quad \forall s \geq 0. \tag{2.39}$$

D'après (2.32), on a :

$$L(s) \leq E(s), \quad \forall s \geq 0. \tag{2.40}$$

La fonction L est strictement positive décroissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant, d'après (2.39) et (2.40) :

$$-L'(s) = \varphi(E(s)) \geq \varphi(L(s)), \quad \forall s \geq 0.$$

La fonction ψ définie par (2.34) est strictement décroissante, donc,

$$\Big(\psi(L(s))\Big)' = \frac{-L'(s)}{\varphi(L(s))} \geq 1, \quad \forall s \geq 0.$$

Donc, par intégration sur $[0, t]$ et en utilisant (2.40) pour $s = 0$,

$$\psi(L(t)) \geq t + \psi(E(0)), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.41}$$

Comme φ est convexe et $\varphi(0) = 0$, alors

$$\varphi(s) \leq \varphi(1)s,\ \forall s \in [0,1] \quad \text{et} \quad \varphi(s) \geq \varphi(1)s,\ \forall s \geq 1, \tag{2.42}$$

et par conséquent $\lim_{t\to 0}\psi(t) = +\infty$ et $[\psi(E(0)), +\infty[\subset \text{Image}(\psi)$. On déduit donc de (2.41) que :

$$L(t) \leq \psi^{-1}\Big(t + \psi(E(0))\Big), \quad \forall t \geq 0. \tag{2.43}$$

Maintenant, pour tout $s \geq 0$, on pose :

$$f_s(t) = e^{-\lambda t}\int_s^t e^{\lambda\tau}\, d\tau, \quad \forall t \geq s. \tag{2.44}$$

La fonction f_s est strictement croissante sur $[s, +\infty[$ et strictement positive sur $]s, +\infty[$ vérifiant :

$$f_s(s) = 0 \quad \text{et} \quad f_s'(t) + \lambda f_s(t) = 1, \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{2.45}$$

D'après (2.42), la fonction g définie par (2.35) est bien définie, positive et strictement croissante vérifiant :

$$g(t) \leq \varphi(t) \quad \text{et} \quad \lambda t g'(t) = \lambda\varphi(t), \quad \forall t \geq 0,$$

donc, d'après (2.45) et la deuxième inégalité de (2.32),

$$\partial_\tau\Big(f_s(\tau)g(E(\tau))\Big) = f_s'(\tau)g(E(\tau)) + f_s(\tau)E'(\tau)g'(E(\tau))$$

$$\leq \Big(1 - \lambda f_s(\tau)\Big)\varphi(E(\tau)) + \lambda f_s(\tau)\varphi(E(\tau)) = \varphi(E(\tau)), \quad \forall \tau \geq s \geq 0.$$

En intégrant cette inégalité sur $[s, t]$, on obtient :

$$L(s) \geq \int_s^t \varphi(E(\tau))\, d\tau \geq f_s(t)g(E(t)), \quad \forall t \geq s \geq 0. \tag{2.46}$$

D'après (2.42), $\lim_{t\to+\infty} g(s) = +\infty$. Comme $g(0) = 0$ et g est strictement croissante, on déduit alors de (2.43) et (2.46) que :

$$E(t) \leq g^{-1}\Big(\inf_{s\in[0,t[} \frac{\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big)}{f_s(t)}\Big), \quad \forall t > 0. \tag{2.47}$$

On fixe maintenant $t > T_0$ où T_0 est défini par (2.38) et on pose :

$$J(s) = \frac{\psi^{-1}\Big(s + \psi(E(0))\Big)}{f_s(t)}, \quad \forall s \in [0, t[. \tag{2.48}$$

La fonction J est dérivable et on a, pour tout $s \in [0, t[$:

$$J'(s) = f_s^{-2}(t)\Big[e^{-\lambda(t-s)}\psi^{-1}\Big(s+\psi(E(0))\Big) - f_s(t)\varphi\Big(\psi^{-1}\Big(s+\psi(E(0))\Big)\Big)\Big].$$

On vérifie facilement, d'après (2.44), que :

$$J'(s) = 0 \;\Leftrightarrow\; K(s) = D(t) \quad \text{et} \quad J'(s) < 0 \;\Leftrightarrow\; K(s) < D(t)$$

où K et D sont définies par (2.37). On a : $K(0) = \frac{E(0)}{\varphi(E(0))}$ et $D(0) = 0$. De plus, comme ψ^{-1} est strictement décroissante et $d(s) = \frac{s}{\varphi(s)}$, $s > 0$, est décroissante (puisque φ est convexe), alors K et D sont strictement croissantes. Donc, si $t > T_0$,

$$\inf_{s\in[0,t[} J(s) = J\Big(K^{-1}(D(t))\Big) = J(h(t)).$$

Comme h vérifie $J'(h(t)) = 0$, alors on conclut de (2.47) l'estimation (2.33).

Remarque. Sous les hypothèses du Lemme 2.8, on a toujours

$$\lim_{t\to+\infty} E(t) = 0. \tag{2.49}$$

En effet, il suffit de choisir $s = \frac{1}{2}t$ dans (2.48) et noter que $g(0) = 0$, $\lim_{t\to 0}\psi(t) = +\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} f_{\frac{1}{2}t}(t) > 0$ d'où, d'après (2.47), le résultat (2.49).

CHAPITRE 3

Equation des ondes avec un terme perturbant d'ordre 1

3.1. Introduction

On considère dans ce chapitre le problème de la stabilisation (interne et frontière) de l'équation des ondes semi-linéaire avec un terme perturbant d'ordre 1

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) + g(u') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{$P3$}$$

dans le cas d'un feedback interne, et

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + g(u') = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{$P3'$}$$

dans le cas d'un feedback frontière, où $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un domaine ouvert borné de frontière Γ assez régulière, et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues vérifiant certaines hypothèses (voir paragraphe 2). Dans $(P3')$, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ où Γ_0 et Γ_1 sont deux parties fermées et disjointes.

L'objectif principal de ce chapitre est de montrer que toute solution de $(P3)$ et $(P3')$ converge vers zéro quand t converge vers l'infini et de donner des estimations précises de stabilité en utilisant, en particulier, les résultats du Chapitre 2.

Quand $h \equiv 0$, la bibliographie des travaux traitant ce problème est très vaste. On peut citer entre autres les travaux de M. Nakao [64-67], S. Kawashima, M. Nakao et K. Ono [34], M. Nakao et K. Ono [68], S. Nicaise [69], A. Haraux et E. Zuazua [31], P. Pucci et J. Serrin [71], E. Zuazua [84-87], V. Komornik [36-39].

Dans [67], M. Nakao a considéré le système suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \rho(u') + f(u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $\rho(v) = |v|^\beta v$, $\beta > -1$, $f(u) = bu|u|^\alpha$, $\alpha, b > 0$ et Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ assez régulière. L'auteur de [67] a montré que (3.1.1) admet une solution faible globale unique si $(n-2)\alpha \leq 2$ ainsi qu'une solution forte globale unique si $(n-2)\alpha > 2$, $n = 1$ ou $n = 2$. Le problème de stabilisation a été aussi traité. Dans les deux cas, M. Nakao a montré dans [67] que l'énergie de la solution décroît polynômialement si $\beta > 0$, et exponentiellement si $\beta = 0$. Ses résultats améliorent des résultats antérieurs obtenus par le même auteur dans [65] où le problème est étudié dans un cadre abstrait et des résultats de stabilité sont obtenus uniquement dans le cas $(n-2)\alpha \leq 2$. Plus tard, et dans un travail conjoint avec K. Ono [68], ces résultats ont été généralisés au problème de Cauchy pour l'équation

$$u'' - \Delta u + \lambda^2(x)u + \rho(u') + f(u) = 0 \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$$

où $\rho(u')$ se comporte comme $|u'|^\beta u'$ au voisinage de zéro et l'infini, et $f(u)$ se comporte comme $-bu|u|^\alpha$. Dans ce cas-là, les auteurs imposent des conditions de petitesse sur la norme dans $H^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ des données initiales avec un support compact.

P. Pucci et J. Serrin [71] ont traité le problème de stabilisation du système suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + Q(x,t,u,u') + f(x,u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{3.1.2}$$

et ont montré que l'énergie de la solution est une fonction de Liapunov. Bien qu'ils n'aient pas obtenu des estimations de stabilisation, ces derniers ont montré qu'en général l'énergie converge vers zéro à l'infini. Dans le cas spécial de (3.1.2) où

$$Q(x,t,u,u') = a(t)t^\alpha u' \quad \text{et} \quad f(x,u) = V(x)u,$$

les auteurs de [71] ont démontré que le comportement de l'énergie à l'infini dépend crucialement du paramètre α. Si $|\alpha| \leq 1$, (3.1.2) est asymptotiquement stable. D'autre part, si $\alpha < -1$ ou $\alpha > 1$, il existe des solutions qui ne convergent pas vers zéro ou qui convergent vers une fonction non nulle $\phi(x)$ quand t converge vers l'infini.

S. Messaoudi [58] a traité un système basé sur l'équation

$$u'' - \Delta u + a(1 + |u'|^{m-2})u' + bu|u|^{p-2} = 0 \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

où $a, b > 0$, $m \geq 2$, $p > 2$ avec des conditions aux limites sur le bord, et a montré la stabilité exponentielle. La démonstration de ces résultats est basée sur la méthode des multiplicateurs et sur une approche que j'ai utilisée dans mes deux articles [8] et [9].

Concernant le cas d'un feedback frontière, le problème $(P3')$ avec $h \equiv 0$ a suscité un grand intérêt ces vingt dernières années. De nombreux travaux à ce sujet existent dans la littérature et un progrès important a été réalisé dans ce domaine. Des techniques nouvelles ont été développées qui ont permis de stabiliser des systèmes d'évolution à partir du bord ou de les contrôler de l'état initiale à l'état finale (contrôlabilité). Il existe dans la littérature une longue liste de références traitant de la stabilisation avec un feedback linéaire sur le bord. On peut citer, comme exemples, les travaux suivants : J. Lagnese [46], D. L. Russell [75], R. Triggiani [81] et Y. You [82]. Dans le cas où le feedback frontière est non linéaire, on peut citer les travaux de E. Zuazua [84], I. Lasiecka D. Tataru [50], V. Komornik [38] et moi-même dans [3] et [9], parmi beaucoup d'autres. Dans tous ces travaux, l'objectif principal était d'obtenir les mêmes résultats de stabilité quand le système est soumis à une condition au bord de la forme

$$\partial_\nu u + a(x)u + b(x)g(u') = 0 \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

où Γ_1 est une partie du bord Γ de Ω vérifiant certaines conditions géométriques, a, b et g sont des fonctions données. En revanche, aucun contrôle n'est appliqué sur l'autre partie, i.e. :

$$u = 0 \quad (\Gamma \setminus \Gamma_1) \times \mathbb{R}^+.$$

En utilisant un principe général de Russell [75], S. Nicaise [69] a montré, dans un cadre général, que la dissipation et la stabilité exponentielle par un feedback linéaire impliquent des estimations de stabilité (similaires à celles obtenues par M. Martinez [56]) par un feedback non linéaire, ce qui établit un lien direct entre les deux cas.

En revanche, quand $h \not\equiv 0$, très peu de travaux existent dans la littérature. A ma connaissance, les résultats les plus généraux et les plus récents dans cette direction ont été obtenus par M. M. Cavalcanti, N. A. Lar'kin et J. A. Soriano [17]. Dans ce papier, les auteurs ont montré l'existence et la régularité des solutions d'une large classe d'équations hyperboliques basée sur l'équation

$$K(x,t)u'' - \Delta u + F(x,t,u,u',\nabla u) = f(x) \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

avec des conditions au bord et des données initiales comme dans $(P3')$ où K, F et f sont des fonctions données satisfaisant certaines hypothèses.

De plus, pour obtenir la stabilisation exponentielle des solutions en utilisant des multiplicateurs et des inégalités intégrales classiques, M. M. Cavalcanti, N. A. Lar'kin et J. A. Soriano [17] ont imposé des hypothèses supplémentaires sur F. Ces hypothèses impliquent, en particulier, que F est globalement lipschitzienne par rapport à sa dernière variable où la constante de Lipschitz est une fonction en t convergeant exponentiellement vers zéro à l'infini. Cette forte hypothèse n'est pas satisfaite si, par exemple, la fonction F ne dépend pas de t, comme dans le cas des systèmes $(P3)$ et $(P3')$.

Notons que, à cause du terme $h(\nabla u)$, les systèmes $(P3)$ et $(P3')$ ne sont pas dissipatifs puisque nous n'avons aucune information sur l'influence de l'intégrale $\int_\Omega h(\nabla u)u'\,dx$ sur la norme

$$\|(u,u')\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} = \int_\Omega \left(|u'(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right)\,dx,$$

ni sur le signe de sa dérivée; autrement dit, l'énergie E (définie dans le paragraphe suivant) n'est pas nécessairement décroissante. La décroissance de l'énergie joue un rôle crucial dans l'étude de la stabilité asymptotique de la solution, comme cela a été le cas, en particulier, dans les travaux cités ci-dessus.

On introduit une énergie équivalente dans le but d'absorber la partie linéaire de h; cette énergie équivalente est décroissante si h est linéaire. En utilisant des multiplicateurs appropriés et le Lemme 2.7, on démontre alors des estimations exponentielles et polynômiales de stabilité. Dans le cas où h est non linéaire, on démontre la stabilité exponentielle sous une hypothèse de petitesse sur la partie non linéaire de h. La clef principale de la démonstration est l'utilisation des résultats obtenus dans le Chapitre 2, en particulier le Lemme 2.7.

3.2. Notations et résultats principaux

On commence ce paragraphe par considérer des hypothèses générales.

(H.1) Hypothèses sur f.

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que $f(0)=0$,

$$|f(s_1)-f(s_2)| \le \alpha(1+|s_1|^q+|s_2|^q)|s_1-s_2|, \quad \forall s_1,s_2\in\mathbb{R},$$

$$F(s)\ge -as^2, \quad \forall s\in\mathbb{R} \tag{3.2.1}$$

avec α, $q \geq 0$, $(n-2)q \leq n$ et $a < \frac{1}{2c_0}$ où F est le potentiel défini par :

$$F(s) = \int_0^s f(\sigma)\,d\sigma, \quad \forall s \in \mathbb{R},$$

et c_0 est la plus petite constante positive (qui ne dépend que de Ω et de $\hat{\zeta}$ où $\hat{\zeta}$ est défini dans l'ypothèse (H.3)) vérifiant (inégalité de Poincaré) :

$$\int_\Omega e^{\hat{\zeta}\cdot x}|v|^2\,dx \leq c_0 \int_\Omega e^{\hat{\zeta}\cdot x}|\nabla v|^2\,dx, \quad \forall v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \tag{3.2.2}$$

où $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) : v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$. Dans le cas de $(P3)$ $(\Gamma_0 = \Gamma)$, on utilise la notation classique $H^1_0(\Omega)$.

On suppose aussi qu'il existe un réel $b > 0$ tel que

$$2bF(s) \leq sf(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.2.3}$$

(H.2) Hypothèses sur g.

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1, croissante et $g(0) = 0$ telle que

$$g(s)s > 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}^*. \tag{3.2.4}$$

On suppose aussi qu'il existe trois constantes $r \geq 1$ et c_1, $c_2 > 0$ telles que

$$c_1 \min\{|s|, |s|^r\} \leq |g(s)| \leq c_2 \max\{|s|^{\frac{1}{r}}, |s|\}, \quad \forall s \in \mathbb{R}. \tag{3.2.5}$$

(H.3) Hypothèses sur h.

$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que

$$\nabla h \quad \text{est borné}, \tag{3.2.6}$$

et il existe $\hat{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ et $\beta \geq 0$ tels que

$$|h(\zeta) + \hat{\zeta}\cdot\zeta| \leq \beta|\zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2.7}$$

On pose maintenant $\phi(x) = \hat{\zeta}\cdot x$ et on définit l'énergie équivalente de la solution de $(P3)$ et de $(P3')$ par la formule

$$E(t) = \int_\Omega e^{\phi(x)}\left(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u)\right)dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+. \tag{3.2.8}$$

Remarques. 1. Si la fonction f est croissante vérifiant $f(0) = 0$, alors les conditions (3.2.1) et (3.2.3) sont satisfaites avec $a = 0$ et $b = \frac{1}{2}$.

2. La condition (3.2.1) assure l'inégalité

$$\int_\Omega e^{\phi(x)}(|u'|^2 + |\nabla u|^2)\,dx \le kE(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.2.9}$$

où $k = \frac{1}{1-2ac_0}$. En effet, (3.2.1) et (3.2.2) impliquent que

$$\begin{aligned} E(t) &\ge \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2 - 2a|u|^2\right)\,dx \\ &\ge \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + (1-2ac_0)|\nabla u|^2\right)\,dx \\ &\ge (1-2ac_0)\int_\Omega e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2\right)\,dx \end{aligned}$$

d'où (3.2.9). Comme ϕ est bornée, l'inégalité (3.2.9) montre que l'énergie équivalente E définit une norme pour le couple (u, u') sur $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

Existence et régularité de solutions. En utilisant la méthode de Galerkin (voir M. M. Cavalcanti, N. A. Lar'kin et J. A. Soriano [17]) - on omet ici les détails - on peut montrer, sous les hypothèses (H.1), (H.2) et (H.3), que le problème $(P3)$ admet, pour toute donnée initiale

$$(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega),$$

une solution unique (forte) $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, vérifiant :

$$u \in L^\infty(]0,+\infty[; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),\ u' \in L^\infty(]0,+\infty[; H_0^1(\Omega)), \tag{3.2.10}$$

$$u'' \in L^\infty(]0,+\infty[; L^2(\Omega)).$$

En revanche, si la donnée initiale $(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, alors, en utilisant des arguments classiques de densité, on montre que $(P3)$ admet une solution unique (faible) $u : \Omega\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dans l'espace

$$C(]0,+\infty]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(]0,+\infty[; L^2(\Omega)). \tag{3.2.11}$$

On présente maintenant les résultats de stabilité concernant $(P3)$.

Théorème 3.2.1. *Supposons satisfaites les hypothèses (H.1), (H.2) et (H.3) avec $b < 1$.*

Alors l'énergie équivalente E définie par (3.2.8) vérifie, pour toute solution faible de $(P3)$, les estimations suivantes :

Cas 1 : h est linéaire ($\beta = 0$). *Il existe deux constantes positives c et ω telles que*

$$E(t) \leq cE(0)e^{-\omega t}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad si \quad r = 1, \tag{3.2.12}$$

$$E(t) \leq c(1+t)^{\frac{-2}{r-1}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad si \quad r > 1. \tag{3.2.13}$$

Cas 2 : h est non linéaire ($\beta > 0$). *Supposons que $r = 1$ et β est assez petit. Alors E vérifie (3.2.12).*

Remarques. 1. Dans la démonstration du Théorème 3.2.1, on précise la condition de petitesse supposée sur β dans le cas où h est non linéaire.

2. Si $r = 1$, on obtient la stabilité exponentielle (3.2.12) que h soit linéaire ou non. Dans tous les cas, et grâce à l'introduction de l'énergie équivalente, aucune condition de petitesse n'est imposée sur $|\hat{\zeta}|$ (qui représente la partie linéaire de h).

3. Dans le cas particulier où g est linéaire ($g(s) = \alpha s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ avec $\alpha > 0$. Donc $r = 1$ dans (3.2.5)), on obtient les résultats obtenus par S. Messaoudi [57].

4. Dans le cas où $\beta = 0$ (h est linéaire), il est possible d'affaiblir les conditions (3.2.5) (voir A. Guesmia [3, 7] pour le système d'élasticité et A. Guesmia [6] pour le système de Petrovsky). Comme notre objectif principal est de traiter le terme perturbant $h(\nabla u)$, on ne considère dans ce chapitre que les conditions (3.2.5).

On s'intéresse maintenant à la stabilisation de $(P3')$. Pour obtenir les estimations de stabilité (3.2.12) et (3.2.13) dans le cas d'un feedback frontière, on a besoin d'imposer quelques hypothèses géométriques sur Γ. Soit x^0 un point fixe dans $\mathbb{R}^n$. On pose :

$$m = m(x) = x - x^0, \quad R = \max_{x \in \bar{\Omega}} |m(x)| = \|m\|_\infty \tag{3.2.14}$$

et on suppose que les deux parties non vides Γ_0 et Γ_1 de Γ vérifient, pour un réel $\delta > 0$:

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu \leq 0\}, \quad \Gamma_1 = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu \geq \delta\}. \tag{3.2.15}$$

Exemples. Concernant l'existence d'une telle partition de Γ, on peut prendre Ω comme suit :

1. Si $n = 1$, alors Ω est un intervalle ouvert borné : $\Omega =]x_1, x_2[\subset \mathbb{R}$. Les hypothèses géométriques (3.2.15) sont satisfaites dans les cas suivants :

i) $\Gamma_0 = \{x_1\}, \quad \Gamma_1 = \{x_2\} \quad$ et $\quad x^0 \leq x_1$,

ii) $\Gamma_0 = \{x_2\}$, $\Gamma_1 = \{x_1\}$ et $x^0 \geq x_2$.

2. Si $n \geq 2$ et $\Omega = \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_0$ où Ω_1 et Ω_0 sont deux domaines ouverts de frontières Γ_1 et Γ_0 respectivement, $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega_1$ et Ω_1 et Ω_0 sont étoilés par rapport à un point $x^0 \in \Omega_0$ (un domaine Ω est dit *étoilé* par rapport à x^0 si $m \cdot \nu > 0$ sur $\partial\Omega$), alors les hypothèses géométriques (3.2.15) sont satisfaites.

3. Si $n \geq 2$ et Ω n'est pas de la forme mentionnée dans l'exemple précédent, alors l'existence d'un point x^0 vérifiant les hypothèses géométriques (3.2.15) n'est pas valable en général. En appliquant une méthode d'approximation, on peut affaiblir considérablement ces hypothèses géométriques, au moins en dimension $n = 2, 3$, en adaptant des arguments donnés par V. Komornik et E. Zuazua [44] pour l'équation des ondes (voir aussi les références mentionnées dans [44]). D'autre part, il est possible d'affaiblir les hypothèses (3.2.15) en considérant le cas des domaines *presque étoilés* (une notion introduite et appliquée par P. Martinez [55]).

(H.4) Hypothèse sur f.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^1 telle que (3.2.3), $f(0) = 0$,

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq \alpha(1 + |s_1|^q + |s_2|^q)|s_1 - s_2|, \quad \forall s_1, s_2 \in \mathbb{R},$$

$$F(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R} \tag{3.2.16}$$

avec α, $q \geq 0$ et $(n-2)q \leq n$.

L'existence et la régularité des solutions de $(P3')$ peuvent être démontrées par la méthode de Galerkin (voir M. M. Cavalcanti, N. A. Lar'kin et J. A. Soriano [17] et S. Messaoudi [57]); mais ce point ne sera pas discuté ici. On utilise les notations :

$$V = \{v \in H^1(\Omega) : \ v = 0 \ \text{sur} \ \Gamma_0\} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \quad \text{et} \quad W = H^2(\Omega) \cap V,$$

on obtient :

1. Pour tout $(u_0, u_1) \in W \times V$ tel que $\partial_\nu u_0 + g(u_1) = 0$ sur Γ_1, le problème $(P3')$ admet une solution forte unique : $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que

$$u \in L^\infty(]0, +\infty[; W), \ \ u' \in L^\infty(]0, +\infty[; V) \ \text{ et } \ u'' \in L^\infty(]0, +\infty[; L^2(\Omega)).$$

2. Si $(u_0, u_1) \in V \times L^2(\Omega)$, alors (en utilisant des arguments standard de densité) le problème $(P3')$ admet une solution faible unique : $u : \Omega\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ dans l'espace

$$C(]0, +\infty]; V) \cap C^1(]0, +\infty[; L^2(\Omega)). \tag{3.2.17}$$

Voici maintenant les résultats de stabilité de $(P3')$.

Théorème 3.2.2. *Soit u une solution de $(P3')$ dans la classe (3.2.17). Supposons satisfaites les hypothèses (H.2), (H.3) et (H.4) avec $|\hat{\zeta}|$ assez petit, et b assez grand ou bien f linéaire. Alors l'énergie équivalente E de u, définie par (3.2.8), satisfait les estimations du théorème 3.2.1; autrement dit, E satisfait (3.2.12) si β est assez petit (ou nul) et $r = 1$, et E satisfait (3.2.13) si $\beta = 0$ et $r > 1$.*

Remarques. 1. Comme exemple de fonction f satisfaisant (H.4), on peut prendre $f(s) = \alpha s\,|s|^q$ avec α, $q \geq 0$ et $(n-2)q \leq n$. Les conditions (3.2.3) et (3.2.16) sont satisfaites pour tout $b \leq 1 + \frac{q}{2}$.

2. L'exemple le plus simple d'une fonction g vérifiant (3.2.4) et (3.2.5) est le suivant : $g(s) = \gamma|s|^{r-1}s$ si $|s| \leq 1$, et $g(s) = \gamma s$ si $|s| \geq 1$ où $\gamma > 0$.

3. Grâce à (3.2.16), l'énergie équivalente (3.2.8) satisfait l'inégalité

$$\int_\Omega \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2\right) dx \leq e^{\|\phi\|_\infty} E(t). \tag{3.2.18}$$

La quantité $\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$ définit une norme sur V équivalente à la norme usuelle de $H^1(\Omega)$; par conséquent, $V \times L^2(\Omega)$ muni de E est un espace de Hilbert.

4. Dans la démonstration du Théorème 3.2.2, on précise la condition imposée sur $|\hat{\zeta}|$ ainsi que celle imposée sur b dans le cas où f est non linéaire.

5. Comme $(P3)$ et $(P3')$ sont dissipatifs (au sens de l'énergie équivalente) si h est linéaire, alors on peut considérer des conditions sur le comportement de g au voisinage de zéro plus faibles que (3.2.5) et montrer des estimations générales de stabilité (comme, par exemple, celles démontrées par F. Alabau-Boussouira [1])

3.3. Feedback interne

Afin de justifier tous les calculs qui vont suivre, on montre tout d'abord les estimations (3.2.12) et (3.2.13) pour les solutions fortes; et par l'utilisation d'arguments standard de densité, on déduit ces mêmes estimations pour toute solution faible. Soient donc

$$(u_0, u_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$$

et u la solution de $(P3)$ correspondante (vérifiant (3.2.10)).

On va montrer que l'énergie équivalente (3.2.8) vérifie les hypothèses du Lemme 2.7 (Chapitre 2) pour obtenir les estimations cherchées.

Dans toute la suite de ce chapitre, c désigne une constante positive générique qui peut changer d'une ligne à l'autre et qui ne dépend pas de β.

On commence ce paragraphe par donner une formule explicite de la dérivée de E. En dérivant E, on obtient (noter que $\phi(x) = \hat{\zeta} \cdot x$) :

$$E'(t) = 2 \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(u'(u'' + f(u)) + \nabla u \cdot \nabla u' \Big)\, dx.$$

En utilisant $(P3)$ pour remplacer le terme $u'' + f(u)$, et en appliquant la formule de Green, on déduit

$$E'(t) = -2 \int_\Omega e^{\phi(x)} u' g(u')\, dx - 2 \int_\Omega e^{\phi(x)} u' \left(h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u \right)\, dx. \quad (3.3.1)$$

En utilisant maintenant (3.2.4), (3.2.7.), (3.2.9) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$E'(t) \leq 2 \int_\Omega e^{\phi(x)} |u'| |h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u|\, dx$$

$$\leq \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(\beta |u'|^2 + \frac{1}{\beta} |h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u|^2 \right)\, dx,$$

et par conséquent (où k est défini par (3.2.9))

$$E'(t) \leq \beta k E(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \quad (3.3.2)$$

d'où la deuxième inégalité de (2.27) avec $\lambda = \beta k$.

On montre maintenant que E vérifie la première inégalité de (2.27). Soient $0 \leq S \leq T < +\infty$. Multiplions la première équation de $(P3)$ par $E^{\frac{r-1}{2}}(t) e^{\phi(x)} u$ et intégrons la formule obtenue sur $\Omega \times [S, T]$, on obtient :

$$0 = \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u \left(u'' - \Delta u + h(\nabla u) + f(u) + g(u') \right)\, dx\, dt \quad (3.3.3)$$

$$= \left[E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u u'\, dx \right]_S^T$$

$$+ \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(- |u'|^2 + |\nabla u|^2 + u f(u) \right)\, dx\, dt$$

$$-\frac{r-1}{2}\int_S^T E^{\frac{r-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}uu'\,dx\,dt$$
$$+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}ug(u')\,dx\,dt$$
$$+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}u\left(h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u\right)\,dx\,dt.$$

Or, en utilisant (3.2.2.), (3.2.3), (3.2.7), (3.2.9), (3.3.1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\Big|\int_\Omega e^{\phi(x)}u\left(h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u\right)\,dx\Big|$$
$$\leq \frac{\beta}{2}\int_\Omega e^{\phi(x)}|u|^2\,dx+\frac{1}{2\beta}\int_\Omega e^{\phi(x)}|h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u|^2\,dx$$
$$\leq \beta c\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,dx,$$
$$\Big|E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}uu'\,dx\Big|\leq \frac{1}{2}E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}(|u'|^2+|u|^2)\,dx\leq cE^{\frac{r+1}{2}}(t),$$
$$\Big|\frac{r-1}{2}E^{\frac{r-3}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}uu'\,dx\Big|\leq cE^{\frac{r-1}{2}}(t)|E'(t)|$$
$$\leq cE^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}(2u'g(u')+2|u'||h(\nabla u)+\hat{\zeta}\cdot\nabla u|)\,dx$$
$$\leq cE^{\frac{r-1}{2}}(t)(-E'(t)+\beta cE(t))$$

et

$$uf(u)\geq 2bF(u),$$

donc on déduit de (3.3.3) que

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(|u'|^2+(1-\beta c)\,|\nabla u|^2+2bF(u)\right)\,dx\,dt \tag{3.3.4}$$
$$\leq \beta c\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(2\,|u'|^2-ug(u')\right)\,dx\,dt$$
$$+c(E^{\frac{r+1}{2}}(S)+E^{\frac{r+1}{2}}(T))-c\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)E'(t)\,dt.$$

En intégrant le dernier terme de (3.3.4) on obtient :

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(|u'|^2+(1-\beta c)\,|\nabla u|^2+2bF(u)\right)\,dx\,dt \tag{3.3.5}$$

$$\leq \beta c \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + c\left(E^{\frac{r+1}{2}}(S) + E^{\frac{r+1}{2}}(T)\right)$$

$$+ \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(2\left|u'\right|^2 - ug(u')\right)\,dx\,dt.$$

Comme $b < 1$, on suppose que β est assez petit tel que $1 - \beta c \geq b$, et on tire de (3.3.5) que

$$(b - \beta c) \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt \leq c\left(E^{\frac{r+1}{2}}(S) + E^{\frac{r+1}{2}}(T)\right) \tag{3.3.6}$$

$$+ \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} \left(2\left|u'\right|^2 - ug(u')\right)\,dx\,dt.$$

On majore maintenant la dernière intégrale de (3.3.6). On note :

$$\Omega^+ = \{x \in \Omega : |u'| > 1\} \quad \text{et} \quad \Omega^- = \Omega \setminus \Omega^+.$$

On applique les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Hölder, et on utilise (3.2.2), (3.2.4), (3.2.5), (3.2.9) et (3.3.1) on trouve, pour tout $\epsilon > 0$:

$$- \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega^+} e^{\phi(x)} ug(u')\,dx\,dt$$

$$\leq c \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \Big(\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)} |u|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\int_{\Omega^+} e^{\phi(x)} \Big|g(u')\Big|^2\,dx\Big)^{\frac{1}{2}}\,dt$$

$$\leq c \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \Big(\epsilon \int_{\Omega^+} e^{\phi(x)} |u|^2\,dx + \frac{c}{\epsilon} \int_{\Omega^+} e^{\phi(x)} u' g(u')\,dx\Big) dt$$

$$\leq c\epsilon \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + \frac{c}{\epsilon} \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u' g(u')\,dx\,dt$$

$$\leq c\epsilon \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt$$

$$+ \frac{c}{\epsilon} \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \Big(-E'(t) - 2 \int_\Omega e^{\phi(x)} u' (h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u)\,dx\Big)\,dt.$$

Or, d'après (3.2.7) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$|u'||h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u| \leq \frac{\beta}{2}(|u'|^2 + |\nabla u|^2),$$

donc

$$- \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega^+} e^{\phi(x)} ug(u')\,dx\,dt \tag{3.3.7}$$

$$\leq c(\epsilon + \frac{\beta}{\epsilon}) \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t) + \frac{c}{\epsilon} E^{\frac{r+1}{2}}(S).$$

De même,

$$- \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} u g(u')\, dx\, dt$$

$$\leq \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \left(\epsilon \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} |u|^2\, dx + \frac{c}{\epsilon} \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} g^2(u')\, dx \right) dt$$

$$\leq c\epsilon \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt + \frac{c}{\epsilon} \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega-} \left(e^{\phi(x)} u' g(u') \right)^{\frac{2}{r+1}} dx\, dt$$

$$\leq c\epsilon \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt$$

$$+ \frac{c}{\epsilon} \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \left(-E'(t) - 2 \int_\Omega e^{\phi(x)} u' (h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u)\, dx \right)^{\frac{2}{r+1}} dt.$$

On distingue maintenant deux cas.

Si $h(\nabla u) = -\hat{\zeta} \cdot \nabla u$ ($\beta = 0$), alors, d'après (3.3.1) et l'inégalité de Young,

$$- \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} u g(u')\, dx\, dt$$

$$\leq c\epsilon \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt + \frac{c}{\epsilon} \left(\epsilon^2 \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt + \epsilon^{1-r} E(S) \right)$$

$$\leq c\epsilon \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt + c\epsilon^{-r} E(S).$$

Si $\beta > 0$ (dans ce cas-là, on a supposé que $r = 1$), alors, d'après (3.3.1) et (3.2.7),

$$- \int_S^T \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} u g(u')\, dx\, dt$$

$$\leq c\epsilon \int_S^T E(t)\, dt + \frac{c}{\epsilon} \int_S^T \left(-E'(t) - 2 \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} u' (h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u)\, dx \right) dt$$

$$\leq c\epsilon \int_S^T E(t)\, dt + \frac{c}{\epsilon} E(S) + \frac{c\beta}{\epsilon} \int_S^T E(t)\, dt.$$

Donc, dans les deux cas, on obtient :

$$- \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} u g(u')\, dx\, dt \qquad (3.3.8)$$

$$\leq c(\epsilon + \frac{\beta}{\epsilon}) \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt + c\epsilon^{-r} E(S).$$

Les deux inégalités (3.3.7) et (3.3.8) impliquent que

$$- \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u g(u')\, dx\, dt \tag{3.3.9}$$

$$\leq c(\epsilon + \frac{\beta}{\epsilon}) \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt + c \left(\epsilon^{-r} E(S) + \frac{1}{\epsilon} E^{\frac{r+1}{2}}(S) \right).$$

De la même manière, on majore le terme $\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} |u'|^2\, dx\, dt$. On a, d'après (3.2.5), (3.2.7) et (3.3.1) :

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega+} e^{\phi(x)} |u'|^2\, dx\, dt \tag{3.3.10}$$

$$\leq c \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega+} e^{\phi(x)} u' g(u')\, dx\, dt$$

$$\leq c\beta \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt + cE^{\frac{r+1}{2}}(S).$$

D'autre part, d'après (3.2.5) et (3.3.1), on a :

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} |u'|^2\, dx\, dt \leq c \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega-} \left(e^{\phi(x)} u' g(u') \right)^{\frac{2}{r+1}} dx\, dt$$

$$\leq c \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \Big(\int_{\Omega-} e^{\phi(x)} u' g(u')\, dx \Big)^{\frac{2}{r+1}} dt$$

$$\leq c \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \Big(-E'(t) + c\beta E(t) \Big)^{\frac{2}{r+1}} dt.$$

En distinguant les deux cas ($\beta = 0$ et $\beta > 0$) et en utilisant l'inégalité de Young, on trouve : si $\beta = 0$,

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} |u'|^2\, dx\, dt \leq c\epsilon \int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt + c\epsilon^{\frac{1-r}{2}} E(S),$$

et si $\beta > 0$ (dans ce cas-là, on a supposé que $r = 1$),

$$\int_S^T \int_{\Omega-} e^{\phi(x)} |u'|^2\, dx\, dt \leq c\beta \int_S^T E(t)\, dt + cE(S).$$

Donc, on déduit que

$$\int_S^T \int_{\Omega^-} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,dt \le c(\epsilon+\beta)\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + c\epsilon^{\frac{1-r}{2}}E(S). \qquad (3.3.11)$$

Les deux inégalités (3.3.10) et (3.3.11) impliquent que

$$\int_S^T \int_{\Omega} e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx\,dt \qquad (3.3.12)$$

$$\le c(\epsilon+\beta)\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt + c\left(\epsilon^{\frac{1-r}{2}}E(S)+E^{\frac{r+1}{2}}(S)\right).$$

On substitue les deux inégalités (3.3.9) et (3.3.12) dans (3.3.6), on trouve :

$$(b-c(\beta+\frac{\beta}{\epsilon}+\epsilon))\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt \qquad (3.3.13)$$

$$\le c(1+\frac{1}{\epsilon})E^{\frac{r+1}{2}}(S)+c(\epsilon^{\frac{1-r}{2}}+\epsilon^{-r})E(S)+cE^{\frac{r+1}{2}}(T).$$

Finalement, si $\beta=0$ (donc E est décroissante), on choisit $\epsilon<\frac{b}{c}$ et on déduit de (3.3.13) que

$$\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt \le c\left(E(S)+E^{\frac{r+1}{2}}(S)+E^{\frac{r+1}{2}}(T)\right) \le c\left(E(S)+E^{\frac{r+1}{2}}(S)\right)$$

d'où, d'après le Lemme 2.7, les inégalités (3.2.12) et (3.2.13).

Si $\beta>0$ (donc, par hypothèse, $r=1$), on prend $\epsilon=\sqrt{\beta}$ et on obtient :

$$(b-c(\beta+\sqrt{\beta}))\int_S^T E(t)\,dt \le c_\beta E(S)+cE(T)$$

où c_β est une constante dépendant de β. On suppose que β est assez petit pour que $\beta+\sqrt{\beta}<\frac{b}{c}$ et $\frac{ck\beta}{b-c(\beta+\sqrt{\beta})}<1$ (la constante k est définie par (3.2.9)), on obtient :

$$\int_S^T E(t)\,dt \le cE(S)+cE(T)$$

d'où, d'après le Lemme 2.7, l'inégalité (3.2.12).

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.2.1.

3.4. Feedback frontière : cas non dissipatif

Dans ce paragraphe, on montre l'estimation (3.2.12) (stabilité exponentielle de $(P3')$).

La démonstration est très similaire à celle donnée dans le paragraphe 3.3.

En utilisant la première équation de $(P3')$ et les conditions au bord, on montre facilement que (noter que $\phi(x) = \hat{\zeta} \cdot x$)

$$E'(t) = -2 \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} u' g(u')\, dx - 2 \int_{\Omega} e^{\phi(x)} u' (h\,(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u)\, dx. \quad (3.4.1)$$

En utilisant (H.2), (H.3) et (H.4), on déduit de (3.4.1) que

$$E'(t) \le -2 \int_{\Omega} e^{\phi(x)} u' (h\,(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u)\, dx$$

$$\le \beta \int_{\Omega} e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2 \right) dx \le \beta E(t),$$

donc E satisfait la deuxième inégalité de (2.27) (avec $\lambda = \beta$). On montre maintenant que E vérifie aussi, pour deux constantes $\bar{a}$ et $\hat{a}$, l'inégalité suivante :

$$\int_S^T E(t) dt \le \bar{a} E(S) + \hat{a} E(T). \quad (3.4.2)$$

Soit $0 < \epsilon_0 \le 1$ (ϵ_0 sera fixé ultérieurement). On multiplie la première équation de $(P3')$ par :

$$e^{\phi(x)} \left(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\right)$$

où m est défini par (3.2.14) et (3.2.15), et on utilise les conditions au bord. On note :

$$I_1 = \int_S^T \int_{\Omega} e^{\phi(x)} u'' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u \Big)\, dx\, dt,$$

$$I_2 = \int_S^T \int_{\Omega} e^{\phi(x)} (-\Delta u - \hat{\zeta} \cdot \nabla u) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u \Big)\, dx\, dt,$$

$$I_3 = \int_S^T \int_{\Omega} e^{\phi(x)} \Big(h(\nabla u) + \hat{\zeta} \cdot \nabla u \Big) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u \Big)\, dx\, dt,$$

$$I_4 = \int_S^T \int_{\Omega} e^{\phi(x)} f(u) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u \Big)\, dx\, dt.$$

On commence par majorer les intégrales I_i (qui vérifient : $I_1+I_2+I_3+I_4 = 0$). On a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} u'' \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt \\ &= \Big[\int_\Omega e^{\phi(x)} u' \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\Big]_S^T \\ &\quad - \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(m\cdot\nabla(u')^2 + (n-\epsilon_0)\,|u'|^2\Big)\,dx\,dt \\ &= \int_S^T \int_\Omega (\epsilon_0 + \hat{\zeta}\cdot m) e^{\phi(x)}\,|u'|^2\,dx\,dt - \int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)\,|u'|^2\,d\Gamma\,dt \\ &\quad + \Big[\int_\Omega e^{\phi(x)} u' \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\Big]_S^T. \end{aligned}$$

On majore le dernier terme de cette inégalité, on a :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)^2 dx - \int_\Omega e^{\phi(x)} (2m\cdot\nabla u)^2\,dx \\ &= \int_\Omega e^{\phi(x)}\,\Big((n-\epsilon_0)^2\,|u|^2 + 2(n-\epsilon_0) m\cdot\nabla(u)^2\Big)\,dx \\ &= \int_\Omega e^{\phi(x)}\,\Big((n-\epsilon_0)^2\,|u|^2 - 2(n-\epsilon_0) n\,|u|^2\Big)\,dx \\ &\quad + 2(n-\epsilon_0)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)\,|u|^2\,d\Gamma \\ &= (\epsilon_0+n)(\epsilon_0-n)\int_\Omega e^{\phi(x)}\,|u|^2\,dx + 2(n-\epsilon_0)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)\,|u|^2\,d\Gamma \\ &\le 2(n-\epsilon_0)R\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\,|u|^2\,d\Gamma \end{aligned}$$

(noter que $\epsilon_0 - n \le 1 - n \le 0$), alors

$$\begin{aligned} &\int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)^2 dx \\ &\le \int_\Omega e^{\phi(x)} (2m\cdot\nabla u)^2\,dx + 2(n-\epsilon_0)R\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\,|u|^2\,d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

Et par conséquent, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\Big|\int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big) u'\,dx\Big|$$

$$\leq \frac{\epsilon}{2}\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|u'\right|^2 dx+\frac{1}{2\epsilon}\Big(\int_\Omega e^{\phi(x)}(2m\cdot\nabla u)^2\,dx+2(n-\epsilon_0)R\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\left|u\right|^2\,d\Gamma\Big)$$

$$\leq \int_\Omega e^{\phi(x)}\left(\frac{\epsilon}{2}\left|u'\right|^2+\frac{2R^2}{\epsilon}\left|\nabla u\right|^2\,dx\right)+\frac{R}{\epsilon}(n-\epsilon_0)\bar{c}\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx$$

où $\bar{c}$ est la plus petite constante positive vérifiant (inégalité de Poincaré) :

$$\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|v|^2\,d\Gamma \leq \bar{c}\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla v|^2\,dx, \quad \forall v\in V=H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{3.4.4}$$

Choisissons $\epsilon = 2\sqrt{R(R+\frac{\bar{c}}{2}(n-\epsilon_0))}$ et posons $a_1=\sqrt{R(R+\frac{\bar{c}}{2}(n-\epsilon_0))}$, on obtient :

$$\Big|\int_\Omega e^{\phi(x)}\Big(2m\cdot\nabla u+(n-\epsilon_0)u\Big)u'\,dx\Big| \leq a_1E(t).$$

Donc, on déduit que

$$I_1 \geq -a_1(E(S)+E(T))-R\int_S^T\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\left|u'\right|^2\,d\Gamma\,dt \tag{3.4.5}$$

$$+(\epsilon_0-R\|\nabla\phi\|_\infty)\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|u'\right|^2\,dx\,dt.$$

D'autre part, en utilisant la formule générale de Green et l'identité

$$2\nabla u\cdot\nabla(m\cdot\nabla u)=2\left|\nabla u\right|^2+m\cdot\nabla(|\nabla u|^2)$$

(noter aussi que sur Γ_0 on a : $\nabla u=\partial_\nu u\nu$), on trouve :

$$I_2=\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}(-\Delta u-\hat{\zeta}\cdot\nabla u)\Big(2m\cdot\nabla u+(n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt$$

$$=\int_S^T\int_\Omega (2+\hat{\zeta}\cdot m-\epsilon_0)e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx\,dt-\int_S^T\int_{\Gamma_0} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)\left|\nabla u\right|^2\,d\Gamma\,dt$$

$$+\int_S^T\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big((m\cdot\nu)\left|\nabla u\right|^2-(n-\epsilon_0)u\partial_\nu u-2(m\cdot\nabla u)\partial_\nu u\Big)\,d\Gamma\,dt.$$

En utilisant la définition (3.2.15) de Γ_0 et Γ_1, on conclut que

$$I_2\geq (2-\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx\,dt$$

$$+\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(\delta\,|\nabla u|^2 - (n-\epsilon_0)u\partial_\nu u - \delta\,|\nabla u|^2 - \frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2\Big)\,d\Gamma\,dt$$

d'où

$$I_2 \geq (2-\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|)\int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}\,|\nabla u|^2\,dx\,dt \tag{3.4.6}$$

$$-\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big((n-\epsilon_0)u\partial_\nu u + \frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2\Big)\,d\Gamma\,dt.$$

De même, en utilisant (3.2.7), (3.4.3) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve :

$$I_3 = \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}\,\Big(h(\nabla u) + \hat{\zeta}\cdot\nabla u\Big)\,\Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt$$

$$\geq -\frac{R}{\beta}\int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}(h(\nabla u) + \hat{\zeta}\cdot\nabla u)^2\,dx\,dt$$

$$-\frac{\beta}{4R}\int_S^T \Big(4R^2\int_\Omega e^{\phi(x)}\,|\nabla u|^2\,dx + 2(n-\epsilon_0)R\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\,|u|^2\,d\Gamma\Big)\,dt,$$

et par conséquent

$$I_3 \geq -2\beta R\int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}\,|\nabla u|^2\,dx\,dt \tag{3.4.7}$$

$$-\frac{\beta}{2}(n-\epsilon_0)\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\,|u|^2\,d\Gamma\,dt.$$

En utilisant (3.2.3) et le fait que $F(0)=0$ et F soit positive, on obtient :

$$I_4 = \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} f(u)\Big(2m\cdot\nabla u + (n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt$$

$$\geq (n-\epsilon_0)b\int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}2F(u)\,dx\,dt + \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}2m\cdot\nabla(F(u))\,dx\,dt$$

$$\geq \int_S^T \int_\Omega ((n-\epsilon_0)b - n - \hat{\zeta}\cdot m)e^{\phi(x)}2F(u)\,dx\,dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}2(m\cdot\nu)F(u)\,d\Gamma\,dt.$$

On en déduit alors que

$$I_4 \geq ((n-\epsilon_0)b - n - R|\hat{\zeta}|)\int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}2F(u)\,dx\,dt. \tag{3.4.8}$$

On distingue maintenant deux cas (qui correspondent aux hypothèses du Théorème 3.2.2 : f est linéaire ou b est assez grand).

Cas 1 : f est non linéaire. On suppose que

$$R\beta < 1, \quad R|\hat{\zeta}| < \min\{1 - R\beta, n\} \quad \text{et} \quad b > \frac{n + R|\hat{\zeta}|}{n - R|\hat{\zeta}|}.$$

On choisit alors

$$\epsilon_0 \in]R|\hat{\zeta}|, \min\{2(1 - R\beta) - R|\hat{\zeta}|, n - \frac{n + R|\hat{\zeta}|}{b}\}[,$$

ce qui implique que $\epsilon_1 > 0$ où

$$\epsilon_1 = \min\{\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|, 2 - \epsilon_0 - 2R\beta - R|\hat{\zeta}|, (n - \epsilon_0)b - n - R|\hat{\zeta}|\}.$$

Combinons (3.4.5)-(3.4.8) et notons que $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$. On obtient :

$$\epsilon_1 \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + 2F(u)\Big)\, dx\, dt \leq a_1(E(S) + E(T)) \tag{3.4.9}$$

$$+ \int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \Big(R\,|u'|^2 + \frac{\beta}{2}(n - \epsilon_0)\,|u|^2 + (n - \epsilon_0)u\partial_\nu u + \frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2\Big)\, d\Gamma\, dt.$$

Cas 2 : f est linéaire. Si $f(s) = \alpha s$ pour une constante $\alpha > 0$ (donc $b = 1$ dans (3.2.3)), on déduit de (3.4.8) que

$$I_4 \geq -(\epsilon_0 + R|\hat{\zeta}|) \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u)\, dx\, dt$$

$$= (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|) \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u)\, dx\, dt - 2\epsilon_0 \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u)\, dx\, dt$$

$$= (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|) \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u)\, dx\, dt - 2\epsilon_0\alpha \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}\, |u|^2\, dx\, dt$$

$$\geq (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|) \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)} 2F(u)\, dx\, dt - 2\epsilon_0\alpha c_0 \int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}\, |\nabla u|^2\, dx\, dt$$

où c_0 est la constante définie par (3.2.2). On suppose dans ce cas-là que

$$R\beta < 1 \quad \text{et} \quad R|\hat{\zeta}| < \frac{1 - R\beta}{1 + \alpha c_0}.$$

On choisit alors $\epsilon_0 \in]R|\hat{\zeta}|, \frac{2(1-R\beta)-R|\hat{\zeta}|}{1+2\alpha c_0}[$, ce qui implique que $\epsilon_1 > 0$ où

$$\epsilon_1 = \min\{\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|, 2 - \epsilon_0 - 2R\beta - R|\hat{\zeta}| - 2\epsilon_0\alpha c_0\}. \tag{3.4.10}$$

On obtient donc la même inégalité (3.4.9).

En utilisant maintenant la condition au bord sur Γ_1, on obtient dans les deux cas précédents :

$$\epsilon_1 \int_S^T E(t)\,dt \leq a_1(E(S)+E(T)) \tag{3.4.11}$$

$$+\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(R\,|u'|^2 + \frac{R^2}{\delta} g^2(u') + \frac{\beta}{2}(n-\epsilon_0)\,|u|^2 - (n-\epsilon_0)ug(u')\Big)\,d\Gamma\,dt.$$

En utilisant (3.4.1), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en prenant en considération les hypothèses (3.2.4), (3.2.5) (avec $r=1$) et (3.2.7) on trouve :

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(R|u'|^2 + \frac{R^2}{\delta} g^2(u')\Big)\,dx\,dt \leq (\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta}c_2)\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} u'g(u')\,dx\,dt$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta}c_2)\int_S^T \left(-E'(t) - 2\int_\Omega e^{\phi(x)}u'(h(\nabla u) + \hat{\zeta}\cdot\nabla u)\,dx\right)\,dt$$

$$\leq \frac{1}{2}(\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta}c_2)(E(S)-E(T)) + \frac{1}{2}(\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta}c_2)\beta\int_S^T \int_\Omega e^{\phi(x)}\left(|u'|^2 + |\nabla u|^2\right)\,dx\,dt.$$

On note : $a_2 = \frac{1}{2}(\frac{R}{c_1} + \frac{R^2}{\delta}c_2)$, on déduit que

$$\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(R|u'|^2 + \frac{R^2}{\delta} g^2(u')\Big)\,dx\,dt \tag{3.4.12}$$

$$\leq a_2(E(S)-E(T)) + \beta a_2 \int_S^T E(t)\,dt.$$

De même, on a : pour tout $\epsilon > 0$ et $\epsilon' > 0$ (où $\bar{c}$ est défini par (3.4.4)),

$$(n-\epsilon_0)\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(\frac{\beta}{2}|u|^2 - ug(u')\Big)\,dx\,dt$$

$$\leq \frac{1}{2}(n-\epsilon_0)\int_S^T \int_{\Gamma_1}\left(\frac{1}{\epsilon}g^2(u') + (\beta+\epsilon)|u|^2\right)\,dx\,dt$$

$$\leq \frac{1}{2}(n-\epsilon_0)\int_S^T \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\left(\frac{c_2}{\epsilon}u'g(u') + (\beta+\epsilon)|u|^2\right)\,dx\,dt$$

$$\leq \frac{c_2}{2\epsilon}(n-\epsilon_0)\int_S^T \left(-\frac{1}{2}E'(t) - \int_\Omega e^{\phi(x)}u'(h(\nabla u) + \hat{\zeta}\cdot\nabla u)\,dx\right)\,dt$$

$$+\frac{1}{2}(\beta+\epsilon)(n-\epsilon_0)\bar{c}\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,dx\,dt$$

$$\leq \frac{c_2}{4\epsilon}(n-\epsilon_0)(E(S)-E(T))+\frac{1}{2}(\beta+\epsilon)(n-\epsilon_0)\bar{c}\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,dx\,dt$$

$$+\frac{c_2}{2\epsilon}(n-\epsilon_0)\int_S^T\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(\frac{\epsilon'\beta^2}{2}|\nabla u|^2+\frac{1}{2\epsilon'}|u'|^2\right)\,dx\,dt,$$

on choisit : $\epsilon=\beta\sqrt{\frac{c_2\epsilon'}{2\bar{c}}}$, $\epsilon'=\frac{1}{\beta\sqrt{2}}$ et on note :

$$a_3=\frac{1}{2}(n-\epsilon_0)\sqrt{\frac{\bar{c}c_2}{\sqrt{2}\beta}},\quad a_4=(n-\epsilon_0)(\frac{\beta\bar{c}}{2}+\sqrt{\frac{\bar{c}c_2\beta}{2\sqrt{2}}}).$$

On trouve :

$$(n-\epsilon_0)\int_S^T\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big(\frac{\beta}{2}|u'|^2-ug(u')\Big)\,dx\,dt \tag{3.4.13}$$

$$\leq a_4\int_S^T E(t)\,dt+a_3(E(S)-E(T)).$$

En combinant (3.4.11), (3.4.12) et (3.4.13) on obtient :

$$(\epsilon_1-\beta a_2-a_4)\int_S^T E(t)dt \tag{3.4.14}$$

$$\leq (a_1+a_2+a_3)E(S)+(a_1-a_2-a_3)E(T).$$

On suppose β assez petit de sorte que

$$\max\{\beta a_2+a_4,\beta(a_1-a_3)+a_4\}<\epsilon_1$$

(noter que, quand β converge vers zéro, βa_2+a_4 et $\beta(a_1-a_3)+a_4$ convergent vers zéro, et ϵ_1 reste strictement positif), on note :

$$\bar{a}=\frac{a_1+a_2+a_3}{\epsilon_1-\beta a_2-a_4},\quad \hat{a}=\frac{a_1-a_2-a_3}{\epsilon_1-\beta a_2-a_4}$$

et on obtient (3.4.2) avec $\beta\hat{a}<1$ d'où on déduit, d'après le Lemme 2.7, l'estimation (3.2.12).

Ceci achève la démonstration du Théorème 3.2.2 dans le cas non dissipatif ($\beta>0$ dans (3.2.7)).

3.5. Feedback frontière : cas dissipatif

Dans ce paragraphe, on montre les estimations (3.2.12) et (3.2.13) du Théorème 3.2.2 dans le cas où $h(\nabla u) = -\hat{\zeta} \cdot \nabla u$ avec $\hat{\zeta} \in \mathbb{R}^n$ (donc $\beta = 0$ dans (3.2.7)).

Dans ce paragraphe, on note par c une constante positive générique, par ϵ une constante positive générique assez petite et c_ϵ une constante positive générique dépendant de ϵ (et qui peuvent changer d'une ligne à l'autre).

Comme $h(\nabla u) = -\hat{\zeta} \cdot \nabla u$ et g est croissante, (3.4.1) implique que

$$E'(t) = -2 \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} u' g(u')\, dx \leq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ \tag{3.5.1}$$

où $\phi(x) = \hat{\zeta} \cdot x$. Ainsi, $(P3')$ est dissipatif.

On fixe $\epsilon_0 > 0$, on multiplie la première équation de $(P3')$ par :

$$E^{\frac{r-1}{2}}(t) e^{\phi(x)} \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)$$

et on intègre la formule obtenue sur $\Omega \times [S, T]$, on obtient : $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ où

$$I_1 = \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u'' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt,$$

$$I_2 = \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} (-\Delta u - \hat{\zeta} \cdot \nabla u) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt,$$

$$I_3 = \int_S^T \int_\Omega E^{\frac{r-1}{2}}(t) e^{\phi(x)} f(u) \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt.$$

On estime maintenant les intégrales I_i. On a :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u'' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt \\
&= \Big[E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} u' \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\Big]_S^T \\
&\quad - \frac{r-1}{2} \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) E'(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(2m \cdot \nabla u + (n - \epsilon_0) u\Big)\, dx\, dt \\
&\quad - \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} \int_\Omega \Big(m \cdot \nabla (u')^2 + (n - \epsilon_0) \left|u'\right|^2\Big)\, dx\, dt \\
&= \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} (\epsilon_0 + \hat{\zeta} \cdot m) \left|u'\right|^2\, dx\, dt
\end{aligned}$$

$$-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)\left|u'\right|^2\,d\Gamma\,dt$$
$$+\Big[E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}u'\Big(2m\cdot\nabla u+(n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\Big]_S^T$$
$$-\frac{r-1}{2}\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)E'(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\Big(2m\cdot\nabla u+(n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt.$$

Les deux derniers termes de cette égalité peuvent être majorés par $cE^{\frac{r+1}{2}}(S)$, on déduit donc (d'après (3.2.14)) :

$$I_1\geq -cE^{\frac{r+1}{2}}(S)-R\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\left|u'\right|^2\,d\Gamma\,dt \tag{3.5.2}$$
$$+(\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|u'\right|^2\,dx\,dt.$$

D'autre part, en utilisant la formule de Green (voir le paragraphe 4 de ce chapitre), on trouve :

$$I_2=\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}(-\Delta u-\hat{\zeta}\cdot\nabla u)\Big(2m\cdot\nabla u+(n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt$$
$$=\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega(2+\hat{\zeta}\cdot m-\epsilon_0)e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx\,dt$$
$$-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_0} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)\left|\nabla u\right|^2\,d\Gamma\,dt$$
$$+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big((m\cdot\nu)\left|\nabla u\right|^2-(n-\epsilon_0)u\partial_\nu u-2(m\cdot\nabla u)\partial_\nu u\Big)\,d\Gamma\,dt.$$

D'après la définition (3.2.15) de Γ_0 et Γ_1, on conclut que

$$I_2\geq(2-\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\left|\nabla u\right|^2\,dx\,dt \tag{3.5.3}$$
$$-\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\Big((n-\epsilon_0)u\partial_\nu u+\frac{R^2}{\delta}(\partial_\nu u)^2\Big)\,d\Gamma\,dt.$$

En utilisant maintenant (3.2.3) et le fait que F soit positive, on obtient :

$$I_3=\int_S^T\int_\Omega E^{\frac{r-1}{2}}(t)e^{\phi(x)}f(u)\Big(2m\cdot\nabla u+(n-\epsilon_0)u\Big)\,dx\,dt$$

$$
\begin{aligned}
&\geq (n-\epsilon_0)b\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}m\cdot\nabla(F(u))\,dx\,dt \\
\geq &\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega((n-\epsilon_0)b-n-\hat{\zeta}\cdot m)2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&+\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma_1} 2e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)F(u)\,d\Gamma\,dt,
\end{aligned}
$$

on déduit donc, d'après (3.2.15),

$$
I_3 \geq ((n-\epsilon_0)b-n-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt. \tag{3.5.4}
$$

On distingue maintenant deux cas correspondant à la linéarité de f.

Cas 1 : f est non linéaire. On suppose que $R|\hat{\zeta}| < 1$ et $b > \frac{n+R|\hat{\zeta}|}{n-R|\hat{\zeta}|}$, et on choisit :

$$
R|\hat{\zeta}| < \epsilon_0 < \min\{2-R|\hat{\zeta}|, n-\frac{n+R|\hat{\zeta}|}{b}\},
$$

ce qui implique que

$$
\min\{\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|, 2-\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|, (n-\epsilon_0)b-n-R|\hat{\zeta}|\} > 0.
$$

Cas 2 : f est linéaire. Si $f(s)=\alpha s$ pour une constante positive α (donc $b=1$ dans (3.2.3)), on trouve, d'après (3.5.4) :

$$
\begin{aligned}
I_3 &\geq (-\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&= (\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&\quad -2\epsilon_0\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&= (\epsilon_0-R|\hat{\zeta}|)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega 2e^{\phi(x)}F(u)\,dx\,dt \\
&\quad -2\epsilon_0\alpha\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}\,|u|^2\,dx\,dt
\end{aligned}
$$

$$\geq (\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|) \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega 2e^{\phi(x)} F(u)\, dx\, dt$$

$$-2\epsilon_0 \alpha c_0 \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} |\nabla u|^2 \, dx\, dt$$

où c_0 est la constante définie par (3.2.2). On suppose dans ce cas-là que $R|\hat{\zeta}| < \frac{1}{1+\alpha c_0}$ et on prend $\epsilon_0 \in]R|\hat{\zeta}|, \frac{2-R|\hat{\zeta}|}{1+2\alpha c_0}[$. Ceci implique que

$$\min\{\epsilon_0 - R|\hat{\zeta}|, 2 - R|\hat{\zeta}| - (1+2\alpha c_0)\epsilon_0\} > 0.$$

En combinant (3.5.2)-(3.5.4) et en prenant en considération la condition au bord sur Γ_1, on déduit de l'égalité $I_1 + I_2 + I_3 = 0$ que

$$\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt \leq cE^{\frac{r+1}{2}}(S) \tag{3.5.5}$$

$$+c \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \Big(|u'|^2 + g^2(u') + |ug(u')|\Big)\, d\Gamma\, dt.$$

On majore maintenant le dernier terme de (3.5.5). On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité (3.4.4) on trouve :

$$\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} |ug(u')|\, d\Gamma \leq \epsilon \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} |u|^2\, d\Gamma + c_\epsilon \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} g^2(u')\, d\Gamma$$

$$\leq \epsilon E(t) + c_\epsilon \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} g^2(u')\, d\Gamma.$$

En substituant cette inégalité dans (3.5.5) et en choisissant $\epsilon > 0$ assez petit, on obtient :

$$\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\, dt \leq cE^{\frac{r+1}{2}}(S) \tag{3.5.6}$$

$$+c \int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \Big(|u'|^2 + g^2(u')\Big)\, d\Gamma\, dt.$$

On suit maintenant la méthode utilisée dans le paragraphe précédent. On note :

$$\Gamma^+ = \{x \in \Gamma_1 : |u'| > 1\} \quad \text{et} \quad \Gamma^- = \Gamma_1 \setminus \Gamma^+.$$

D'après (3.2.5) et (3.5.1), on a :

$$\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t) \int_{\Gamma^+} e^{\phi(x)} (|u'|^2 + g^2(u'))\, dx\, dt$$

$$\leq cE^{\frac{r-1}{2}}(S)\int_S^T E^{\frac{r-1}{2}}(t)\int_{\Gamma+} e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\,dt$$
$$\leq c\left(E^{\frac{r+1}{2}}(S)-E^{\frac{r+1}{2}}(T)\right)\leq cE^{\frac{r+1}{2}}(S).$$

De la même manière (en utilisant l'inégalité de Young), on trouve :

$$\int_S^T\int_{\Gamma-} E^{\frac{r-1}{2}}(t)e^{\phi(x)}(|u'|^2+g^2(u'))\,dx\,dt$$
$$\leq c\int_S^T\int_{\Gamma-} E^{\frac{r-1}{2}}(t)\Big(e^{\phi(x)}u'g(u')\Big)^{\frac{2}{r+1}}\,dx\,dt$$
$$\leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+c_\epsilon\int_S^T\int_{\Gamma-} e^{\phi(x)}u'g(u')\,dx\,dt$$
$$\leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+c_\epsilon\,(E(S)-E(T))\leq \epsilon\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\,dt+c_\epsilon E(S).$$

En substituant la somme de ces deux dernière inégalités dans (3.5.6) et en choisissant ϵ assez petit, on déduit que, pour tout $0\leq S\leq T<+\infty$,

$$\int_S^T E^{\frac{r+1}{2}}(t)\leq c(E(S)+E^{\frac{r+1}{2}}(S)).$$

On en déduit, grâce à (3.5.1) et au Lemme 2.7, la stabilité exponentielle et la stabilité polynômiale de $(P3')$ (estimations (3.2.12) et (3.2.13)). Ceci achève la démonstration du Théorème 3.2.2.

CHAPITRE 4

Equation des ondes avec conditions aux limites de type mémoire

4.1. Introduction

Dans ce chapitre, on étudie l'existence des solutions et le comportement asymptotique de l'énergie du système non linéaire avec conditions aux limites de type mémoire suivant :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + F(x,t,u,\nabla u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u + \int_0^t g(t-s)\partial_\nu u(s)ds = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u^1(x) & \Omega \end{cases} \tag{P4}$$

où Ω est un domaine ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ assez régulière. Ici, Γ_0 et Γ_1 sont fermés, disjoints et $\Gamma_0 \neq \emptyset$. L'équation imposée sur Γ_1 représente la condition au bord de type mémoire.

On observe que dans le système $(P4)$, u représente le déplacement transversal, et la fonction de relaxation $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est décroissante appartenant à $C^2(\mathbb{R}^+) \cap W^{2,1}(\mathbb{R}^+)$ telle que $g(0) > 0$. Soit γ une constante telle que $\gamma \geq 0$ si $n = 1, 2$, et $0 \leq \gamma \leq \frac{2}{n-2}$ si $n \geq 3$. Supposons que la fonction $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 vérifiant, pour tout $(x,t,\xi,\zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$:

$$|F(x,t,\xi,\zeta)| \leq c(1 + |\xi|^{\gamma+1} + |\zeta|) \tag{4.1.1}$$

où c est une constante positive.

Supposons qu'il existe une fonction positive $\varphi(t)$ dans l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^+)$, une fonction $\phi(x)$ dans l'espace $W^{1,\infty}(\Omega)$ et une constante positive D telles que, pour tout $(x,t,\xi,\zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$\Big(F(x,t,\xi,\zeta) + \nabla\phi(x) \cdot \zeta\Big)\eta \geq D|\xi|^\gamma \xi\eta - \varphi(t)(1 + |\eta||\zeta|), \quad \forall \eta \in \mathbb{R}. \tag{4.1.2}$$

En particulier,

$$\begin{aligned} &\Big(F(x,t,\xi,\zeta) + \nabla\phi(x) \cdot \zeta\Big)(m(x) \cdot \zeta) \\ &\geq D|\xi|^\gamma \xi(m(x) \cdot \zeta) - \varphi(t)\Big(1 + |\zeta||m(x) \cdot \zeta|\Big) \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

pour toute fonction $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. On suppose aussi l'existence de constantes positives $c_1, \ldots, c_{n+2}$ vérifiant (la notation ∂_y désigne la dérivée par rapport à y), pour tout $(x, t, \xi, \zeta) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$,

$$|\partial_t F(x, t, \xi, \zeta)| \leq c_{n+2}(1 + |\xi|^{\gamma+1} + |\zeta|), \tag{4.1.4}$$

$$|\partial_\xi F(x, t, \xi, \zeta)| \leq c_{n+1}(1 + |\xi|^\gamma), \tag{4.1.5}$$

$$|\partial_{\zeta_i} F(x, t, \xi, \zeta)| \leq c_i, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.1.6}$$

On suppose aussi qu'il existe deux constantes positives D_1, D_2 vérifiant, pour tout $(x, t, \xi, \zeta, \hat{\xi}, \hat{\zeta}) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, l'inégalité suivante :

$$\Big(F(x, t, \xi, \zeta) - F(x, t, \hat{\xi}, \hat{\zeta})\Big)(\eta - \hat{\eta})$$

$$\geq -D_1(|\xi|^\gamma + |\hat{\xi}|^\gamma)|\xi - \hat{\xi}||\eta - \hat{\eta}| - D_2|\eta - \hat{\eta}||\zeta - \hat{\zeta}|, \quad \forall \eta, \ \hat{\eta} \in \mathbb{R}. \tag{4.1.7}$$

Exemple. On considère la fonction

$$F(x, t, u, \nabla u) = |u|^\gamma u + \varphi(t) \sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - \nabla\phi(x) \cdot \nabla u$$

où φ et ϕ sont deux fonctions assez régulières. La fonction F satisfait les hypothèses ci-dessus.

Remarque. L'hypothèse (4.1.2) implique que

$$\Big(F(x, t, \xi, \zeta) + \nabla\phi \cdot \zeta\Big)\eta \geq D|\xi|^\gamma \xi\eta - \varphi(t)|\eta||\zeta|, \quad \forall \eta \in \mathbb{R}. \tag{4.1.8}$$

En effet, l'hypothèse (4.1.2) implique que

$$\Big(F(x, t, \xi, \zeta) + \nabla\phi \cdot \zeta - D|\xi|^\gamma \xi + \varphi(t)|\zeta|\Big)\eta \geq -\varphi(t), \quad \forall \eta \geq 0$$

et

$$\Big(F(x, t, \xi, \zeta) + \nabla\phi \cdot \zeta - D|\xi|^\gamma \xi - \varphi(t)|\zeta|\Big)\eta \geq -\varphi(t), \quad \forall \eta \leq 0,$$

donc

$$F(x, t, \xi, \zeta) + \nabla\phi \cdot \zeta - D|\xi|^\gamma \xi + \varphi(t)|\zeta| \geq 0$$

et

$$F(x, t, \xi, \zeta) + \nabla\phi \cdot \zeta - D|\xi|^\gamma \xi - \varphi(t)|\zeta| \leq 0.$$

Ceci démontre (4.1.8). On peut supposer désormais (4.1.8) au lieu de (4.1.2).

Dans le cas du système $(P4)$, l'équation intégrale considérée sur la partie Γ_1 peut être causée, par exemple, par l'interaction avec un autre élément viscoélastique. En effet, du point de vue physique, la condition imposée à Γ_1 signifie que le domaine Ω est composé d'une matière qui est serrée contre une partie rigide Γ_0 du bord, et contre la partie complémentaire du bord, nommée Γ_1, avec des propriétés viscoélastiques. Donc on s'attend à ce que le comportement asymptotique de la solution dépende de celui de la fonction g. En particulier, si g décroît exponentiellement ou polynômialement vers zéro, le même comportement asymptotique est valable pour la solution de $(P4)$.

Dans la suite (et comme dans le Chapitre 3), on suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma \,:\, \nu(x) \cdot (x - x_0) \leq 0\},$$

$$\Gamma_1 = \{x \in \Gamma \,:\, \nu(x) \cdot (x - x_0) > 0\}.$$

Posons $m(x) = x - x_0$ et $R = \|m\|_\infty$. Le fait que Γ_1 soit fermé implique qu'il existe une constante positive δ_0 telle que

$$0 < \delta_0 \leq m(x) \cdot \nu(x), \quad \forall x \in \Gamma_1. \tag{4.1.9}$$

Pour des exemples de domaines Ω vérifiant ces hypothèses, on se reportera au Chapitre 3.

Dans la littérature, il n'existe pas beaucoup de travaux sur l'existence et le comportement asymptotique des équations d'évolution soumises aux conditions de type mémoire sur le bord. Il est intéressant de mentionner quelques travaux qui ont un rapport avec les effets viscoélastiques sur le bord. Dans [11], j'ai considéré l'équation des ondes soumises à un feedback linéaire et des effets viscoélastiques sur le bord, et où j'ai montré la stabilité exponentielle. On peut aussi citer le travail de D. Andrade et E. Munõz Rivera [5] où l'équation des ondes en dimension 1 soumises à un effet non linéaire et non local de type mémoire sur le bord a été considérée. Dans ce travail, les auteurs ont montré que la dissipation occasionnée par le terme de mémoire est suffisante pour garantir des estimations globales, et par conséquent, permet de montrer l'existence d'une solution globale régulière pour des données initiales assez petites, et d'obtenir la décroissance exponentielle (resp. polynômiale) si le terme de mémoire décroît exponentiellement (resp. polynômialement) vers zéro à l'infini.

Dans le même contexte, on peut mentionner les travaux de M. L. Santos [77, 78] où des estimations de stabilisation ont été démontrées pour l'équation des ondes avec des coefficients dépendant du temps et une condition de type mémoire sur le bord.

Concernant les questions d'existence ou de non existence (ainsi que les questions liées aux problèmes viscoélastiques) de solutions de l'équation des ondes avec un effet viscoélastique sur le bord, on peut citer les travaux de M. Kirane et N. Tatar [35], T. Quin [72, 73] et M. Ciarletta [19].

A ma connaissance, les résultats les plus récents dans cette direction ont été obtenus par M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos dans [16] où est considéré le système $(P4)$ sous les mêmes hypothèses avec $\phi=$ const et $-g'$ et φ convergeant exponentiellement ou polynômialement vers zéro à l'infini, et où il y est montré que la solution l'est également. Le fait que φ converge exponentiellement ou polynômialement vers zéro à l'infini constitue une hypothèse plutot forte qui n'est pas satisfaite si, par exemple, F ne dépend pas de t.

L'objectif de ce chapitre est de généraliser et d'améliorer les résultats obtenus dans les travaux mentionnés ci-dessus. On donne des relations générales entre la convergence de l'énergie vers zéro et celle de $-g'$ en considérant des hypothèses plus faibles sur la fonction k (définie dans le paragraphe 4.2, et qui ne dépend que de g'), et sur $\phi(x)$ et $\varphi(t)$ qui représentent respectivement (en un certain sens) la partie linéaire et la partie non linéaire de F par rapport à ∇u. On suppose que φ est assez petite au voisinage de l'infini, ce qui signifie en quelque sorte, que φ n'a pas de réelle influence sur la stabilité de $(P4)$. Dans le cas particulier où $-g'$ décroît exponentiellement ou polynômialement, on obtient la même estimation sur l'énergie et donc les résultats de M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos [16] en sont un cas particulier. On distingue aussi le cas où la première donnée initiale u^0 s'annule sur Γ_1, et dans ce cas-là, on montre que l'énergie décroît exponentiellement ou polynômialement, même si $-g'$ n'a pas le même accroissement au voisinage de l'infini.

D'autre part, nos résultats sont valables en dimension quelconque, ce qui engendre quelques difficultés supplémentaires. De plus, comme le terme $F(x,t,u,\nabla u)$ dépend, d'une façon non linéaire, de ∇u, on n'a aucune information sur l'influence de l'intégrale $\int_\Omega F(x,t,u,\nabla u)u_t\,dx$ sur l'énergie équivalente $E(t)$ (définie dans le paragraphe suivant) ni sur le signe de sa dérivée $E'(t)$. En d'autres termes, la décroissance de E n'est pas garantie.

Dans le but de démontrer ces résultats, on utilise la méthode développée dans le Chapitre 3 ainsi que les inégalités intégrales démontrées dans le Chapitre 2.

Notons que la condition aux limites supposée sur la partie Γ_0 du bord implique que la solution du système $(P4)$ doit appartenir à l'espace

$$V := \{v \in H^1(\Omega) \, : \, v = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0\} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Comme dans le Chapitre 3, on utilise des notations classiques. Dans la suite, C (quelques fois $C_0, C_1, \ldots$) désigne une constante générique ne dépendant pas de t et dépendant de $\|(u^0, u^1)\|_{H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}$ mais d'une façon continue.

4.2. Notations et résultats principaux

Dans ce paragraphe, on présente tout d'abord quelques notations et on étudie ensuite l'existence des solutions régulières de $(P4)$ ainsi que sa stabilité.

Tout d'abord, on estime le terme $\partial_\nu u$ en dérivant par rapport à t la condition aux limites considérée sur Γ_1. Soit $g * \varphi$ le produit de convolution défini par :

$$(g * \varphi)(t) = \int_0^t g(t-s)\varphi(s)\, ds.$$

Donc, en dérivant par rapport à t l'équation considérée sur Γ_1, on obtient :

$$\partial_\nu u + \frac{1}{g(0)} \left(g' * \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) = -\frac{1}{g(0)} u' \quad \Gamma_1 \times]0, +\infty[.$$

Appliquant l'opérateur inverse de Volterra, on obtient :

$$\partial_\nu u = -\frac{1}{g(0)}(u' + k * u') \quad \Gamma_1 \times]0, +\infty[$$

où k satisfait :

$$k + \frac{1}{g(0)} g' * k = -\frac{1}{g(0)} g'. \tag{4.2.1}$$

Posons $\eta = \frac{1}{g(0)}$, on trouve :

$$\partial_\nu u = -\eta \Big(u' + k(0)u - k(t)u^0 + k' * u \Big) \quad \Gamma_1 \times]0, +\infty[. \tag{4.2.2}$$

Réciproquement, si on considère que la donnée initiale satisfait $u^0 = 0$ sur Γ_1, (4.2.2) implique la condition aux limites considérée sur Γ_1 dans $(P4)$. Dans la suite de ce chapitre, on considère la condition plus générale (4.2.2).

Soit h une fonction vérifiant :

$$k(t) - k * h(t) = h(t).$$

On commence par montrer que, si h converge exponentiellement (resp. polynômialement) vers zéro à l'infini, alors k converge aussi exponentiellement (resp. polynômialement) vers zéro à l'infini.

Lemme 4.2.1. *Supposons que h est une fonction positive et continue, alors il en est de même de k. De plus,*

1. S'il existe deux constantes positives c_0 et c vérifiant $c_0 < c$ et telles que

$$h(t) \leq c_0 e^{-ct},$$

alors la fonction k satisfait :

$$k(t) \leq \frac{c_0(c-\epsilon)}{c-\epsilon-c_0} e^{-\epsilon t},$$

pour tout $0 < \epsilon < c - c_0$.

2. Soient $p > 1$ et

$$c_p = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} (1+t)^p \int_0^t (1+t-s)^{-p}(1+s)^{-p}\, ds.$$

S'il existe une constante positive c_0 vérifiant $c_0 c_p < 1$ et telle que

$$h(t) \leq c_0 (1+t)^{-p},$$

alors la fonction k satisfait :

$$k(t) \leq \frac{c_0}{1 - c_0 c_p}(1+t)^{-p}.$$

Preuve. Voir M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos [16].

Remarque. R. Racke [74, Lemme 7.4] a démontré que la constante c_p est finie.

Lemme 4.2.2. *Soient $g, \varphi \in C^1(\mathbb{R}^+)$. On pose :*

$$(g \Box \varphi)(t) = \int_0^t g(t-s)|\varphi(t) - \varphi(s)|^2\, ds.$$

On a la relation suivante :

$$(g * \varphi)\varphi_t = -\frac{1}{2} g(t)|\varphi(t)|^2 + \frac{1}{2} g' \Box \varphi - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g \Box \varphi - (\int_0^t g(s)\, ds)|\varphi|^2 \right).$$

Preuve. Il suffit de dériver $g\Box\varphi$.

L'énergie équivalente de $(P4)$ est définie par (D est la constante définie dans (4.1.2)) :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi(x)}\left(|u_t(x,t)|^2 + |\nabla u(x,t)|^2\right)dx + \frac{D}{\gamma+2}\int_\Omega e^{\phi(x)}|u(x,t)|^{\gamma+2}\,dx$$
$$-\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(k'\Box u)(t)\,d\Gamma + \frac{\eta}{2}k(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|u(x,t)|^2\,d\Gamma.$$

Les résultats d'existence et de régularité des solutions de $(P4)$ sont donnés par le théorème suivant :

Théorème 4.2.3. *Supposons que $k \in W^{2,1}(\mathbb{R}^+)$ ainsi que les hypothèses (4.1.1)-(4.1.7).*

1. Pour tout $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$, $(P4)$ admet une solution unique faible dans l'espace

$$C(\mathbb{R}^+; V) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

2. Si $(u^0, u^1) \in \left(V \cap H^2(\Omega)\right)^2$ vérifie :

$$\partial_\nu u^0 + \eta u^1 = 0 \quad sur \quad \Gamma_1, \tag{4.2.3}$$

alors la solution u (dite forte) de $(P4)$ satisfait :

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V \cap H^2(\Omega)),\ u' \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V),\ u'' \in L^\infty(\mathbb{R}^+, V). \tag{4.2.4}$$

Preuve. Ces résultats d'existence et de régularité peuvent être démontrés en suivant exactement la démonstration donnée par M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et J. A. Soriano dans [15].

Voici maintenant les résultats de stabilité de ce chapitre.

Théorème 4.2.4. *Supposons que $k \in W^{2,1}(\mathbb{R}^+)$ ainsi que les hypothèses (4.1.1)-(4.1.7) et (4.1.9). Supposons qu'il existe $0 \le q < \frac{1}{2}$, $b > 0$ et $t_0 \ge 0$ tels que*

$$k(t) \ge 0, \quad k'(t) \le 0, \quad k''(t) \ge b(-k'(t))^{1+q}, \tag{4.2.5}$$

$$\|\nabla\phi\|_\infty \|m\|_\infty < \min\{1, \frac{\gamma n}{\gamma+4}\}, \tag{4.2.6}$$

$$\sup_{t\in[t_0,+\infty[} \varphi(t) \quad et \quad \sup_{t\in[t_0,+\infty[} k(t) \quad sont\ assez\ petits. \tag{4.2.7}$$

Alors l'énergie équivalente $E(t)$ associée au $(P4)$ satisfait, pour toute solution faible de $(P4)$, les estimations de stabilisation suivantes :

Cas 1. $q = 0$: pour tout $t \geq 0$

$$E(t) \leq Ce^{-\alpha t}\left(1 + \int_0^t k^2(s)e^{\alpha s}\,ds\right), \tag{4.2.8}$$

$$E(t) \leq Ce^{-\alpha t} \quad si \quad u^0 = 0 \quad sur \quad \Gamma_1 \tag{4.2.9}$$

où C et α sont des constantes positives.

Cas 2. $0 < q < \frac{1}{2}$: pour tout $t \geq 0$

$$E(t) \leq C(t+1)^{-\lambda}\left(1 + \int_0^t k^2(s)(s+1)^{\lambda}\,ds\right), \quad \forall\lambda \in]1, \frac{1}{q} - 1[, \tag{4.2.10}$$

$$E(t) \leq C(t+1)^{-\frac{1}{q}} \quad si \quad u^0 = 0 \quad sur \quad \Gamma_1. \tag{4.2.11}$$

Si de plus $\int_0^{+\infty} k^2(s)(s+1)^{\lambda_0}\,ds < +\infty$ pour un certain $\lambda_0 > 1$, alors l'estimation (4.2.10) est satisfaite aussi pour $\lambda = \frac{1}{q}$.

Remarques. 1. Dans (4.2.7), on peut prendre $t_0 = 0$ sans perte de généralité.

2. D'après (4.2.5), l'hypothèse faite sur γ et le fait que ϕ soit borné, l'énergie E satisfait l'inégalité, pour une constante $d > 0$,

$$E(t) \geq d\|(u, u')\|^2_{H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{4.2.12}$$

3. D'après (4.2.1) et le Lemme 4.2.1, si la fonction $-g'$ décroît exponentiellement ou polynômialement vers zéro à l'infini, alors la fonction k possède la même propriété. Donc, dans ces deux cas-là, les estimations (4.2.8) et (4.2.10) impliquent que l'énergie des solutions de $(P4)$ a le même comportement que k à l'infini. En effet, si

$$k^2(t) \leq Ce^{-\beta t} \quad \text{ou} \quad k^2(t) \leq C(1+t)^{-2p}$$

pour des constantes $\beta > 0$ et $p > \frac{1}{2}$, alors, d'après (4.2.8) et (4.2.10), on a :

$$E(t) \leq Ce^{-\min\{\alpha,\beta\}t} \quad \text{ou} \quad E(t) \leq C(1+t)^{-\min\{\lambda,2p-1\}}$$

respectivement ($E(t) \leq Ce^{-(\alpha-\epsilon)t}$ pour tout $\epsilon > 0$ si $\alpha = \beta$). Ces cas particuliers donnent les résultats de M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos [16].

4. En utilisant des arguments usuels de densité, il suffit de montrer les estimations (4.2.8)-(4.2.11) pour les solutions fortes de $(P4)$ pour en déduire que ces estimations restent valables pour toute solution faible de $(P4)$. Donc, dans toute la suite de ce chapitre, on considère des données initiales $(u^0, u^1) \in \left(V \cap H^2(\Omega)\right)^2$ vérifiant (4.2.3), et par conséquent tout le calcul qui va suivre est justifié.

4.3. Estimations générales de stabilisation : cas $q = 0$

Dans ce paragraphe, on va démontrer les estimations (4.2.8) et (4.2.9). Supposons donc que la fonction k satisfait, pour $b > 0$, les conditions

$$k(t) \geq 0, \quad k'(t) \leq 0, \quad k''(t) \geq -bk'(t). \tag{4.3.1}$$

Ces hypothèses impliquent que k' converge exponentiellement vers zéro à l'infini, i.e. :

$$0 \leq -k'(t) \leq Ce^{-bt}.$$

M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos ont supposé dans [16] que la fonction k vérifie aussi l'hypothèse $k'(t) \leq -bk(t)$.

On commence par établir quelques inégalités pour les solutions régulières (fortes) de $(P4)$.

Lemme 4.3.1. *Toute solution forte u de $(P4)$ satisfait*

$$E'(t) \leq -\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|u'|^2\, d\Gamma + \frac{\eta}{2}k^2(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|u^0|^2\, d\Gamma$$

$$-\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(k''\Box u)\, d\Gamma + \varphi(t)\int_{\Omega} e^{\phi(x)}|u'||\nabla u|\, dx.$$

Preuve. En multipliant la première équation de $(P4)$ par $e^{\phi(x)}u_t$ et en intégrant par parties sur Ω, on obtient :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} e^{\phi(x)}(|u'|^2 + |\nabla u|^2)\, dx$$

$$= -\int_{\Omega} e^{\phi(x)}\Big(F(x,t,u,\nabla u) + \nabla\phi\cdot\nabla u\Big)u'\, dx + \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\partial_\nu u u'\, d\Gamma.$$

En utilisant (4.1.8), (4.2.2), (4.3.1) et le Lemme 4.2.2, on obtient le résultat du Lemme 4.3.1.

Soit maintenant l'opérateur $\diamond$ défini par :

$$(k \diamond \varphi)(t) = \int_0^t k(t-s)(\varphi(t) - \varphi(s))\, ds.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour $0 \leq \mu \leq 1$, on trouve :

$$|(k \diamond \varphi)(t)|^2 \leq \left[\int_0^t |k(s)|^{2(1-\mu)}\, ds\right] (|k|^{2\mu} \Box \varphi)(t). \tag{4.3.2}$$

On définit maintenant les deux fonctions

$$\begin{cases} \mathcal{N}(t) = \int_\Omega e^{\phi(x)}(|u'|^2 + |\nabla u|^2 + \frac{2D}{\gamma+2}|u|^{\gamma+2})\, dx, \\ \psi(t) = 2\int_\Omega e^{\phi(x)}(m \cdot \nabla u)u' + \theta \int_\Omega e^{\phi(x)} u u'\, dx \end{cases} \tag{4.3.3}$$

où θ une constante vérifiant ($R = \|m\|_\infty$) :

$$\max\{n + R\|\nabla\phi\|_\infty - 2, \frac{2(n + R\|\nabla\phi\|_\infty)}{\gamma + 2}\} < \theta < n - R\|\nabla\phi\|_\infty$$

(grâce à (4.2.6), la constante θ existe). Le lemme suivant jouera un rôle important dans la construction d'une fonction de Liapunov.

Lemme 4.3.2. *Pour toute solution régulière de* ($P4$)*, on a :*

$$\psi'(t) \leq \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m \cdot \nu)|u'|^2\, d\Gamma + \int_\Omega (\theta - n - m \cdot \nabla\phi(x))e^{\phi(x)}|u'|^2\, dx$$

$$- \int_\Omega (\theta - (n + m \cdot \nabla\phi - 2))e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\, dx + \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\partial_\nu u(2m \cdot \nabla u + \theta u)\, d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m \cdot \nu)|\nabla u|^2\, d\Gamma - D\int_\Omega (\theta - \frac{2}{\gamma+2}(n + m \cdot \nabla\phi(x)))e^{\phi(x)}|u|^{\gamma+2}\, dx$$

$$+\theta\varphi(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}|u||\nabla u|\, dx + 2\varphi(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u||m \cdot \nabla u|\, dx.$$

Preuve. En dérivant ψ par rapport à t et en utilisant la première équation de ($P4$), la formule de Green et l'identité

$$2\nabla u \cdot \nabla(m \cdot \nabla u) = 2|\nabla u|^2 + m \cdot \nabla(|\nabla u|^2),$$

on déduit que (noter aussi que $\partial_\nu u = \nabla u \cdot \nu$ sur Γ_0)

$$\psi'(t) = \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m \cdot \nu)|u'|^2\, d\Gamma + \int_\Omega (\theta - n - m \cdot \nabla\phi)e^{\phi(x)}|u'|^2\, dx$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}\partial_\nu u(2m\cdot\nabla u+\theta u)\,d\Gamma+\int_{\Gamma_0} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2\,d\Gamma\\
&-\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2\,d\Gamma-\int_\Omega(\theta-(n+m\cdot\nabla\phi-2))e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,dx\\
&-2\int_\Omega e^{\phi(x)}\Big(F(x,t,u,\nabla u)+\nabla\phi(x)\cdot\nabla u\Big)(m\cdot\nabla u)\,dx\\
&-\theta\int_\Omega e^{\phi(x)}\Big(F(x,t,u,\nabla u)+\nabla\phi(x)\cdot\nabla u\Big)u\,dx. \qquad (4.3.4)
\end{aligned}
$$

D'après l'inégalité (4.1.8), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&-\theta\int_\Omega e^{\phi(x)}\Big(F(x,t,u,\nabla u)+\nabla\phi(x)\cdot\nabla u\Big)u\,dx\\
&\leq -\theta D\int_\Omega e^{\phi(x)}|u|^{\gamma+2}\,dx+\theta\varphi(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}|u||\nabla u|\,dx, \qquad (4.3.5)\\
&-2\int_\Omega e^{\phi(x)}\Big(F(x,t,u,\nabla u)+\nabla\phi(x)\cdot\nabla u\Big)(m\cdot\nabla u)\,dx\\
&\leq -2D\int_\Omega e^{\phi(x)}|u|^\gamma u(m\cdot\nabla u)\,dx+2\varphi(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u||m\cdot\nabla u|\,dx\\
&\leq \frac{-2D}{\gamma+2}\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)|u|^{\gamma+2}\,d\Gamma\\
&+\frac{2D}{\gamma+2}\int_\Omega e^{\phi(x)}(n+m\cdot\nabla\phi)|u|^{\gamma+2}\,dx+2\varphi(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u|||m\cdot\nabla u|\,dx. \qquad (4.3.6)
\end{aligned}
$$

En substituant les inégalités (4.3.5) et (4.3.6) dans (4.3.4) et en notant que

$$
\frac{-2D}{\gamma+2}\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)|u|^{\gamma+2}\,d\Gamma\leq 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Gamma_0} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2\,d\Gamma\leq 0,
$$

on obtient le Lemme 4.3.2.

Finalement, on va montrer que l'énergie équivalente E vérifie quelques inégalités intégrales. D'après (4.3.1) et l'inégalité de Young, le Lemme 4.3.1 implique que

$$
\begin{aligned}
E'(t)\leq &-\frac{\eta}{2}\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(|u'|^2-bk'\Box u-k^2(t)|u^0|^2)\,d\Gamma\\
&+\frac{1}{2}\varphi(t)\int_\Omega e^{\phi(x)}(|u'|^2+|\nabla u|^2)\,dx. \qquad (4.3.7)
\end{aligned}
$$

En appliquant les inégalités de Young et de Poincaré dans le Lemme 4.3.2 et en utilisant (4.1.9), on obtient :

$$\psi'(t) \leq \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(m\cdot\nu)|u'|^2\,d\Gamma$$

$$+(\theta-n+R\|\nabla\phi\|_\infty)\int_\Omega e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx+(-\theta+n+R\|\nabla\phi\|_\infty-2)\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,dx$$

$$+D(-\theta+\frac{2(n+R\|\nabla\phi\|_\infty)}{\gamma+2})\int_\Omega e^{\phi(x)}|u|^{\gamma+2}\,dx$$

$$+C\left(\epsilon\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(|\nabla u|^2+u^2)\,d\Gamma+\varphi(t)\mathcal{N}(t)\right)+C_\epsilon\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|\partial_\nu u|^2\,d\Gamma$$

$$-\delta_0\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,d\Gamma$$

où ϵ est une constante positive arbitraire.

Notons que la condition au bord (4.2.2) peut être écrite sous la forme

$$\partial_\nu u = -\eta\left(u'+k(t)u-k'\diamond u-k(t)u^0\right).$$

On arrive donc à

$$\psi'(t) \leq (\theta-n+R\|\nabla\phi\|_\infty)\int_\Omega e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx$$

$$+(-\theta+n+R\|\nabla\phi\|_\infty-2)\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,dx$$

$$+D(-\theta+\frac{2(n+R\|\nabla\phi\|_\infty)}{\gamma+2})\int_\Omega e^{\phi(x)}|u|^{\gamma+2}\,dx$$

$$-\delta_0\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,d\Gamma+C\left(\epsilon\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(|\nabla u|^2+u^2)\,d\Gamma+\varphi(t)\mathcal{N}(t)\right)$$

$$+C_\epsilon\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(|u'|^2+k^2(t)|u|^2+|k'\diamond u|^2+k^2(t)|u^0|^2)\,d\Gamma. \qquad (4.3.8)$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité (4.3.2) pour k' avec $\mu=\frac{1}{2}$ et le théorème de trace dans l'inégalité (4.3.8) avec ϵ assez petit, on obtient :

$$\psi'(t) \leq (\theta-n+\|\nabla\phi\|_\infty)\int_\Omega e^{\phi(x)}|u'|^2\,dx$$

$$+(-\theta+n+R\|\nabla\phi\|_\infty-2)\int_\Omega e^{\phi(x)}|\nabla u|^2\,dx$$

$$+D(-\theta+\frac{2(n+R\|\nabla\phi\|_\infty)}{\gamma+2})\int_\Omega e^{\phi(x)}|u|^{\gamma+2}\,dx$$

$$+C(\varphi(t)+\epsilon)\mathcal{N}(t)+C_\epsilon\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}(|u'|^2+k^2(t)|u|^2-k'\Box u+k^2(t)|u^0|^2)\,d\Gamma.$$

Grâce au choix de θ, on a : $\epsilon_1>0$ où

$$\epsilon_1=\min\{n-R\|\nabla\phi\|_\infty-\theta,\theta-(n+R\|\nabla\phi\|_\infty-2),n+R\|\nabla\phi\|_\infty-\frac{\gamma+2}{2}\theta\}.$$

Donc

$$\psi'(t)\leq-\epsilon_1\int_\Omega e^{\phi(x)}(|u'|^2+|\nabla u|^2+\frac{2D}{\gamma+2}|u|^{\gamma+2})\,dx \tag{4.3.9}$$

$$+C(\varphi(t)+\epsilon)\mathcal{N}(t)+C_\epsilon\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}(|u'|^2+k^2(t)|u|^2-k'\Box u+k^2(t)|u^0|^2)\,d\Gamma.$$

On introduit maintenant la fonction de Liapunov

$$\mathcal{L}(t)=NE(t)+\psi(t) \tag{4.3.10}$$

avec $N>0$. D'après (4.3.7) et (4.3.9), on a :

$$\mathcal{L}'(t)\leq((\frac{N}{2}+c)\varphi(t)+c\epsilon-\epsilon_1)\mathcal{N}(t)+(c_\epsilon+\frac{\eta}{2}N)\|u_0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}k^2(t)$$

$$+c_\epsilon k^2(t)\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}|u|^2\,d\Gamma+(c_\epsilon-\frac{\eta}{2}N)\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}|u'|^2\,d\Gamma$$

$$+(\frac{\eta b}{2}N-c_\epsilon)\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}k'\Box u\,d\Gamma.$$

Or, d'après (4.3.3),

$$\mathcal{N}(t)=2E(t)+\eta\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}k'\Box u\,d\Gamma-\eta k(t)\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}|u|^2\,d\Gamma.$$

Par conséquent, en remplaçant $\mathcal{N}(t)$ par le second membre de l'égalité ci-dessus dans l'inégalité précédente et en choisissant N assez grand pour que les coefficients des intégrales $\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}|u'|^2\,d\Gamma$ et $-\int_{\Gamma_1}e^{\phi(x)}k'\Box u\,d\Gamma$ soient négatifs (noter que $k'\leq 0$), on trouve :

$$\mathcal{L}'(t)\leq 2\Big((\frac{N}{2}+c)\varphi(t)+c\epsilon-\epsilon_1\Big)E(t)(t)+(c_\epsilon+\frac{\eta}{2}N)\|u_0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}k^2(t)$$

$$+\Big(c_\epsilon k^2(t) - \eta((\frac{N}{2}+c)\varphi(t) + c\epsilon - \epsilon_1)k(t)\Big)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|u|^2\,d\Gamma.$$

On utilise alors (4.2.12) (avec le théorème de trace) pour absorber le terme $\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|u|^2\,d\Gamma$ par E, on choisit ϵ assez petit et on utilise (4.2.7) pour que le coefficient de E soit négatif. On en déduit qu'il existe deux constantes positives C_0 et C_1 telles que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C_0E(t) + C_1\|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}k^2(t).$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Young et en choisissant N assez grand, on déduit de (4.3.10) que

$$q_0E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq q_1E(t) \tag{4.3.11}$$

pour des constantes positives q_0 et q_1. D'après ces deux dernières inégalités, on conclut que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\alpha\mathcal{L}(t) + C_1\|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}k^2(t) \tag{4.3.12}$$

où $\alpha = \frac{c_0}{q_1}$. On distingue maintenant deux cas suivants :

Cas 1. Si $u^0 = 0$ sur Γ_1, alors $\|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)} = 0$ et (4.3.12) implique que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\alpha\mathcal{L}(t),$$

d'où $\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-\alpha t}$. Donc, d'après (4.3.11), on déduit (4.2.9).

Cas 2. Si $u^0 \neq 0$ sur Γ_1, on réécrit (4.3.12) sous la forme

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\alpha\mathcal{L}(t) + C_2k^2(t) \tag{4.3.13}$$

où $C_2 = C_1\|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}$. Pour prouver (4.2.8), on introduit la fonction

$$f(t) = \mathcal{L}(t) - C_2e^{-\alpha t}\int_0^t k^2(s)e^{\alpha s}ds.$$

En utilisant (4.3.13), on voit facilement que

$$f'(t) \leq -\alpha f(t),$$

ce qui implique que $f(t) \leq f(0)e^{-\alpha t}$. D'après (4.3.11) et la définition de f, on obtient alors (4.2.8). Ceci achève la preuve.

Remarque. M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos [16, Lemme 3.3] ont considéré l'inégalité (4.3.13) avec $k^2(t) = Ce^{-\beta t}$

où β est une constante positive, et ils ont prouvé que $\mathcal{L}$ décroît exponentiellement vers zéro à l'infini. Notre preuve donne une généralisation à toute fonction $k^2(t)$.

4.4. Estimations générales de stabilisation : cas $0 < q < \frac{1}{2}$

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer les estimations (4.2.10) et (4.2.11) où la fonction k vérifie les hypothèses

$$k(t) \geq 0, \quad k'(t) \leq 0, \quad k''(t) \geq b(-k'(t))^{1+q} \tag{4.4.1}$$

pour un réel $0 < q < \frac{1}{2}$ et un réel positif b. Ces hypothèses impliquent que k' converge polynômialement vers zéro à l'infini, c-à-d :

$$0 \leq -k'(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1}{q}}.$$

M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos ont supposé dans [16] que la fonction k vérifie aussi l'hypothèse $k'(t) \leq -b(k(t))^{\frac{1}{1-q}}$.

Le lemme suivant jouera un rôle important dans la suite.

Lemme 4.4.1. *Soit u une solution forte de $(P4)$. Alors pour tout $p > 1$, $0 < r < 1$ et $t \geq 0$, on a :*

$$\left(\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|k'|\Box u \, d\Gamma\right)^{1+\frac{1}{(1-r)(p+1)}}$$

$$\leq C\left(\|u\|^2_{L^\infty(0,t;L^2(\Gamma_1))}\int_0^t |k'(s)|^r \, ds\right)^{\frac{1}{(1-r)(p+1)}} \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|k'|^{1+\frac{1}{p+1}}\Box u \, d\Gamma$$

et

$$\left(\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|k'|\Box u \, d\Gamma\right)^{1+\frac{1}{p+1}}$$

$$\leq C\left(\int_0^t \|u(s,.)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \, ds + t\|u(t,.)\|^2_{L^2(\Gamma_1)}\right)^{p+1} \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|k'|^{1+\frac{1}{p+1}}\Box u \, d\Gamma.$$

Preuve. En utilisant le fait que ϕ soit borné et le Lemme 4.1 de M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos [16] (voir aussi [77]), on obtient ces deux inégalités.

En considérant l'inégalité (4.3.2) pour k' avec $\mu = \frac{1}{2}(q+1)$ (comme $0 < q < \frac{1}{2}$, alors $0 < \mu < 1$ et $|k'|^{2(1-\mu)} \in L^1(\mathbb{R}^+)$) et en utilisant (4.4.1), on obtient l'inégalité

$$|k' \diamond u|^2 \leq C(-k')^{1+q} \Box u.$$

Notons que la condition au bord (4.2.2) peut être écrite sous la forme

$$\partial_\nu u = -\eta \left(u' + k(t)u - k' \diamond u - k(t)u^0 \right).$$

En appliquant donc ces deux propriétés ainsi que (4.1.9) dans le Lemme 4.3.2, on trouve :

$$\begin{aligned} \psi'(t) \leq (\theta - n + R\|\nabla\phi\|_\infty) \int_\Omega e^{\phi(x)} |u'|^2 \, dx \\ -(\theta - (n + R\|\nabla\phi\|_\infty - 2)) \int_\Omega e^{\phi(x)} |\nabla u|^2 dx \\ -D(\theta - \frac{2(n + R\|\nabla\phi\|_\infty)}{\gamma + 2}) \int_\Omega e^{\phi(x)} |u|^{\gamma+2} \, dx \\ -\delta_0 \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} |\nabla u|^2 \, d\Gamma + C \left(\epsilon \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} |\nabla u|^2 \, d\Gamma + (\varphi(t) + \epsilon) \mathcal{N}(t) \right) \\ +C \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + k^2(t)|u|^2 + (-k')^{1+q} \Box u + k^2(t)|u^0|^2 \right) d\Gamma \end{aligned}$$

où ϵ est une constante positive arbitraire et $\mathcal{N}$ est défini par (4.3.3).

D'autre part, en utilisant (4.4.1) pour $0 < q < \frac{1}{2}$ et l'inégalité de Young dans le Lemme 4.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned} E'(t) \leq -\frac{\eta}{2} \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)} \left(|u'|^2 + b(-k')^{1+q} \Box u - k^2(t)|u^0|^2 \right) d\Gamma \\ +\frac{1}{2}\varphi(t) \int_\Omega e^{\phi(x)} (|u'|^2 + |\nabla u|^2) \, dx. \end{aligned}$$

Donc, en choisissant N assez grand, ϵ assez petit (comme dans le paragraphe précédent) et en utilisant (4.2.7), on trouve que la fonction de Liapunov définie par (4.3.10) satisfait, pour des constantes positives C_i, $i = 0, 1, \cdots$, l'inégalité suivante :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C_2 \mathcal{N}(t) + C_1 \|u^0\|^2_{L^2(\Omega)} k^2(t) - C_3 \int_{\Gamma_1} (-k')^{1+q} \Box u \, d\Gamma$$

$$+C_4k^2(t)\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}|u|^2\,d\Gamma$$

d'où, en utilisant (4.2.7) et le théorème de trace (pour majorer la dernière intégrale de cette inégalité),

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C_0\left(\mathcal{N}(t) + \int_{\Gamma_1}(-k')^{1+q}\Box u\,d\Gamma\right) + C_1\|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}k^2(t). \quad (4.4.2)$$

On fixe maintenant $q < r < 1-q$ (donc $0 < r < 1$). D'après (4.4.1), on a :

$$\int_0^{+\infty}|k'(t)|^r\,dt \leq C\int_0^{+\infty}(1+t)^{\frac{-r}{q}}\,dt < +\infty.$$

En utilisant cette estimation dans la première inégalité du Lemme 4.4.1 (pour $p = \frac{1}{q} - 1$), on trouve :

$$\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(-k')^{1+q}\Box u\,d\Gamma \geq C\left(\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(-k')\Box u\,d\Gamma\right)^{1+\frac{q}{1-r}}. \quad (4.4.3)$$

D'autre part, grâce à la régularité (4.2.4), $\mathcal{N}$ est borné. Donc, on déduit que

$$\mathcal{N}(t) + \left(\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(-k')\Box u\,d\Gamma\right)^{1+\frac{q}{1-r}}$$

$$\geq C\left(\mathcal{N}(t) + \int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(-k')\Box u\,d\Gamma\right)^{1+\frac{q}{1-r}} \geq CE(t)^{1+\frac{q}{1-r}}. \quad (4.4.4)$$

En substituant (4.4.3) et (4.4.4) dans (4.4.2), on obtient :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -CE(t)^{1+\frac{q}{1-r}} + C_1\|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}k^2(t).$$

En prenant en compte les inégalités (4.3.11), on conclut que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C\mathcal{L}(t)^{1+\frac{q}{1-r}} + C_1\|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}k^2(t). \quad (4.4.5)$$

Maintenant, on distingue les deux cas suivants :

Cas 1. Si $u^0 = 0$ sur Γ_1, alors $\|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)} = 0$ et (4.4.5) donne

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C\mathcal{L}(t)^{1+\frac{q}{1-r}},$$

ce qui implique, par intégration, que

$$\mathcal{L}(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1-r}{q}}. \quad (4.4.6)$$

Cas 2. Si $u^0 \neq 0$ sur Γ_1, on réécrit (4.4.5) comme suit :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -C\mathcal{L}(t)^{1+\frac{q}{1-r}} + C_2 k^2(t) \tag{4.4.7}$$

où $C_2 = C_1 \|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)}$. On introduit les fonctions

$$f(t) = \mathcal{L}(t) - h(t), \quad h(t) = C_2(t+1)^{-\frac{1-r}{q}} \int_0^t k^2(s)(s+1)^{\frac{1-r}{q}} ds.$$

En utilisant (4.4.1), on voit facilement que (pour un c assez grand)

$$h'(t) + Ch(t)^{1+\frac{q}{1-r}} \geq C_2 k^2(t), \quad \forall t \geq 1.$$

Alors, en utilisant (4.4.7), on a : si $f(t) > 0$ pour un $t \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} f'(t) &\leq -C\mathcal{L}(t)^{1+\frac{q}{1-r}} + C_2 k^2(t) - h'(t) \\ &\leq -C\left((f(t)+h(t))^{1+\frac{q}{1-r}} + \frac{1}{C}h'(t) - \frac{C_2}{C}k^2(t)\right) \\ &\leq -C\left(f(t)^{1+\frac{q}{1-r}} + h(t)^{1+\frac{q}{1-r}} + \frac{1}{C}h'(t) - \frac{C_2}{C}k^2(t)\right) \\ &\leq -Cf(t)^{1+\frac{q}{1-r}}, \end{aligned}$$

ce qui implique que, si $f(t_0) \leq 0$ pour un $t_0 \geq 1$, alors $f(t) \leq 0$ pour tout $t \geq t_0$. On obtient alors (dans les deux cas et pour tout $t \geq 0$)

$$f(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1-r}{q}}.$$

Et par conséquent, en utilisant la définition de f et de h,

$$\mathcal{L}(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1-r}{q}} \left(1 + \int_0^t k^2(s)(s+1)^{\frac{1-r}{q}} ds\right). \tag{4.4.8}$$

Donc, en utilisant (4.3.11), on déduit (4.2.10) avec

$$\lambda = \frac{1-r}{q} \in]1, \frac{1}{q} - 1[$$

(car $q < r < 1-q$).

Si de plus

$$\int_0^{+\infty} k^2(s)(s+1)^{\frac{1-r}{q}} ds < +\infty$$

pour un certain r vérifiant $q < r < 1 - q$ ou si $u^0 = 0$ sur Γ_1, alors, en utilisant (4.2.12) et (4.3.11), on trouve, d'après (4.4.6) et (4.4.8), les majorations suivantes (noter que $\frac{1-r}{q} > 1$) :

$$t\|u\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq Ct\mathcal{L}(t) < +\infty,$$

$$\int_0^t \|u\|^2_{L^2(\Gamma_1)} ds \leq C \int_0^t \mathcal{L}(s) ds < +\infty.$$

En prenant en considération ces majorations dans la deuxième inégalité du Lemme 4.4.1 (pour $p = \frac{1}{q} - 1$), on trouve :

$$\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(-k')^{1+q} \Box u \, d\Gamma \geq C \left(\int_{\Gamma_1} e^{\phi(x)}(-k') \Box u \, d\Gamma \right)^{1+q}.$$

En utilisant cette inégalité à la place de (4.4.3) et en suivant les mêmes arguments que ceux utilisés dans le cas de (4.4.3), on arrive à montrer que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -C\mathcal{L}(t)^{1+q} + C_1\|u^0\|^2_{L^2(\Gamma_1)} k^2(t).$$

Cette inégalité est similaire à (4.4.5). Par conséquent, avec les mêmes arguments qu'auparavant, on conclut que

$$\mathcal{L}(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1}{q}} \quad \text{si} \quad u^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_1$$

et

$$\mathcal{L}(t) \leq C(1+t)^{-\frac{1}{q}} \left(1 + \int_0^t k^2(s)(s+1)^{\frac{1}{q}} \, ds \right) \quad \text{si} \quad u^0 \neq 0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Finalement, d'après (4.3.11), on déduit (4.2.10) (pour $\lambda = \frac{1}{q}$) et (4.2.11). Ceci complète la preuve.

Remarque. M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos ont considéré dans [16] l'inégalité (4.4.7) avec $k^2(t) = C(t+1)^{-\beta}$ où β est une constante positive. Ces derniers ont montré ([16, Lemme 4.2]) que $\mathcal{L}$ converge polynômialement vers zéro à l'infini. Notre preuve généralise ce lemme pour toute fonction $k^2(t)$.

CHAPITRE 5

Applications à la stabilisation des systèmes non dissipatifs

5.1. Introduction

Dans [6] et [14], j'ai considéré le système de Petrovsky suivant :

$$\begin{cases} u'' + \Delta^2 u + q(x)u + g(u') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{5.1.1}$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière Γ assez régulière. Pour une fonction g continue, croissante, vérifiant $g(0) = 0$, et une fonction $q : \Omega \to \mathbb{R}^+$ bornée. J'ai démontré des résultats d'existence globale et de régularité. J'ai obtenu aussi, sous des hypothèses convenables d'accroissement sur g, des estimations de stabilité. Plus précisément, j'ai démontré que l'énergie de toute solution faible décroît exponentiellement (resp. polynômialement) vers zéro à l'infini si g est entre deux droites passant par l'origine (resp. si g a une croissance polynômiale au voisinage de zéro et de l'infini). J'ai démontré des résultats semblables dans [9] pour le système (5.1.1) couplé avec une équation des ondes semi-linéaire.

Des résultats similaires ont été obtenus par de nombreux auteurs dans le cas semi-linéaire ou avec des conditions sur le bord différentes de celles de (5.1.1). On peut citer les travaux de V. Komornik [38, 41] et V. Komornik et S. Kouémou-Patcheu [42].

Dans [5], j'ai considéré le problème de stabilisation du système d'élasticité suivant :

$$\begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} + g_i(u_i') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x) & \Omega, \\ i = 1, \cdots, n \end{cases} \tag{5.1.2}$$

où l'inconnue $u = (u_1, \cdots, u_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Ici, $\sigma_{ij,j} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$, $\sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^n a_{ijkl}\varepsilon_{kl}$, $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, $u_{j,i} = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ et $a_{ijkl} \in W^{1,\infty}(\Omega)$. J'ai démontré quelques estimations de stabilité qui dépendent principalement de la croissance de g_i à l'origine et à l'infini. Dans [13], j'ai généralisé ces résultats au cas des dissipations localement distribuées où le damping est effectif uniquement sur un voisinage d'une partie bien choisie du bord.

J'ai considéré dans [2] et [15] (voir aussi ma thèse de doctorat [14]) le problème de contrôlabilité exacte et de stabilisation frontière des systèmes d'élasticité et de l'équation des ondes avec des coefficients variables dépendant de l'espace et du temps respectivement. Dans [8], j'ai généralisé les résultats de stabilisation que j'avais obtenus auparavant au cas d'un feedback non linéaire. Les résultats que j'ai obtenus dans [2] et [8] améliorent et généralisent dans plusieurs directions ceux obtenus par F. Alabau-Boussouira et V. Komornik [4] dans le cas où les fonctions g_i sont linéaires et $a_{ijkl} =$ const.

J'ai obtenu dans [11] des résultats de stabilité exponentielle d'une classe d'équations des ondes soumises à une condition aux limites de type mémoire.

Dans tous les travaux cités ci-dessus, la dissipation du système considéré (i.e. : l'énergie est décroissante) joue un rôle crucial dans la démonstration des différentes estimations de stabilité.

La méthode introduite et développée dans les chapitres 2, 3 et 4 est directe et très flexible; elle peut être appliquée à des problèmes non dissipatifs variés (élasticité, thermo-élasticité, systèmes couplés, coefficients variables, $\cdots$), soumis à un feedback interne ou frontière, dans le but de généraliser et d'améliorer des différentes estimations de stabilité (connues dans le cas dissipatif).

On donne ici quelques applications.

5.2. Equation générale des ondes avec un terme perturbant d'ordre 1

On considère dans ce paragraphe l'équation des ondes semi-linéaire avec des coefficients variables (dépendant de l'espace) soumises à un feedback interne

$$\begin{cases} u'' + Au + q_1(x)h(Du) + q_2(x)f(u) + q_3(x)g(u') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{5.2.1}$$

où $Au = -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u)$, $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$ vérifiant, pour $a_0 > 0$:

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j \geq a_0|\zeta|^2, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n, \tag{5.2.2}$$

$q_i \in L^\infty(\Omega)$ vérifiant, pour $\epsilon_0 > 0$:

$$q_2(x) \geq 0, \quad q_3(x) \geq \epsilon_0, \quad \forall x \in \Omega \tag{5.2.3}$$

et g et f vérifient respectivement les hypothèses $(H.2)$ et $(H.4)$ du Chapitre 3. La fonction $h \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifie, pour $\beta \geq 0$ et $\phi \in W^{1,\infty}(\Omega)$:

$$\|\nabla h\|_\infty < +\infty, \quad |q_1(x)h(\zeta) + \nabla\phi(x)\cdot\zeta| \leq \beta|\zeta|, \quad \forall x \in \Omega, \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{5.2.4}$$

On utilise ici la notation :

$$Du = \Big(\sum_{j=1}^n a_{1j}(x)\partial_{x_j} u, \cdots, \sum_{j=1}^n a_{nj}(x)\partial_{x_j} u\Big).$$

On définit l'énergie équivalente par :

$$E(t) = \int_\Omega e^{\phi(x)} \Big(|u'|^2 + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\partial_{x_i} u \partial_{x_j} u + 2q_2(x)F(u)\Big)\, dx \tag{5.2.5}$$

et on trouve :

$$E'(t) = -2\int_\Omega e^{\phi(x)} u' \Big(q_3(x)g(u') + q_1(x)h(Du) + \nabla\phi(x)\cdot Du\Big)\, dx.$$

En utilisant (5.2.4) et (5.2.5), on obtient :

$$E(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{5.2.6}$$

où $\lambda = c\beta$ et $c > 0$ ne dépendant pas de β.

On obtient alors les résultats suivants :

1. Si $\beta = 0$, E vérifie (0.17).
2. Si $r = 1$ et β est assez petit, E verifie (0.18).

Démonstration. La démonstration de ces résultats est identique à celle du Théorème 3.2.1 (Chapitre 3).

Remarque. Des résultats similaires à ceux du Théorème 3.2.2 (Chapitre 3) peuvent être aussi démontrés dans le cas d'un feedback frontière

$$\begin{cases} u'' + Au + q_1(x)h(Du) + q_2(x)f(u) = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u + q_4(x)u + q_3(x)g(u') = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{5.2.7}$$

où $q_4 \in L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^+)$ vérifiant, pour $\epsilon_1 > 0$:

$$q_4(x) \geq \epsilon_1, \quad \forall x \in \Omega \quad \text{ou} \quad \Gamma_0 \neq \emptyset. \tag{5.2.8}$$

5.3. Equation des ondes avec un coefficient variable

Un autre exemple intéressant des systèmes distribués non dissipatifs est l'équation des ondes avec des coefficients variables (dépendant du temps). On considère ici l'exemple le plus simple suivant :

$$\begin{cases} u'' - A(t)u + bu' = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{5.3.1}$$

où $b > 0$, $A(t) = a(t)\Delta$ et $a \in C^2(\mathbb{R}^+) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+)$ vérifiant, pour $a_0 > 0$ et $\lambda \geq 0$:

$$a(t) \geq a_0, \quad \forall t \geq 0, \tag{5.3.2}$$

$$a'(t) \leq \lambda a(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{5.3.3}$$

Dans un cadre plus général ($A(t)u = \sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i}(a_{i,j}(x,t)\partial_{x_j}u)$), j'ai démontré dans [15], sous certaines hypothèses de régularité et de petitesse sur les coefficients $a_{i,j}$, que le système (5.3.1) avec $b = 0$ est bien posé au sens des semi-groupes linéaires et qu'il est exactement contrôlable.

En appliquant les résultats du Chapitre 2, on montre dans ce paragraphe que le feedback bu' stabilise exponentiellement le système (5.3.1).

On définit l'énergie de (5.3.1) par :

$$E(t) = \int_\Omega \left(|u'|^2 + a(t)|\nabla u|^2\right) dx.$$

Grâce à (5.3.2) et (5.3.3), E vérifie :

$$E(t) \geq \min\{a_0, 1\} \int_\Omega \left(|u'|^2 + |\nabla u|^2\right) dx, \tag{5.3.4}$$

$$E'(t) = \int_\Omega \left(a'(t)|\nabla u|^2 - 2b|u'|^2\right) dx \leq \lambda E(t). \tag{5.3.5}$$

Alors on a le résultat de stabilité exponentielle suivant : soit c_0 la plus petite constante vérifiant :

$$\int_\Omega |v|^2\, dx \leq c_0 \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.3.6}$$

Si

$$\lambda < \min\{b, \frac{2\min\{a_0, 1\}}{\sqrt{c_0}}\}, \tag{5.3.7}$$

le système (5.3.1) est exponentiellement stable, c-à-d : il existe c, $\omega > 0$ tels que

$$E(t) \leq ce^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{5.3.8}$$

Démonstration. On a, pour $0 \leq S \leq T < +\infty$:

$$0 = \int_S^T \int_\Omega u\Big(u'' - a(t)\Delta u + bu'\Big)\, dx\, dt$$

$$= \Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\, dx\Big]_S^T + \int_S^T \int_\Omega \Big(-|u'|^2 + a(t)|\nabla u|^2\Big)\, dx\, dt$$

$$= \Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\, dx\Big]_S^T + \int_S^T E(t)\, dt - 2\int_S^T \int_\Omega |u'|^2\, dx\, dt.$$

En utilisant l'égalité de (5.3.5), on trouve :

$$\int_S^T E(t)\, dt = -\Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\, dx\Big]_S^T + \frac{1}{b}\int_S^T \Big(-E'(t) + \int_\Omega a'(t)|\nabla u|^2\, dx\Big)\, dt.$$

En utilisant (5.3.3), on trouve :

$$(1 - \frac{\lambda}{b})\int_S^T E(t)\, dt \leq \frac{1}{b}(E(S) - E(T)) - \Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\, dx\Big]_S^T.$$

En utilisant maintenant (5.3.4) et (5.3.6), on obtient :

$$-\Big[\int_\Omega (uu' + \frac{b}{2}|u|^2)\, dx\Big]_S^T \leq \frac{\sqrt{c_0}}{2\min\{a_0, 1\}}(E(S) + E(T)) + \frac{bc_0}{2\min\{a_0, 1\}}E(S).$$

En combinant ces deux inégalités et en utilisant (5.3.7), on trouve :

$$\int_S^T E(t)\, dt \leq c_1 E(S) + c_2 E(T)$$

où $c_1 > 0$ et $c_2 = \frac{b}{b-\lambda}(\frac{\sqrt{c_0}}{2\min\{a_0,1\}} - \frac{1}{b})$. D'après (5.3.7), on a : $\lambda c_2 < 1$. Donc, en appliquant le Lemme 2.7 (pour $r = 0$), on déduit (5.3.8).

Remarque. L'estimation (5.3.8) peut être démontrée d'une façon tout à fait analogue si on rajoute à la première équation de (5.3.1) un potentiel (variable) $d(t)u$ où la fonction d vérifie certaines hypothèses de régularité et de petitesse, mais sans être forcément positive ou décroissante. L'estimation (5.3.8) reste aussi valable si on considère un feedback non linéaire $g(u')$ où g est une fonction donnée vérifiant l'hypothèse $(H.2)$ avec $r = 1$ (Chapitre 3). Dans les deux cas, la condition de petitesse à imposer sur λ dépendra de d et de g.

5.4. Système de Petrovsky avec un terme perturbant d'ordre 2

On considère ici le problème de stabilisation interne du système de Petrovsky semi-linéaire suivant :

$$\begin{cases} u'' + \Delta^2 u + q_1(x)h(\Delta u) & \\ \qquad +q_2(x)f(u) + q_3(x)g(u') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = \partial_\nu u = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{et} \quad u'(x,0) = u_1(x) & \Omega \end{cases} \tag{5.4.1}$$

où g et f sont des fonctions données vérifiant respectivement $(H.2)$ et $(H.4)$ (Chapitre 3) et q_i sont des fonctions bornées vérifiant (5.2.3). On suppose ici que $h \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ vérifiant, pour un réel $\beta \geq 0$:

$$\|h'\|_\infty < +\infty, \quad |h(\zeta)| \leq \beta|\zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}. \tag{5.4.2}$$

On définit l'énergie classique E par :

$$E(t) = \int_\Omega \Big(|u'|^2 + |\Delta u|^2 + 2q_2(x)F(u) \Big)\, dx \tag{5.4.3}$$

et on trouve :

$$E'(t) = -2\int_\Omega q_3(x)u'g(u')\, dx - 2\int_\Omega q_1(x)u'h(\Delta u)\, dx. \tag{5.4.4}$$

D'après (5.2.3), (5.4.2) et (5.4.3), on a :

$$E'(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{5.4.5}$$

où $\lambda = \beta\|q_1\|_\infty$.

Alors on obtient :

Si $\beta = 0$ (c-à-d : $h = 0$), E vérifie (0.17).

Si $r = 1$ et $\beta\|q_1\|_\infty$ est assez petit, E vérifie (0.18).

Démonstration. La démonstration est tout à fait analogue à celle du Théorème 3.2.1 (Chapitre 3) en utilisant le multiplicateur $E^{\frac{r-1}{2}}u$ (ici $\phi = 0$).

Remarque. Il semble que l'introduction d'une énergie équivalente n'est pas possible dans le cas de (5.4.1). Pour cette raison, on a considéré l'énergie classique et imposé la condition de petitesse sur tout h (dans le cas des équations d'ordre 2 par rapport à l'espace considérées dans ce chapitre et grâce à l'énergie équivalente, cette condition de petitesse n'est imposée que sur la partie non linéaire de h).

5.5. Système de deux équations couplées

On considère ici le système couplé de l'équation des ondes et le système de Petrovsky suivant :

$$\begin{cases} u_1'' + \Delta^2 u_1 + l_1(x)h_1(\Delta u_1) + l_2(x)f_1(u_1) & \\ \qquad +l_3(x)g_1(u_1') + a_2(x)u_2 = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_2'' - \Delta u_2 + q_1(x)h_2(\nabla u_2) + q_2(x)f_2(u_2) & \\ \qquad +q_3(x)g_2(u_2') + a_1(x)u_1 = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_2 = u_1 = \partial_\nu u_1 = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x), & \Omega \end{cases} \tag{5.5.1}$$

où f_i, g_i et l_i sont définies respectivement comme f, g et q_i dans le paragraphe 5.2, $h_1 \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $h_2 \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ vérifiant, pour β_1, $\beta_2 \geq 0$ et $\phi_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$:

$$\|h_1'\|_\infty < +\infty, \quad |h_1(\zeta)| \leq \beta_1|\zeta|, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R},$$

$$\|\nabla h_2\|_\infty < +\infty, \quad |q_1(x)h_2(\zeta) + \nabla\phi_2(x)\cdot\zeta| \leq \beta_2|\zeta|, \quad \forall x \in \Omega,\ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n$$

et a_1 et a_2 sont deux fonctions bornées telle que

$$\sqrt{c_0 c_1}\, e^{2\|\phi_2\|_\infty}\|a_1\|_\infty < 1 \tag{5.5.2}$$

où c_0 est défini par (5.3.6) et c_1 est la plus petite constante vérifiant :

$$\int_\Omega |v|^2\,dx \leq c_1 \int_\Omega |\Delta v|^2\,dx, \quad \forall v \in H_0^2(\Omega).$$

On définit maintenant l'énergie équivalente de (5.5.1) par :

$$E(t) = \int_\Omega \Big(|u_1'|^2 + |\Delta u_1|^2 + 2l_2(x)F_1(u_1)\Big)\,dx \tag{5.5.3}$$

$$+ \int_\Omega e^{\phi_2(x)}\Big(|u_2'|^2 + |\nabla u_2|^2 + 2q_2(x)F_2(u_2)\Big)\,dx + 2\int_\Omega e^{\phi_2(x)}a_1(x)u_1u_2\,dx.$$

L'hypothèse (5.5.2) garantit le fait que E soit une norme pour (u_1, u_2, u_1', u_2') équivalente à la norme usuelle de

$$H_0^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

D'autre part, l'énergie E vérifie :

$$E'(t) = -2 \int_\Omega \Big(l_3(x) u_1' g_1(u_1') + e^{\phi_2(x)} q_3(x) u_2' g_2(u_2') \Big)\, dx \tag{5.5.4}$$

$$-2 \int_\Omega \Big(l_1(x) u_1' h_1(\Delta u_1) + e^{\phi_2(x)} u_2' \Big(q_1(x) h_2(\nabla u_2) + \nabla \phi_2(x) \cdot \nabla u_2 \Big) \Big)\, dx$$

$$+2 \int_\Omega \Big(e^{\phi_2(x)} a_1(x) - a_2(x) \Big) u_1' u_2 \, dx$$

d'où, grâce aux hypothèses imposées sur les différentes fonctions,

$$E'(t) \leq \lambda E(t), \quad \forall t \geq 0 \tag{5.5.5}$$

où $\lambda = c \max\{\beta_2, \beta_1 \|l_1\|_\infty, \|e^{\phi_2(x)} a_1(x) - a_2(x)\|_\infty\}$ et $c > 0$ ne dépendant pas de $\max\{\beta_2, \beta_1 \|l_1\|_\infty, \|e^{\phi_2(x)} a_1(x) - a_2(x)\|_\infty\}$.

On obtient alors les résultats de stabilité suivants :

1. Si $\beta_1 = \beta_2 = 0$ et $a_2 = a_1 e^{\phi_2}$, E satisfait (0.17).

2. Si $r = 1$ et $\max\{\beta_2, \beta_1 \|l_1\|_\infty, \|e^{\phi_2(x)} a_1(x) - a_2(x)\|_\infty\}$ est assez petit, E satisfait (0.18).

Démonstration. Il suffit de multiplier la première et la deuxième équation de (5.5.1) par $E^{\frac{r-1}{2}} u_1$ et $E^{\frac{r-1}{2}} e^{\phi_2} u_2$ respectivement, d'intégrer la somme sur $[S, T] \times \Omega$ et d'utiliser les mêmes arguments que dans le paragraphe 3.3 (Chapitre 3).

Remarque. Sous des hypothèses supplémentaires similaires à celles du Théorème 3.2.2, on peut généraliser ces résultats au cas d'un feedback frontière pour l'équation des ondes, i.e. :

$$\begin{cases} u_2 = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \partial_\nu u_2 + q_4(x) u_2 + q_3(x) g_2(u_2') & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

où q_4 est une fonction positive et bornée vérifiant (5.2.8).

On peut aussi considérer un système couplé de deux équations des ondes ou de deux équations de Petrovsky (avec même un couplage d'ordre ≤ 1 pour les ondes et d'ordre ≤ 2 pour Petrovsky ou un couplage non linéaire comme par exemple celui que j'ai considéré dans [21]).

5.6. Système général d'élasticité

On considère l'exemple du système d'élasticité avec des coefficients $a_{ijkl}(x)$ (dépendant uniquement de l'espace) suivant :

$$\begin{cases} u_i'' - \sigma_{ij,j} + q_{1,i}(x)h_i(Du_i) & \\ \quad +q_{2,i}(x)f_i(u_i) + q_{3,i}(x)g_i(u_i') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_i = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x) & \Omega, \\ i = 1, \cdots, n & \end{cases} \tag{5.6.1}$$

où on utilise les mêmes notations qu'auparavant (paragraphe 5.1) avec

$$Du_i = (\sigma_{i1}, \cdots, \sigma_{in}). \tag{5.6.2}$$

Ici, pour $i = 1, \cdots, n$, f_i, g_i, $q_{1,i}$, $q_{2,i}$ et $q_{3,i}$ vérifient respectivement les mêmes hypothèses que f, g, q_1, q_2 et q_3 dans le paragraphe 5.2. On suppose que $h_i \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ vérifiant, pour $\beta_i \geq 0$ et $\phi_i \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $i = 1, \cdots, n$:

$$\|\nabla h_i\|_\infty < +\infty, \quad |q_{1,i}(x)h_i(\zeta) + \nabla\phi_i(x) \cdot \zeta| \leq \beta_i|\zeta|, \ \forall x \in \Omega, \ \forall \zeta \in \mathbb{R}^n.$$

L'énergie équivalente définie par :

$$E(t) = \int_\Omega \sum_{i=1}^n e^{\phi_i(x)} \Big(|u_i'|^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + 2q_{2,i}(x)F_i(u_i) \Big)\, dx \tag{5.6.3}$$

vérifie, d'après (5.6.1) et (5.6.2) :

$$\begin{aligned} E'(t) &= -2 \int_\Omega \sum_{i=1}^n e^{\phi_i(x)} u_i' \Big(q_{3,i}(x)g_i(u_i') + q_{1,i}(x)h_i(Du_i) + \nabla\phi_i(x) \cdot Du_i \Big)\, dx \\ &\leq c \max\{\beta_i\} E(t) \end{aligned}$$

où $c > 0$ ne dépendant pas de $\max\{\beta_i\}$.

Et on trouve les résultats de stabilité suivants :

Si $\beta_i = 0$ pour tout $i = 1, \cdots, n$, E vérifie (0.17).

Si $r = 1$ et $\max\{\beta_i\}$ est assez petit, E vérifie (0.18).

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du Théorème 3.2.1 (Chapitre 3) en multipliant la première équation de (5.6.1) par $E^{\frac{r-1}{2}} e^{\phi_i} u_i$ et en intégrant la somme sur $[S, T] \times \Omega$.

Remarque. Sous certaines hypothèses géométriques sur le domaine Ω (voir mon article [8] et ses références), ces résultats peuvent être généralisés au cas d'un feedback défini sur une partie du bord, i. e. :

$$\begin{cases} u_i = 0 & \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\nu_j + q_{4,i}(x)u_i + q_{3,i}(x)g_i(u_i') = 0 & \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{5.6.4}$$

où $q_{4,i}$ sont des fonctions positives et bornées vérifiant (5.2.8).

PARTIE 2

STABILISATION INDIRECTE

CHAPITRE 6

Rappels de quelques résultats connus

La stabilisation des systèmes couplés par un seul damping ou feedback (stabilisation indirecte) a suscité l'intérêt de nombreux auteurs ces dernières années. Les résultats les plus récents dans cette direction sont ceux obtenus par F. Alabau-Boussouira [2] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3] où des estimations polynômiales (dépendant de la régularité des solutions) ont été démontrées pour quelques systèmes hyperboliques linéaires faiblement couplés. Ces résultats sont basés sur le Théorème 6.1 ci-après obtenu par F. Alabau-Boussouira [2] (sous une forme moins générale) et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3].

L'objectif de cette partie est d'étendre le Théorème 6.1 au cas de systèmes non linéaires ou non dissipatifs et de donner deux applications à la stabilisation indirecte par un feedback non linéaire localement distribué et dégénéré, et à la stabilisation d'un système couplé de deux équations des ondes générales.

Soient $\mathcal{A}$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe continu $e^{t\mathcal{A}}$ dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ son domaine et $E \in C(\mathcal{H}, \mathbb{R}^+)$ une fonction donnée. Pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, on note : $\mathcal{U}(t) = e^{t\mathcal{A}}U^0$, $E_0(t) = E(t) = E(\mathcal{U}(t))$ et $E_k(t) = E(\mathcal{U}^{(k)}(t))$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Les résultats de F. Alabau-Boussouira [2] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3] sont basés sur le théorème suivant :

Théorème 6.1. *Supposons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire. Supposons qu'il existe un entier $m \in \mathbb{N}$ et une constante positive c tels que*

$$\int_0^T E(t)\,dt \leq c\sum_{k=0}^{m} E_k(0), \quad \forall T \geq 0, \quad \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m).$$

Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{nm})$

$$\int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!}E(t)\,dt \leq c^n(1+m)^{n-1}\sum_{k=0}^{nm} E_k(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \tag{6.1}$$

Si, de plus, E est décroissante pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, alors pour tout entier

$n \in \mathbb{N}^*$ *et tout* $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{nm})$

$$E(t) \leq c^n(1+m)^{n-1}\frac{n!}{t^n}\sum_{k=0}^{nm} E_k(0), \quad \forall t > 0. \tag{6.2}$$

F. Alabau-Boussouira [2] a considéré le problème de la stabilisation de quelques systèmes hyperboliques dissipatifs couplés et soumis à un seul feedback frontière linéaire. En montrant le Théorème 6.1, l'auteur de [2] a obtenu des estimations polynômiales qui dépendent de la régularité des solutions. Les mêmes estimations ont été démontrées par F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3] dans le cas d'un feedback interne. Or, si le système n'est pas dissipatif (comme dans le cas de deux constantes de couplage différentes) ou si le feedback est non linéaire, ces résultats ne sont plus applicables. L'objectif des chapitres 7-9 est d'étendre ces résultats, entre autres, dans ces cas précis.

CHAPITRE 7

Généralisations

On montre dans ce chapitre deux théorèmes qui permettent d'obtenir quelques estimations (polynômiales par exemple) de stabilité indirecte de certains systèmes couplés (le système est contrôlé par une seule équation). Ces deux théorèmes généralisent le Théorème 6.1 dans plusieurs directions, en particulier, ils permettent de traiter le cas de systèmes non linéaires ou non dissipatifs.

On considère les mêmes notations utilisées dans le Chapitre 6 et on démontre les théorèmes 7.1 et 7.2 qui permettent de traiter le cas non linéaire et le cas non dissipatif respectivement.

Théorème 7.1. *Supposons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire et que la fonction E est décroissante. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+)$ une fonction dérivable, décroissante et strictement positive vérifiant, pour deux réels $a_1 \geq a_2 > 0$: pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$, il existe $a > 0$ tel que*

$$\int_S^T f(t)E^{a_1}(t)\,dt \leq a f(S)E^{a_2}(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T. \tag{7.1}$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, il existe $\bar{a}$, $\hat{a} > 0$ tels que

$$(E(T))^{(n-1)(a_1-a_2)} \int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)E^{a_1}(t)\,dt \tag{7.2}$$

$$\leq \bar{a} f(S)E^{a_2}(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T,$$

$$E(t) \leq \hat{a}\Big(\frac{E^{a_2}(0)}{f(t)t^n}\Big)^{\frac{1}{na_1-(n-1)a_2}}, \quad \forall t > 0. \tag{7.3}$$

Remarques. 1. Si $\mathcal{A}$ est non linéaire, alors on obtient (7.2) et (7.3) uniquement pour $n = 1$.

2. En utilisant la décroissance de E^{a_1}, (7.1) implique que, pour tout $U^0 \in \mathcal{H}$,

$$E(t) \leq \Big(\frac{af(0)E^{a_2}(0)}{\int_0^t f(\tau)\,d\tau}\Big)^{\frac{1}{a_1}}, \quad \forall t > 0.$$

Cette estimation est plus forte que celle donnée par (7.3) pour $n = 1$ et sans que f soit nécessairement décroissante.

3. Si $a_1 = a_2 = 1$ et $f(t) = 1$, (7.3) coïncide avec (6.2).

Démonstration du Théorème 7.1. On montre (7.2) par récurrence sur n. Pour $n = 1$, (7.2) n'est que l'hypothèse (7.1). Supposons que (7.2) est vrai. On a :

$$(E(T))^{(n-1)(a_1-a_2)} \int_S^T \int_t^T \frac{(\tau - S)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) E^{a_1}(\tau)\, d\tau\, dt \leq \bar{a} \int_S^T f(t) E^{a_2}(t)\, dt,$$

donc

$$(E(T))^{n(a_1-a_2)} \int_S^T \frac{(t-S)^n}{n!} f(t) E^{a_1}(t)\, dt \leq \bar{a}(E(T))^{a_1-a_2} \int_S^T f(t) E^{a_2}(t)\, dt.$$

D'autre part, (7.1) et la décroissance de E impliquent que

$$(E(T))^{a_1-a_2} \int_S^T f(t) E^{a_2}(t)\, dt \leq \int_S^T f(t) E^{a_1}(t)\, dt \leq a f(S) E^{a_2}(S),$$

donc, d'après les deux inégalités précédentes, on obtient (7.2) (pour le rang n). En utilisant la décroissance de fE^{a_1}, (7.2) implique (7.3).

Théorème 7.2. *Supposons que l'opérateur $\mathcal{A}$ est linéaire et que la fonction E est dérivable. Soit $f \in C(\mathbb{R}^+)$ une fonction dérivable, décroissante et strictement positive telle qu'il existe a_0, a_1, $a_2 \geq 0$ et $m \in \mathbb{N}$ vérifiant : $\lim_{t\to+\infty} \frac{a_0 a_2}{f(t)} < 1$ et*

$$\int_0^T f(t)E(t)\, dt \leq a_1 \sum_{k=0}^{m} E_k(0) + a_2 E(T), \quad \forall T \geq 0, \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m), \quad (7.4)$$

$$E'(t) \leq a_0 E(t), \quad \forall t \geq 0, \forall U^0 \in \mathcal{H}. \quad (7.5)$$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\bar{a}$, $\hat{a} > 0$ tels que

$$\int_S^T \frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)E(t)\, dt \quad (7.6)$$

$$\leq \bar{a} f(S) \sum_{k=0}^{mn} E_k(S), \quad \forall 0 \leq S \leq T,\ \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}),$$

$$E(t) \leq \hat{a}\Big(\sum_{k=0}^{mn} E_k(0)\Big) \frac{a_0 t + 1}{f(t) t^n}, \quad \forall t > 0,\ \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}). \quad (7.7)$$

Remarques. 1. Si $\mathcal{A}$ est non linéaire, on obtient les inégalités (7.6) et (7.7) uniquement pour $n = 1$.

2. Si $a_0 = 0$, alors (7.4) implique que, pour tout $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m)$,

$$E(t) \leq \frac{(a_1 + a_2)\Big(\sum_{k=0}^m E_k(0)\Big)}{\int_0^t f(\tau)\, d\tau}, \quad \forall t > 0.$$

Cette estimation est plus forte que celle donnée par (7.7) pour $n = 1$ et sans que f soit nécessairement décroissante.

3. Si $a_0 = 0$ et $f(t) = 1$, (7.7) coïncide avec (6.2).

Démonstration du Théorème 7.2. Premièrement, on majore le terme $a_2 E(T)$ dans l'inégalité (7.4). D'après (7.4), (7.5) et la décroissance de f, on a :

$$a_2(E(T) - E(0)) = a_2 \int_0^T E'(t)\, dt \leq a_2 a_0 \int_0^T E(t)\, dt \leq \frac{a_2 a_0}{f(T)} \int_0^T f(t) E(t)\, dt$$
$$\leq \frac{a_0 a_2 a_1}{f(T)} \sum_{k=0}^m E_k(0) + \frac{a_0 a_2^2}{f(T)} E(T),$$

comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{a_0 a_2}{f(t)} < 1$ et f est décroissante, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que $\sup_{t\geq 0}\{\frac{a_0 a_2}{f(t)}\} \leq 1 - \epsilon$, et par conséquent

$$a_2 E(T) \leq \frac{1}{\epsilon}\Big(a_2 E(0) + (1-\epsilon) a_1 \sum_{k=0}^m E_k(0)\Big) \leq \frac{a_1 + a_2}{\epsilon} \sum_{k=0}^m E_k(0).$$

Donc, on conclut de (7.4) que, pour $a_3 = \frac{1}{f(0)}(a_1 + \frac{a_1 + a_2}{\epsilon})$,

$$\int_0^T f(t) E(t)\, dt \leq a_3 f(0) \sum_{k=0}^m E_k(0), \quad \forall T \geq 0, \forall U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^m).$$

En appliquant le Théorème 6.1 sur $f(t)E(t)$, on obtient (7.6).

D'autre part, on a :

$$\frac{T^n}{n!} f(T) E(T) = \int_0^T (\frac{t^n}{n!} f(t) E(t))'\, dt$$
$$= \int_0^T \Big(\frac{t^n}{n!} f(t) E'(t) + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f(t) E(t) + \frac{t^n}{n!} f'(t) E(t)\Big)\, dt$$
$$\leq (1 + a_0 T) \int_0^T \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} f(t) E(t)\, dt \leq \bar{a} f(0)(1 + a_0 T) \sum_{k=0}^{mn} E_k(0)$$

d'où (7.7).

CHAPITRE 8

Stabilisation par un feedback localement distribué

On donne maintenant une application du Théorème 7.1 à la stabilisation indirecte par un feedback interne localement distribué et dégénéré de deux équations des ondes couplées. Dans toute la suite, c désigne une constante générique qui peut changer d'une ligne à l'autre, et c_0 désigne la plus petite constante vérifiant (inégalité de Poincaré) :

$$\int_\Omega |v|^2\,dx \le c_0 \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{8.1}$$

On considère le système faiblement couplé de deux équations des ondes avec condition de Dirichlet homogène au bord suivant :

$$\begin{cases} u_1'' - \Delta u_1 + \alpha u_2 + a(x) g(u_1') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_2'' - \Delta u_2 + \alpha u_1 = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_1 = u_2 = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x),\ i = 1,2 & \Omega \end{cases} \tag{$P9$}$$

où Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 de frontière Γ, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $a \in C(\Omega)$ et $g \in C^1(\mathbb{R})$ vérifiant : $0 < |\alpha| < \frac{1}{c_0}$ et, pour d_1, $d_2 > 0$,

$$d_2 \le g'(s) \le d_1 \quad \text{et} \quad d_2|s| \le |g(s)| \le d_1|s|, \quad \forall s \in \mathbb{R}, \tag{8.2}$$

$$a(x) > 0 \quad \forall x \in \omega \quad \text{et} \quad a(x) \ge 0 \quad \forall x \in \Omega \tag{8.3}$$

où ω et Ω vérifient les mêmes hypothèses géométriques que celles considérées par A. Beyrath [9], autrement dit, il existe $\epsilon > 0$, des sous-domaines $\Omega_j \subset \Omega$, $1 \le j \le J$, avec un bord Lipschitz Γ_j et des points $x_j \in \mathbb{R}^N$ tels que

$$\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{si} \quad i \ne j,$$

$$\Omega \cap \mathcal{N}_\epsilon[\cup_j \Gamma_j^+ \cup (\Omega \setminus \cup_j \Omega_j)] \subset \omega$$

avec $\mathcal{N}_\epsilon(\theta) = \{x \in \mathbb{R}^N : \inf_{y\in\theta} |x-y| < \epsilon\}$ où $\theta \subset \mathbb{R}^N$ et

$$\Gamma_j^+ = \{x \in \Gamma_j : (x - x_j)\cdot\nu > 0\}.$$

Le cas le plus simple est de prendre ω comme un voisinage de

$$\Gamma^+ = \{x \in \Gamma : (x - x_0) \cdot \nu > 0\}$$

dans Ω, c-à-d: $\omega = \Omega \cap \mathcal{N}_\epsilon(\Gamma^+)$ pour un $\epsilon > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$ fixé.

Le problème $(P9)$ est bien posé au sens suivant (voir A. Beyrath [9, 10]). On pose :

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

muni du produit scalaire

$$< \mathcal{V}, \mathcal{Z} >_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \Big(\nabla v_1 \cdot \nabla z_1 + \nabla v_2 \cdot \nabla z_2 + v_3 z_3 + v_4 z_4 + \alpha(v_1 z_2 + v_2 z_1) \Big) \, dx$$

où $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ et $\mathcal{Z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$, et on définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = (-v_3, -v_4, -\Delta v_1 + \alpha v_2 + a(x) g(v_3), -\Delta v_2 + \alpha v_1)^T.$$

Le problème $(P9)$ peut être reformulé sous la forme abstraite :

$$U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{et} \quad U = (u_1, u_2, u_1', u_2')^T.$$

Pour tout $U^0 = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H}$, le système $(P9)$ admet une unique solution $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Si $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, alors la solution U est plus régulière et elle appartient à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Si g est linéaire, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$, la solution U vérifie :

$$U \in \cap_{k=0}^n C^{n-k}(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A}^k)).$$

On définit l'énergie de $(P9)$ par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|u_1'|^2 + |u_2'|^2 + |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 + 2\alpha u_1 u_2) \, dx.$$

On a : E vérifie :

$$E(t) \geq \frac{1}{2}(1 - |\alpha| c_0) \int_\Omega (|u_1'|^2 + |u_2'|^2 + |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2) \, dx,$$

$$E'(t) = -\int_\Omega a(x) u_1' g(u_1') \, dx \leq 0. \tag{8.4}$$

On sait que

1. $(P9)$ n'est jamais exponentiellement stable (voir F. Alabau-Boussouira [2] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3]).

2. Si g est linéaire, $|\alpha|$ est assez petit et $a(x) \geq \delta > 0$, $\forall x \in \omega$ (cas non dégénéré), alors (A. Beyrath [9, 10])

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n) :\ E(t) \leq ct^{-n},\ \forall t > 0,$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0.$$

Dans ce paragraphe, on s'intéresse au cas dégénéré en supposant que

$$\exists p > 0 :\ \int_\omega a^{-p}(x)\, dx < +\infty \tag{8.5}$$

et on montre le résultat de stabilité suivant :

Théorème 8.1. *Supposons satisfaites toutes les hypothèses ci-dessus. Soient $|\alpha|$ assez petit et*

$$r = \begin{cases} \frac{N}{2p} & si \quad N \geq 3, \\ \frac{1+\epsilon_0}{p} & si \quad N=1,2 \quad (\epsilon_0 > 0 \text{ quelconque}). \end{cases}$$

Alors il existe une constante $c > 0$ (qui ne dépend que des données initiales, et ce, de manière continue) telle que

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \forall t > 0 :\ E(t) \leq ct^{-\frac{1}{r+1}} \quad si\ r < 1, \tag{8.6}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}),\ \forall t > 0 :\ E(t) \leq ct^{-\frac{1}{r}} \quad si\ r \geq 1, \tag{8.7}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0. \tag{8.8}$$

Si g est linéaire, alors pour tout $t > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n) :\ E(t) \leq ct^{-\frac{n}{n(r+1)-(n-1)\min\{1,r\}}}. \tag{8.9}$$

Remarque. En appliquant le Théorème 7.1 et les techniques de P. Martinez [56], on peut affaiblir (8.2) en imposant l'inégalité $d_2|s| \leq |g(s)|$ uniquement pour $|s| \geq 1$, et montrer que

$$E(t) \leq c\Big(\int_0^t f(\tau)\, d\tau\Big)^{\frac{-1}{r+1}}, \quad \forall t > 0$$

où f est une fonction qui dépend uniquement de g. D'après les hypothèses sur f dans le Théorème 7.1, cette estimation est plus faible que (8.6) et (8.7).

Démonstration du Théorème 8.1. En utilisant le fait que $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ soit dense dans $\mathcal{H}$ et les estimations (8.6) et (8.7), on obtient facilement (8.8).

Le début de la démonstration est identique à celle de A. Beyrath [9, 10] : on considère les mêmes multiplicateurs multipliés par E^r. On obtient, pour tout $0 \leq S \leq T < +\infty$:

$$\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt \leq cE^r(S)(E(S)+E_1(S)) + c\int_S^T E^r(t)\int_\omega {u_1'}^2\,dx\,dt \tag{8.10}$$

où $E_1(t) = E(U'(t))$.

On pose maintenant : $q = 1+\frac{2}{pr-1}$, alors $q \in]1,+\infty[$ et $(N-2)q \leq N+2$. En utilisant (8.2), (8.4), (8.5), l'injection compacte $H^1(\Omega) \to L^{q+1}(\Omega)$ et le fait que $u_1' \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^1(\Omega))$, on obtient, en appliquant deux fois l'inégalité de Hölder et le fait que $\frac{p}{p+1}(1-\frac{2r}{(r+1)(q+1)}) = \frac{1}{r+1}$ et $\frac{2(p+1)(q+1)}{p((r+1)(q+1)-2r)} = 2$ (voir mon article [13]) :

$$\int_\omega {u_1'}^2\,dx = \int_\omega |u_1'|^{\frac{2r}{r+1}}|u_1'|^{\frac{2}{r+1}}\,dx$$

$$\leq c(\int_\omega |u_1'|^{q+1}\,dx)^{\frac{1}{q+1}}(\int_\omega |u_1'|^{\frac{2(q+1)}{(r+1)(q+1)-2r}}\,dx)^{1-\frac{2r}{(r+1)(q+1)}}$$

$$\leq c(\int_\omega a^{-\frac{p}{p+1}}a^{\frac{p}{p+1}}|u_1'|^{\frac{2(q+1)}{(r+1)(q+1)-2r}}\,dx)^{1-\frac{2r}{(r+1)(q+1)}}$$

$$\leq c\Big((\int_\omega a^{-p}\,dx)^{\frac{1}{p+1}}(\int_\omega a|u_1'|^{\frac{2(p+1)(q+1)}{p((r+1)(q+1)-2r)}}\,dx)^{\frac{p}{p+1}}\Big)^{1-\frac{2r}{(r+1)(q+1)}}$$

$$\leq c(\int_\omega a{u_1'}^2\,dx)^{\frac{1}{r+1}} \leq c(\int_\Omega a u_1' g(u_1')\,dx)^{\frac{1}{r+1}} = c(-E'(t))^{\frac{1}{r+1}}.$$

Donc, d'après (8.10) et l'inégalité de Young, on obtient (pour tout $\epsilon > 0$) :

$$\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt \leq cE^r(S)(E(S)+E_1(S)) + c\int_S^T E^r(t)(-E'(t))^{\frac{1}{r+1}}\,dt$$

$$\leq cE^r(S)(E(0)+E_1(0)) + \epsilon\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt - c\int_S^T E'(t)\,dt$$

$$\leq c(E^r(S)+E(S)) + \epsilon\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt.$$

En choisissant alors $0 < \epsilon < 1$, on obtient :

$$\int_S^T E^{r+1}(t)\,dt \le cE^{\min\{1,r\}}(S). \tag{8.11}$$

En utilisant la décroissance de E^{r+1} et en choisissant $S = 0$, on obtient (8.6). En appliquant le Théorème 7.1 avec $f(t) = 1$, $a_1 = r + 1$ et $a_2 = \min\{1, r\}$, on trouve (8.9).

Si $r \ge 1$, l'estimation (8.11) implique que :

$$\int_S^{+\infty} E^{r+1}(t)\,dt \le cE(S), \quad \forall S \ge 0. \tag{8.12}$$

Donc, en appliquant le Lemme 1.1, on déduit (8.7). Ceci achève la démonstration du Théorème 8.1.

CHAPITRE 9

Système couplé de deux équations des ondes

L'objectif de ce chapitre est de démontrer des estimations polynômiales de stabilité du système couplé de deux équations des ondes générales, dont la première équation est soumise à un feedbak interne, avec deux termes perturbants d'ordre 1 et la condition de Dirichlet homogène au bord

$$\begin{cases} u_1'' - A_1 u_1 - \nabla\phi_1 \cdot (D_1 u_1) + \beta_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + g(u_1') = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_2'' - A_2 u_2 - \nabla\phi_2 \cdot (D_2 u_2) + \beta_2 u_2 + \alpha_1 u_1 = 0 & \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u_1 = u_2 = 0 & \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u_i(x,0) = u_i^0(x) \quad \text{et} \quad u_i'(x,0) = u_i^1(x),\ i = 1, 2 & \Omega \end{cases} \qquad (P10)$$

où Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^N$ de classe C^2 de frontière Γ, $g \in C^1(\mathbb{R})$, ϕ_1, $\phi_2 \in C^1(\bar\Omega)$, α_1, α_2, β_1, $\beta_2 \in C(\bar\Omega)$ et

$$A_1 u_1 = \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i}(a_{ij}(x)\partial_{x_j} u_1), \quad A_2 u_2 = \sum_{i,j=1}^N \partial_{x_i}(b_{ij}(x)\partial_{x_j} u_2)$$

avec des coefficients a_{ij}, $b_{ij} \in C^1(\bar\Omega)$ tels que

$$\exists d_1,\, d_2 > 0 :\ d_2 \le g'(s) \le d_1,\ d_2|s| \le |g(s)| \le d_1|s|,\ \forall s \in \mathbb{R}, \qquad (9.1)$$

$$a_{ij}(x) = a_{ji}(x), \quad b_{ij}(x) = b_{ji}(x) \quad \forall i,j \in \{1, \cdots, N\}, \forall x \in \Omega,$$

$$\exists \lambda_1,\, \lambda_2 > 0 :\ \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda_1|\xi|^2,\ \sum_{i,j=1}^N b_{ij}(x)\xi_i\xi_j \ge \lambda_2|\xi|^2,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \forall x \in \Omega,$$

$$\inf_\Omega \beta_1 > -\frac{\lambda_1}{c_0}, \quad \inf_\Omega \beta_2 > -\frac{\lambda_2}{c_0},$$

$$\max\{\|\alpha_1\|_\infty, \|\alpha_2\|_\infty\} \text{ est assez petit} \quad \text{et} \quad \inf_\Omega |\alpha_2| > 0$$

où c_0 est la constante définie par (8.1). On utilise (comme auparavant) les notations :

$$D_1 u_1 = \Big(\sum_{j=1}^N a_{1j}(x)\partial_{x_j} u_1, \cdots, \sum_{j=1}^N a_{Nj}(x)\partial_{x_j} u_1\Big),$$

$$D_2 u_2 = \Big(\sum_{j=1}^{N} b_{1j}(x)\partial_{x_j} u_2, \cdots, \sum_{j=1}^{N} b_{Nj}(x)\partial_{x_j} u_2\Big)$$

On peut montrer (exactement de la même façon que pour le problème $(P9)$) que le problème $(P10)$ est bien posé. On note :

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

muni du produit scalaire

$$< \mathcal{V}, \mathcal{Z} >_{\mathcal{H}} = \int_\Omega \Big(D_1 v_1 \cdot \nabla z_1 + \beta_1 v_1 z_1 + v_3 z_3\Big)\, dx$$

$$+ \int_\Omega \Big(D_2 v_2 \cdot \nabla z_2 + \beta_2 v_2 z_2 + v_4 z_4 + \alpha_1 (v_1 z_2 + v_2 z_1)\Big)\, dx$$

où $\mathcal{V} = (v_1, v_2, v_3, v_4)^T$ et $\mathcal{Z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$, et on définit l'opérateur $\mathcal{A}$ par :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega),$$

$$\mathcal{A}\mathcal{V} = (-v_3, -v_4, -A_1 v_1 - \nabla\phi_1 \cdot (D_1 v_1) + \beta_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + g(v_3),$$
$$-A_2 v_2 - \nabla\phi_2 \cdot (D_2 v_2) + \beta_2 v_2 + \alpha_1 v_1)^T.$$

Le problème $(P10)$ peut être reformulé sous la forme abstraite :

$$U' + \mathcal{A}U = 0 \quad \text{et} \quad U = (u_1, u_2, u_1', u_2')^T.$$

Pour tout $U^0 = (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H}$, le système $(P10)$ admet une unique solution $U \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Si $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, la solution U est plus régulière et elle appartient à $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$.

Si g est linéaire et $U^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^n)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$, la solution U vérifie :

$$U \in \cap_{k=0}^{n} C^{n-k}(\mathbb{R}^+, \mathcal{D}(\mathcal{A}^k)).$$

On définit l'énergie (équivalente) de $(P10)$ par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_1}\Big(|u_1'|^2 + \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\partial_{x_i} u_1 \partial_{x_j} u_1 + \beta_1 |u_1|^2\Big)\, dx$$

$$+\frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_2}\Big(|u_2'|^2 + \sum_{i,j=1}^{N} b_{ij}(x)\partial_{x_i} u_2 \partial_{x_j} u_2 + \beta_2 |u_2|^2\Big)\, dx + \int_\Omega \alpha_1 e^{\phi_2} u_1 u_2\, dx.$$

D'après les hypothèses ci-dessus et l'inégalité (8.1), il existe des constantes $\hat{c}_1$, $\hat{c}_2$, $\hat{c}_3$, $\hat{c}_4 > 0$ (ne dépendant ni de α_1 ni de α_2) telles que

$$\frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_1}\Big(|u_1'|^2+\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1+\beta_1|u_1|^2\Big)\,dx \geq \hat{c}_1\int_\Omega\Big(|u_1'|^2+|\nabla u_1|^2\Big)\,dx,$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega e^{\phi_2}\Big(|u_2'|^2+\sum_{i,j=1}^N b_{ij}(x)\partial_{x_i}u_2\partial_{x_j}u_2+\beta_2|u_2|^2\Big)\,dx \geq \hat{c}_2\int_\Omega\Big(|u_2'|^2+|\nabla u_2|^2\Big)\,dx,$$

$$\Big|\int_\Omega \alpha_1 e^{\phi_2}u_1u_2\,dx\Big| \leq \hat{c}_3\|\alpha_1\|_\infty\int_\Omega(|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2)\,dx,$$

$$\Big|\int_\Omega \alpha_2 e^{\phi_1}u_1u_2\,dx\Big| \leq \hat{c}_4\|\alpha_2\|_\infty\int_\Omega(|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2)\,dx.$$

On obtient alors les inégalités suivantes :

$$E(t) \geq a_1\int_\Omega\Big(|u_1'|^2+|u_2'|^2+|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2\Big)\,dx, \tag{9.2}$$

$$\begin{aligned} E'(t) &= -\int_\Omega e^{\phi_1}u_1'g(u_1')\,dx+\int_\Omega(\alpha_1e^{\phi_2}-\alpha_2e^{\phi_1})u_1'u_2\,dx \\ &\leq -\int_\Omega e^{\phi_1}u_1'g(u_1')\,dx+a_0E(t) \end{aligned} \tag{9.3}$$

où $a_1=\min\{\hat{c}_1,\hat{c}_2\}-\hat{c}_3\|\alpha_1\|_\infty$ et $a_0=\frac{\sqrt{c_0}}{2a_1}\|\alpha_1e^{\phi_2}-\alpha_2e^{\phi_1}\|_\infty$. Les conditions de petitesse à imposer sur $\|\alpha_1\|_\infty$ et $\|\alpha_2\|_\infty$ sont les suivantes :

$$\|\alpha_1\|_\infty < \frac{1}{\hat{c}_3}\min\{\hat{c}_1,\hat{c}_2\} \quad \text{et} \quad \|\alpha_2\|_\infty < \frac{1}{\hat{c}_4}\min\{\hat{c}_1,\hat{c}_2\}$$

d'où $a_1>0$, et par conséquent $<,>_{\mathcal{H}}$ engendre une norme sur $\mathcal{H}$, et E est une norme pour (u_1,u_2,u_1',u_2') équivalente à la norme usuelle de

$$H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^2(\Omega).$$

L'inégalité (9.3) montre que E n'est pas nécessairement décroissante si $\alpha_1e^{\phi_2}\neq\alpha_2e^{\phi_1}$.

On sait que

1. $(P10)$ n'est jamais exponentiellement stable (voir F. Alabau-Boussouira [2] et F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3]).

2. Si g est linéaire, $\phi_1 = \phi_2 = 0$ et $\alpha_1 = \alpha_2 = \text{const}$, alors (voir F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik [3]) : soit $m = 1$ si $A_1 = A_2$, et $m = 2$ sinon. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}) :\ E(t) \leq ct^{-n},\ \forall t > 0,$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0.$$

On montre ici les résultats de stabilité indirecte suivants :

Théorème 9.1. *Supposons satisfaites toutes les hypothèses ci-dessus. Soit m un entier tel que $m = 1$ si $A_1 = A_2$, et $m = 2$ sinon.*

1. Si g est linéaire et $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$, il existe $c > 0$ (ne dépendant pas des données initiales) vérifiant, pour tout $t > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{mn}) :\ E(t) \leq c\Big(\sum_{k=0}^{mn} E_k(0)\Big)t^{-n}, \tag{9.4}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0. \tag{9.5}$$

2. Si g est non linéaire et $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$, les estimations (9.4) pour $n = 1$ et (9.5) sont satisfaites.

3. Si $A_1 = A_2$ et g est linéaire tel que $\|\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1}\|_\infty$ est assez petit, alors il existe $c > 0$ (ne dépendant pas des données initiales) vérifiant, pour tout $t > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{n}) :\ E(t) \leq c\Big(\sum_{k=0}^{n} E_k(0)\Big)(a_0 t + 1)t^{-n}, \tag{9.6}$$

$$\forall (u_1^0, u_2^0, u_1^1, u_2^1) \in \mathcal{H} :\ E(t) \to 0. \tag{9.7}$$

Remarque. Lorsque $\alpha_1 e^{\phi_2} \neq \alpha_2 e^{\phi_1}$, le système $(P10)$ n'est pas dissipatif (son énergie n'est pas décroissante en général). Dans ce cas-là, le Théorème 9.1 ne donne aucune estimation de stabilité de $(P10)$ si $A_1 \neq A_2$ ou si g est non linéaire.

Démonstration du Théorème 9.1. Par densité, (9.4) et (9.6) impliquent (9.5) et (9.7) respectivement. D'autre part, (9.3) implique (7.5). Donc, en montrant (7.4), on obtient les autres résultats du Théorème 9.1.

En multipliant la première et la deuxième équation de $(P10)$ respectivement par $e^{\phi_1}u_1$ et $e^{\phi_2}u_2$ et en intégrant par parties leur somme sur $\Omega\times[0,T]$, on trouve :

$$\int_0^T E(t)\,dt = -\frac{1}{2}\Big[\int_\Omega (e^{\phi_1}u_1u_1' + e^{\phi_2}u_2u_2')\,dx\Big]_0^T \tag{9.8}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega(\alpha_1 e^{\phi_2}-\alpha_2 e^{\phi_1})u_1u_2\,dx\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}u_1 g(u_1')\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega(e^{\phi_1}|u_1'|^2 + e^{\phi_2}|u_2'|^2)\,dx\,dt.$$

On majore successivement les termes de droite de (9.8).

D'après (8.1) et (9.2), on a :

$$\frac{1}{2}\Big|\int_\Omega(e^{\phi_1}u_1u_1' + e^{\phi_2}u_2u_2')\,dx\Big|$$

$$\leq \frac{1}{4}e^{\max\{\|\phi_1\|_\infty,\|\phi_2\|_\infty\}}\int_\Omega\Big(\frac{1}{\sqrt{c_0}}|u_1|^2 + \sqrt{c_0}|u_1'|^2 + \frac{1}{\sqrt{c_0}}|u_2|^2 + \sqrt{c_0}|u_2'|^2\Big)\,dx$$

$$\leq \frac{\sqrt{c_0}}{4}e^{\max\{\|\phi_1\|_\infty,\|\phi_2\|_\infty\}}\int_\Omega\Big(|u_1'|^2+|u_2'|^2+|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2\Big)\,dx \leq c_1E(t)$$

où $c_1 = \frac{\sqrt{c_0}}{4a_1}e^{\max\{\|\phi_1\|_\infty,\|\phi_2\|_\infty\}}$ d'où

$$-\frac{1}{2}\Big[\int_\Omega(e^{\phi_1}u_1u_1' + e^{\phi_2}u_2u_2')\,dx\Big]_0^T \leq c_1(E(0)+E(T)).$$

De même,

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega(\alpha_1e^{\phi_2}-\alpha_2e^{\phi_1})u_1u_2\,dx\,dt$$

$$\leq \frac{\|\alpha_1e^{\phi_2}-\alpha_2e^{\phi_1}\|_\infty c_0}{4}\int_0^T\int_\Omega(|\nabla u_1|^2+|\nabla u_2|^2)\,dx\,dt \leq c_2\int_0^T E(t)\,dt$$

où $c_2 = \frac{c_0}{4a_1}\|\alpha_1e^{\phi_2}-\alpha_2e^{\phi_1}\|_\infty = \frac{\sqrt{c_0}}{2}a_0$.

En utilisant (8.1), (9.1), (9.2) et (9.3), on trouve, pour tout $\epsilon_0>0$:

$$-\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}u_1g(u_1')\,dx\,dt \leq \frac{1}{4}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}(\epsilon_0|u_1|^2 + \frac{1}{\epsilon_0}g^2(u_1'))\,dx\,dt$$

$$\leq \frac{c_0\epsilon_0}{4a_1}\int_0^T E(t)\,dt + \frac{d_1}{4\epsilon_0}\int_0^T(a_0E(t)-E'(t))\,dt.$$

De même,

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1'|^2 \, dx \, dt \leq \frac{1}{d_2} \int_0^T (a_0 E(t) - E'(t)) \, dt.$$

Finalement, on obtient :

$$\Big(1 - c_2 - a_0(\frac{d_1}{4\epsilon_0} + \frac{1}{d_2}) - \frac{c_0\epsilon_0}{4a_1}\Big) \int_0^T E(t) \, dt \tag{9.9}$$

$$\leq c_1(E(0) + E(T)) + (\frac{d_1}{4\epsilon_0} + \frac{1}{d_2})(E(0) - E(T)) + \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2'|^2 \, dx \, dt.$$

Pour simplifier (9.9), on distingue les deux cas suivants :

Cas 1 : $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$. Dans ce cas, $a_0 = c_2 = 0$ et E est décroissante. Donc, on trouve :

$$(1 - \frac{c_0\epsilon_0}{4a_1}) \int_0^T E(t) \, dt \leq c_{\epsilon_0} E(0) + \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2'|^2 \, dx \, dt. \tag{9.10}$$

Cas 2 : $\alpha_1 e^{\phi_2} \neq \alpha_2 e^{\phi_1}$. En choisissant $\epsilon_0 = \sqrt{\frac{a_0 a_1 d_1}{c_0}}$, on obtient :

$$(1 - c_3) \int_0^T E(t) \, dt \leq c_4 E(0) + c_5 E(T) + \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2'|^2 \, dx \, dt \tag{9.11}$$

où

$$c_3 = (\frac{\sqrt{c_0}}{2} + \frac{1}{d_2}) a_0 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c_0 a_0 d_1}{a_1}}, \; c_4 = c_1 + \frac{1}{d_2} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{c_0 d_1}{a_0 a_1}}, \; c_5 = c_1 - \frac{1}{d_2} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{c_0 d_1}{a_0 a_1}}.$$

Il s'agit maintenant de majorer la dernière intégrale de (9.10) et de (9.11).

D'une part, en intégrant l'égalité de (9.3) et en utilisant l'hypothèse (9.1), on obtient :

$$E(T) - E(0) = -\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1' g(u_1') \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega (\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1}) u_1' u_2 \, dx \, dt$$

$$\leq -\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1' g(u_1') \, dx \, dt + \frac{d_2}{2} \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1'|^2 \, dx \, dt + \frac{c_6}{2} \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2|^2 \, dx \, dt$$

$$\leq -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1' g(u_1') \, dx \, dt + \frac{c_6}{2} \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2|^2 \, dx \, dt$$

où $c_6 = \frac{1}{d_2}\|\alpha_1 e^{\phi_2} - \alpha_2 e^{\phi_1}\|_\infty^2 \|e^{\frac{-1}{2}(\phi_1+\phi_2)}\|_\infty^2 = \frac{4a_1^2}{d_2 c_0}\|e^{\frac{-1}{2}(\phi_1+\phi_2)}\|_\infty^2 a_0^2$, et par conséquent

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1' g(u_1')\, dx\, dt \leq 2(E(0) - E(T)) + c_6 \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2|^2\, dx\, dt. \quad (9.12)$$

D'autre part, on multiplie la première équation de $(P10)$ par $e^{\phi_1} u_1$, on intègre sur $\Omega \times [0,T]$ et on utilise (9.2) et le fait que $\inf_\Omega \beta_1 > -\frac{\lambda_1}{c_0}$. On trouve, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{x_i} u_1 \partial_{x_j} u_1\, dx\, dt$$

$$= -\Big[\int_\Omega e^{\phi_1} u_1' u_1\, dx\Big]_0^T - \int_0^T \int_\Omega \alpha_2 e^{\phi_1} u_1 u_2\, dx\, dt$$

$$- \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1 g(u_1')\, dx\, dt + \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1'|^2\, dx\, dt - \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} \beta_1 |u_1|^2\, dx\, dt$$

$$\leq \frac{e^{\|\phi_1\|_\infty}\sqrt{c_0}}{2a_1}(E(0) + E(T)) + \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\alpha_2^2 e^{2\phi_1 - \phi_2}}{2\epsilon}|u_1|^2 + \frac{\epsilon}{2} e^{\phi_2} |u_2|^2\Big)\, dx\, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \Big(\frac{\epsilon e^{\phi_1}}{2}|u_1|^2 + \frac{1}{2\epsilon} e^{\phi_1} g^2(u_1')\Big)\, dx\, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1'|^2\, dx\, dt + \frac{\lambda_1}{c_0} \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1|^2\, dx\, dt.$$

En utilisant (9.1) et (9.12), on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{x_i} u_1 \partial_{x_j} u_1\, dx\, dt \quad (9.13)$$

$$\leq c_7(E(0) + E(T)) + c_8(E(0) - E(T))$$

$$+ c_9 \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2|^2\, dx\, dt + c_{10} \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1|^2\, dx\, dt$$

où

$$c_7 = \frac{\sqrt{c_0}}{2a_1} e^{\|\phi_1\|_\infty},\ c_8 = \frac{d_1}{\epsilon} + \frac{2}{d_2},$$

$$c_9 = \frac{\epsilon}{2} + c_6\Big(\frac{d_1}{2\epsilon} + \frac{1}{d_2}\Big),\ c_{10} = \frac{\lambda_1}{c_0} + \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2\epsilon}\|\alpha_2^2 e^{\phi_1 - \phi_2}\|_\infty.$$

On distingue maintenant les deux cas suivants :

Cas 1 : $A_1 = A_2$. On multiplie la première et la deuxième équation de $(P10)$ par $e^{\phi_2}u_2$ et $e^{\phi_2}u_1$ respectivement et on intègre leur différence sur $\Omega\times[0,T]$, on trouve :

$$\int_0^T\int_\Omega \alpha_2 e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt = \int_0^T\int_\Omega \alpha_1 e^{\phi_2}|u_1|^2\,dx\,dt - \int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}u_2 g(u_1')\,dx\,dt$$
$$+\Big[\int_\Omega e^{\phi_2}(u_2'u_1 - u_2u_1')\,dx\Big]_0^T + \int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}(\beta_2-\beta_1)u_1u_2\,dx\,dt$$
$$+\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}u_2\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}u_1\,dx\,dt.$$

Par hypothèse, on a : $\inf_\Omega|\alpha_2|>0$. Soit $0<\alpha_0\le\inf_\Omega|\alpha_2|$. Donc,

$$\Big|\int_0^T\int_\Omega \alpha_2 e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt\Big| \ge \alpha_0\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt.$$

On majore maintenant les termes de droite de l'égalité ci-dessus.

D'après (8.1) et (9.2), on a :

$$\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'u_1-u_2u_1'|\,dx$$
$$\le \frac{1}{2}e^{\|\phi_2\|_\infty}\int_\Omega\Big(\sqrt{c_0}|u_2'|^2+\frac{1}{\sqrt{c_0}}|u_1|^2+\sqrt{c_0}|u_1'|^2+\frac{1}{\sqrt{c_0}}|u_2|^2\Big)\,dx \le c_{11}E(t)$$

où $c_{11}=\frac{\sqrt{c_0}}{2a_1}e^{\|\phi_2\|_\infty}$. Donc

$$\Big|\Big[\int_\Omega e^{\phi_2}(u_2'u_1-u_2u_1')\,dx\Big]_0^T\Big| \le c_{11}(E(0)+E(T)).$$

En utilisant (9.1), on obtient :

$$\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2 g(u_1')|\,dx \le \frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx + \frac{3}{2\alpha_0}\int_\Omega e^{\phi_2}g^2(u_1')\,dx$$
$$\le \frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx + \frac{3d_1}{2\alpha_0}e^{\|\phi_2-\phi_1\|_\infty}\int_\Omega e^{\phi_1}u_1'g(u_1')\,dx,$$

$$\int_\Omega e^{\phi_2}|(\beta_2-\beta_1)u_1u_2|\,dx \le \frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx + \frac{3}{2\alpha_0}\int_\Omega(\beta_2-\beta_1)^2e^{\phi_2}|u_1|^2\,dx$$
$$\le \frac{3}{2\alpha_0}\|(\beta_1-\beta_2)^2e^{\phi_2-\phi_1}\|_\infty\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2\,dx + \frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx,$$

$$\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}u_1|\,dx$$

$$\leq \frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx$$

$$+\frac{3}{2\alpha_0}\int_\Omega e^{\phi_2}\Big(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}(\phi_1-\phi_2)\Big)\Big(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1\Big)\,dx$$

$$\leq \frac{\alpha_0}{6}\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx$$

$$+\frac{3}{2\alpha_0}\|e^{\phi_2-\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}(\phi_1-\phi_2)\|_\infty\int_\Omega e^{\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1\,dx.$$

Finalement, on trouve :

$$\frac{\alpha_0}{2}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt \leq c_{11}(E(0)+E(T)) \tag{9.14}$$

$$+c_{12}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2\,dx\,dt + c_{13}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1\,dx\,dt$$

$$+c_{14}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}u_1'g(u_1')\,dx\,dt$$

où

$$c_{12}=\|\alpha_1 e^{\phi_2-\phi_1}\|_\infty+\frac{3}{2\alpha_0}\|(\beta_1-\beta_2)^2e^{\phi_2-\phi_1}\|_\infty,$$

$$c_{13}=\frac{3}{2\alpha_0}\|e^{\phi_2-\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}(\phi_1-\phi_2)\partial_{x_j}(\phi_1-\phi_2)\|_\infty,\ c_{14}=\frac{3d_1}{2\alpha_0}e^{\|\phi_2-\phi_1\|_\infty}.$$

En utilisant (9.12), on majore le dernier terme de (9.14) et on trouve :

$$(\frac{\alpha_0}{2}-c_6c_{14})\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2\,dx\,dt \leq c_{11}(E(0)+E(T)) \tag{9.15}$$

$$+2c_{14}(E(0)-E(T))+c_{12}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2\,dx\,dt$$

$$+c_{13}\int_0^T\int_\Omega e^{\phi_1}\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\partial_{x_i}u_1\partial_{x_j}u_1\,dx\,dt.$$

Pour simplifier (9.15), on distingue deux cas comme auparavant.

Si $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$**,** on a alors $a_0 = c_6 = 0$ et E est décroissante, donc, en utilisant (9.13) avec ϵ assez petit et tel que

$$c_{13}c_9 = \frac{\epsilon}{2}c_{13} < \frac{\alpha_0}{2},$$

(9.15) implique que

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2 \, dx \, dt \leq cE(0) + c\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2 \, dx \, dt.$$

Par un raisonnement analogue, on montre que le système dérivé (par rapport à t) de $(P10)$ vérifie :

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'|^2 \, dx \, dt \leq cE_1(0) + c\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1'|^2 \, dx \, dt \leq c(E(0) + E_1(0)).$$

Finalement, en reportant dans (9.10) (avec ϵ_0 assez petit), on obtient (7.4) pour $m = 1$ et $f(t) = 1$.

Si $\alpha_1 e^{\phi_2} \neq \alpha_2 e^{\phi_1}$**,** E n'est pas décroissante en général. Par hypothèse, g est linéaire : $g(s) = ds$ ($d_1 = d_2 = d$ dans (9.1)) et donc, on déduit de (9.13) et (9.15) que

$$(\frac{\alpha_0}{2} - c_{15})\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2|^2 \, dx \, dt \leq c_{16}E(0) + c_{17}E(T) + c_{18}\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1|^2 \, dx \, dt$$

où

$$c_{15} = c_6c_{14} + c_9c_{13}, \; c_{16} = c_{11} + 2c_{14} + c_{13}(c_7 + c_8),$$

$$c_{17} = c_{11} - 2c_{14} + c_{13}(c_7 - c_8), \; c_{18} = c_{12} + c_{10}c_{13}.$$

De même, pour le système dérivé (par rapport à t) de $(P10)$

$$(\frac{\alpha_0}{2} - c_{15})\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2}|u_2'|^2 \, dx \, dt \leq c_{16}E_1(0) + c_{17}E_1(T) + c_{18}\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1}|u_1'|^2 \, dx \, dt.$$

On choisit $\epsilon = \sqrt{a_0}$ dans la définition de c_8, c_9 et c_{10} et on suppose que a_0 est assez petit et tel que

$$c_{15} < \frac{\alpha_0}{2}. \tag{9.16}$$

On obtient, d'après (9.1), (9.3) et (9.11) :

$$(1 - c_{19})\int_0^T E(t) \, dt \leq c_{20}(E(0) + E_1(0)) + c_{21}E(T) + c_{22}E_1(T)$$

où

$$c_{19} = c_3 + \frac{2a_0 c_{18}}{d(\alpha_0 - 2c_{15})}, \; c_{20} = \max\{\frac{2c_{16}}{\alpha_0 - 2c_{15}}, c_4 + \frac{2c_{18}}{d(\alpha_0 - 2c_{15})}\},$$

$$c_{21} = c_5 - \frac{2c_{18}}{d(\alpha_0 - 2c_{15})}, \; c_{22} = \frac{2c_{17}}{\alpha_0 - 2c_{15}}.$$

On choisit $0 < \alpha_0 \leq \inf_\Omega |\alpha_2|$ et tel que $c_{11} \leq 2c_{14}$ et on suppose que a_0 est assez petit et tel que

$$c_{19} < 1, \quad c_{22} \leq 0 \quad \text{et} \quad a_0 c_{21} < 1 - c_{19}, \tag{9.17}$$

et on trouve (7.4) pour $m = 1$ et $f(t) = 1$. Noter que, quand a_0 converge vers zéro, c_{15}, c_{19} et $a_0 c_{21} + c_{19}$ convergent vers zéro, et c_{22} devient négatif. Donc, avec a_0 assez petit, les conditions (9.16) et (9.17) sont satisfaites.

Cas 2 : $A_1 \neq A_2$**.** On a alors, par hypothèse, $\alpha_1 e^{\phi_2} = \alpha_2 e^{\phi_1}$. Donc $a_0 = c_6 = 0$ et E est décroissante.

Soit $z_1(t)$ la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} A_2 z_1(t) = A_1 u_1(t) & \text{dans} \quad \Omega, \\ z_1 = 0 & \text{sur} \quad \Gamma. \end{cases}$$

La solution z_1 vérifie (voir F. Conrad et B. Rao [22]) :

$$\int_\Omega |z_1|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |u_1|^2 \, dx, \tag{9.18}$$

$$\int_\Omega |z_1'|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |u_1'|^2 \, dx, \quad \int_\Omega |z_1''|^2 \, dx \leq c \int_\Omega |u_1''|^2 \, dx, \tag{9.19}$$

$$\int_\Omega |\nabla z_1|^2 \, dx \leq c \int_\Omega \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{x_i} u_1 \partial_{x_j} u_1 \, dx. \tag{9.20}$$

En multipliant la première et la deuxième équation de $(P10)$ par $e^{\phi_2} u_2$ et $e^{\phi_2} z_1$ respectivement, en remplaçant $A_1 u_1$ par $A_2 z_1$ et en intégrant par parties leur différence sur $\Omega \times [0, T]$, on trouve :

$$\int_0^T \int_\Omega \alpha_2 e^{\phi_2} |u_2|^2 \, dx \, dt = \Big[\int_\Omega e^{\phi_2} (z_1 u_2' - z_1' u_2) \, dx\Big]_0^T + \int_0^T \int_\Omega \alpha_1 e^{\phi_2} z_1 u_1 \, dx \, dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} u_2 \Big(z_1'' - u_1'' + \beta_2 z_1 - \beta_1 u_1 - g(u_1')\Big) \, dx \, dt$$

$$+\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} u_2 \Big(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{x_i} \phi_1 \partial_{x_j} u_1 - \sum_{i,j=1}^N b_{ij}(x) \partial_{x_i} \phi_2 \partial_{x_j} z_1 \Big) \, dx \, dt,$$

donc, en utilisant (9.18), (9.19) et (9.20) (noter que $0 < \alpha_0 \leq \inf_\Omega |\alpha_2|$),

$$\alpha_0 \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2|^2 \, dx \, dt \leq cE(0) + \frac{\alpha_0}{2} \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2|^2 \, dx \, dt \tag{9.21}$$

$$+c \int_0^T \int_\Omega \Big(|u_1''|^2 + g^2(u_1') + |u_1|^2 + \sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x) \partial_{x_i} u_1 \partial_{x_j} u_1 \Big) \, dx \, dt.$$

D'après (9.3) et (9.1), on a :

$$\int_0^T \int_\Omega g^2(u_1') \, dx \, dt \leq c \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} u_1' g(u_1') \, dx \, dt \leq cE(0). \tag{9.22}$$

De même, en utilisant le système dérivé de $(P10)$, on obtient :

$$E_1'(t) = \Big(E(u_1'(t), u_2'(t)) \Big)' = - \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1''|^2 g'(u_1') \, dx.$$

D'où, d'après (9.1),

$$\int_0^T \int_\Omega |u_1''|^2 \, dx \, dt \leq c \int_0^T \int_\Omega e^{\phi_1} |u_1''|^2 g'(u_1') \, dx \, dt \leq cE_1(0). \tag{9.23}$$

En reportant l'inégalité (9.13) et les deux inégalités (9.22) et (9.23) dans (9.21) avec ϵ (définition de c_8, c_9 et c_{10}) assez petit, on obtient :

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2|^2 \, dx \, dt \leq c(E(0) + E_1(0)) + c \int_0^T \int_\Omega |u_1|^2 \, dx \, dt.$$

De même, on obtient l'inégalité similaire pour le système dérivé (par rapport à t) de $(P10)$ suivante :

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2'|^2 \, dx \, dt \leq c(E_1(0) + E_2(0)) + c \int_0^T \int_\Omega |u_1'|^2 \, dx \, dt.$$

Finalement,

$$\int_0^T \int_\Omega e^{\phi_2} |u_2'|^2 \, dx \, dt \leq c(E(0) + E_1(0) + E_2(0)).$$

En remplaçant dans (9.10) et en choisissant ϵ_0 assez petit, on obtient (7.4) pour $m = 2$ et $f(t) = 1$.

COMMENTAIRES ET QUESTIONS OUVERTES

La méthode présentée dans la partie 1 est directe et très souple; elle peut être appliquée à différents systèmes non dissipatifs et permet d'obtenir des estimations (exponentielle et polynômiale par exemple) de stabilité à condition que les termes perturbants soient d'ordres inférieurs de sorte que la deuxième inégalité de (0.12) soit satisfaite.

Les questions ouvertes générées par les résultats de ce mémoire sont nombreuses et diverses. Les plus importantes sont, de notre point de vue, celles qui concernent des systèmes beaucoup plus généraux et l'optimalité de nos estimations de stabilité. On précise ici quelques unes de ces questions.

L'hypothèse la plus restrictive sous laquelle nos applications sont valables est la condition de petitesse supposée sur certains paramètres (dans l'objectif d'absorber certains termes d'ordres inférieurs génants) ainsi que la croissance linéaire ($r = 1$) imposée sur le feedback dans le cas où l'énergie équivalente n'est pas décroissante. D'où la question ouverte : jusqu'au où peut-on affaiblir ces hypothèses et quel type d'estimations peut-on obtenir dans ce cas-là? D'autre part, nos estimations de stabilité sont, dans certains cas très particuliers, optimales. La question reste posée dans le cas général.

Il est intéressant (en particulier du point de vue des applications) de traiter un système hyperbolique plus général basé sur l'équation

$$K(x,t)u'' + A(t)u + F(x,t,u,u',A^{\frac{1}{2}}(t)u) = 0 \quad \Omega \times \mathbb{R}^+$$

où K et F sont des fonctions données et $A(t)$ est un opérateur linéaire, coercif et auto-adjoint.

D'autre part, dans le second membre de la première inégalité de (0.12) on exclut la présence du terme $E^{q+1}(T)$ avec $q \neq r$, l'obtention d'une estimation de type (0.7) et (0.8) dans une telle situation reste posée. Pour cela, il est utile de déterminer le comportement à l'infini d'une fonction positive E vérifiant, pour trois fonctions données $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ et ψ, $\varphi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, les inégalités suivantes (plus générales que celles de (0.12)) :

$$\begin{cases} \int_s^T \varphi(t,E(t))\,dt \leq \psi(E(s),E(T)), \quad \forall 0 \leq s \leq T < +\infty, \\ E'(t) \leq \lambda(t)E(t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases}$$

Un tel résultat permettra d'affaiblir considérablement les hypothèses imposées sur le feedback.

Dans le cas dissipatif, S. Nicaise [69] a démontré, dans un cadre général, un lien direct entre la stabilité exponentielle par un feedback linéaire et la stabilité non exponentielle par un feedback non linéaire. Un tel lien reste à démontrer dans le cas non dissipatif.

Comme généralisation significative du Théorème 7.1 et du Théorème 7.2 démontrés et appliqués dans la partie 2, il serait intéressant d'obtenir une estimation de stabilité similaire à (7.3) sur E sous les hypothèses

$$\begin{cases} \int_0^T f(t)E(t)\,dt \leq a_1 \sum_{k=0}^m \Big(E_k^{a_2}(0) + E_k^{a_3}(T) \Big), & \forall T \geq 0, \forall U^0 \in D(A^m), \\ E'(t) \leq a_0 E(t), \quad \forall t \geq 0, \forall U^0 \in D(A) \end{cases}$$

où $a_i > 0$ et $\in f \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$.

Une autre question ouverte intéressante concerne la stabilisation *indirecte* des systèmes *non dissipatifs*, comme le système $(P9)$ avec deux constantes α_1 et α_2 de signes différents.

Dans le cas d'un feedback non linéaire, nos estimations de stabilité ne sont satisfaites que pour $n = 1$, c-à-d : on a la même estimation $E(t) \leq \frac{c}{t}$ quelle que soit la régularité des données initiales. Si de plus, le système considéré est non dissipatif, on n'obtient aucune estimation de stabilité et la question reste ouverte dans ce cas-là.

Dans les systèmes couplés traités dans cette thèse, le couplage considéré est linéaire et d'ordre zéro. Il est très intéressant de regarder le cas d'un couplage plus général (comme par exemple celui que j'ai considéré dans [21]) et surtout d'ordre supérieur à zéro, notamment dans le cas de la stabilisation indirecte.

D'autre part, les résultats obtenus dans la partie 2 peuvent être généralisés au cas d'un système couplé de n équations (avec un couplage linéaire d'ordre zéro du même type) soumis à $n - 1$ contrôles. L'une des questions intéressantes qui restent posées est la suivante : quel est le minimum de contrôles nécessaires à la stabilisation du système et quelles sont les estimations de stabilisation valables dans ce cas-là?

LISTE DES PUBLICATIONS

ARTICLES PUBLIES

[1] A. Guesmia, Stabilisation frontière d'un système d'élasticité, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 324 (1997), 1355-1360.

[2] A. Guesmia, On linear elasticity systems with variable coefficients, Kyushu J. Math., 52 (1998), 227-248.

[3] A. Guesmia, On the nonlinear stabilization of the wave equation, Annales Polonici Mathematici, 68 (1998), 191-198.

[4] M. Aassila et A. Guesmia, Strong asymptotic stability of a nonlinear non-isotropic elastodynamic system, PanAmer Math. J., 8 (1998), 103-110.

[5] A. Guesmia, Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système d'élasticité, Portugal. Math., 55 (1998), 333-347

[6] A. Guesmia, Existence globale et stabilisation interne non linéaire d'un système de Petrovsky, Bull. Belg. Math. Soc., 5 (1998), 583-594.

[7] A. Guesmia, Observability, controllability and stabilization of some linear elasticity systems, Acta. Sci. Math. (Szeged), 64 (1998), 109-119.

[8] A. Guesmia, Existence globale et stabilisation frontière non linéaire d'un système d'élasticité, Portugal. Math., 56 (1999), 361-379.

[9] A. Guesmia, Energy decay for a damped nonlinear coupled system, J. Math. Anal. Appl., 239 (1999), 38-48.

[10] M. Aassila et A. Guesmia, Energy decay for a damped nonlinear hyperbolic equation, Appl. Math. Lett., 12 (1999), 49-52.

[11] A. Guesmia, Stabilisation de l'équation des ondes avec conditions aux limites de type mémoire, Afrik. Math., 10 (1999), 14-25.

[12] A. Guesmia, Sur la stabilisation non linéaire d'un système isotropique d'élasticité, Anna. Math. Univ. Sidi Bel Abbès, 7 (2000), 15-26.

[13] A. Guesmia, On the decay estimates for elasticity systems with some localized dissipations, Asymptotic Analysis, 22 (2000), 1-13.

[14] A. Guesmia, Contributions à la contrôlabilité exacte et la stabilisation des systèmes d'évolution, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur (Strasbourg I), 2000.

[15] A. Guesmia, Exact controllability for the wave equation with variable coefficients, Israel. J. Math., 125 (2001), 83-92.

[16] A. Guesmia, Une nouvelle approche pour la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 332 (2001), 633-636.

[17] A. Guesmia, A new approach of stabilization of nondissipative distributed systems, SIAM J. Cont. Optim., 42 (2003), 24-52.

[18] A. Guesmia, Nouvelles inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, C. R. Acad. Sci. Sér I. Math. Paris, 336 (2003), 801-804.

[19] M. M. Cavalcanti et A. Guesmia, General decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary condition of memoty type, Diff. Inte. Equa., 18 (2005), 583-600.

[20] A. Guesmia et S. Messaoudi, Decay estimates of solutions of a nonlinearly damped semilinear wave equation, Annal. Polonici. Math., 85.1 (2005), 25-36.

[21] A. Guesmia et S. Messaoudi, On the boundary stabilization of a compactly coupled system of nonlinear wave equations, Inter. J. Evolut. Equa., 1 (2006), 211-224.

ARTICLES ACCEPTES

[22] H. Benseridi, M. Dilmi et A. Guesmia, Problème de contact sans frottement-Dirichlet pour les équations de Laplace et de Lamé dans un polygone, Anal. Univ. Oradea, Fasc. Math., à paraître.

ARTICLES SOUMIS

[23] A. Guesmia, Inégalités intégrales et applications à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs, J. Math. Pures. Appl.

[24] A. Guesmia, Quelques résultats de stabilisation indirecte des systèmes couplés non dissipatifs, Bull. Belg. Math. Soc.

[25] A. Guesmia et S. Messaoudi, On convexity for energy decay rates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping, Comm. Pure. Appl. Anal.

[26] Abbes Benaissa et A. Guesmia, Global existence and general decay estimates of solutions for degenerate or nondegenerate Kirchhoff equation with general dissipation, Comm. Pure. Appl. Anal.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

References

[1] F. Alabau-Boussouira, On convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, Appl. Math. Optim., 51 (2005), 61-105.

[2] F. Alabau-Boussouira, Indirect boundary stabilization of weakly coupled hyperbolic systems, SIAM J. Cont. Optim., 41 (2002), 511-541.

[3] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et V. Komornik, Indirect internal stabilization of weakly coupled evolution equations, J. Evol. Equa., 2 (2002), 127-150.

[4] F. Alabau-Boussouira et V. Komornik, Boundary observability, controllability and stabilization of linear elastodynamic systems, SIAM J. Control Optim., 37 (1999), 521-542.

[5] D. Andrade et J. E. Muñoz Rivera, Exponential decay of non-linear wave equation with viscoelastic boundary condition, Math. Meth. Appl. Sci., 23 (2000), 41-61.

[6] J. M. Ball, On the asymptotic behavior of generalized process with applications to nonlinear evolution equations, J. Diff. Equa., 27 (1978), 224-265.

[7] V. Barbu, Analysis and control on nonlinear infinite dimensional systems, Academic Press, New York, 1993.

[8] C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary, SIAM J. control Optim., 30 (1992), 1024-1065.

[9] A. Beyrath, Stabilisation indirecte interne par un feedback localement distribué de systèmes d'équations couplées, C. R. Acad. Sci. Paris, 333 (2001), 451-456.

[10] A. Beyrath, Stabilisation indirecte interne par un feedback localement distribué de systèmes d'équations couplées, soumis.

[11] J. Bochenek, An abstract semilinear first order differential equation in the hyperbolic case, Annal. Polonici Math., 61 (1995), 13-23.

[12] J. Bochenek et T. Winiarska, Evolution equations with parameter in the hyperbolic case, Annal. Polonici Math., 64 (1996), 47-60.

[13] H. Brezis, Problèmes unilatéraux, J. Math. Pures et Appl., 51 (1972), 1-168.

[14] H. Brezis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North Holland, Amsterdam, 1973.

[15] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et J. A. Soriano, Existence and boundary stabilization of a nonlinear hyperbolic equation with time-dependent coefficients, E. J. Diff. Equa., 08 (1998), 1-21.

[16] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti et M. L. Santos, Uniform decay rates of solutions to a nonlinear wave equation with boundary condition of memory type, Proceedings of 21st IFIP TC 7 Conference on System Modeling and Optimization, 2003.

[17] M. M. Cavalcanti, N. A. Lar'kin et J. A. Soriano, On solvability and stability of solutions of nonlinear degenerate hyperbolic equations with boundary damping, Funkcialaj Ekvacioj, 41 (1998), 271-289.

[18] P. G. Ciarlet, Mathematical elasticity, vol. 1: three dimensional elasticity, North Holland, Amsterdam, 1988.

[19] M. Ciarletta, A differential problem for the heat equation with a boundary condition with memory, Appl. Math. Lett., 10 (1) (1997), 95-101.

[20] G. Chen et H. K. Wang, Asymptotic behavior of solutions of the one-dimensional wave equation with a nonlinear boundary stabilizier, SIAM J. Control Optim., 27 (4) (1989), 758-775.

[21] F. Conrad et M. Pierre, Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback, Ann. Inst. Henri Poincaré, 11(1994), 485-515.

[22] F. Conrad et B. Rao, Decay of solutions of wave equations in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback, Asymptotic Anal., 7 (1993), 159-177.

[23] C. M. Dafermos, Asymptotic behavior of solutions of evolution equations, in Nonlinear Evolution Equations, M. G. Crandall Ed., Academic Press, New York, 1978, 103-123.

[24] C. M. Dafermos et J. A. Nohel, A nonlinear hyperbolic Volterra equation in viscoelasticity, Amer. J. Math., Supplement (1981), 87-116.

[25] G. Duvaut et J.-L. Lions, Les inégalités en mécanique et en physique, Dunod, Paris, 1972.

[26] M. Eller, J. E. Lagnese et S. Nicaise, Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping, Computational. Appl. Math., 21 (2002), 135-165.

[27] T. Hara et R. Miyazaki, Equivalent condition for stability of a Volterra integro-differential equation, J. Math. Anal. Appl., 174 (1993), 298-316.

[28] A. Haraux, Semi-groupes linéaires et équations d'évolution linéaire périodiques, Publication du Laboratoire d'Analyse Numérique No. 78011 (1978), Université Pierre et Marie Curie, Paris.

[29] A. Haraux, Oscillations forcées pour certains systèmes dissipatifs non linéaires, Laboratoire d'Analyse Numérique, Prépublication No. 78010 (1978), Université Paris 7, Paris.

[30] A. Haraux, Two remarks on dissipative hyperbolic problems, Research Notes in Mathematics, Pitman, (1985), 161-179.

[31] A. Haraux et E. Zuazua, Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, Arch. for Rational Mechanics and Analysis, 100 (1988), 191-206.

[32] M. A. Horn, Implications of sharp trace regularity results on boundary stabilization of the system of linear elasticity, J. Math. Anal. Appl., 223 (1998), 126-150.

[33] M. A. Horn, Stabilization of the dynamic system of elasticity by nonlinear boundary feedback, Internat. Ser. Numer. Math., 133 (1999), 201-210.

[34] S. Kawashima, M. Nakao et K. Ono, On decay property of solutions to the cauchy problem of the semilinear wave equation with a dissipative term, J. Math. Soc. Japan, 47 (1995), 617-653.

[35] M. Kirane et N. Tatar, Non-existence results for a semilinear hyperbolic problem with boundary condition of memory type, Journal for Analysis and Its Applications, 19 (2) (2000), 453-468.

[36] V. Komornik, Rapid boundary stabilization of the wave equation, SIAM J. Control and Optim., 29 (1991), 197-208.

[37] V. Komornik, On the nonlinear boundary stabilization of the wave equation, Chin. Annal. of Math., 14B:2 (1993), 153-164.

[38] V. Komornik, Exact controllability and stabilization. The multiplier method, Masson-John Wiley, Paris, 1994.

[39] V. Komornik, Decay estimates for the wave equation with internal damping, Proc. of the conf. on Control Theory, Vorau 1993, Inter. Series Num. Anal., vol. 118, Birkhauser Verlag, Basel, 1994, 253-266.

[40] V. Komornik, Boundary stabilization of linear elasticity systems, Lectute Notes in Pure ans Appl. Math., 174 (1995), 135-146.

[41] V. Komornik, Well-posedness and decay estimates for a Petrovsky system by a semi-group approach, Acta Sci. Math. (Szeged), 60 (1995), 451-466.

[42] V. Komornik et S. Kouémou-Patcheu, Estimations d'énergie pour un système de Petrovsky avec amortissement interne, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 319(1994), 1185-1189. Pures et Appl., 69 (1990), 33-54.

[43] V. Komornik et B. Rao, Boundary stabilization of compactly coupled wave eqautions, Asymptotic Anal., 14 (1997), 339-359.

[44] V. Komornik et E. Zuazua, A direct method for boundary stabilization of the wave equation, J. Math. Pure. Appl., 69 (1990), 33-54.

[45] J. E. Lagnese, Decay of solution of wave equations in a bounded region with boundary dissipation, J. Diff. Equa., 50 (1983), 163-182.

[46] J. E. Lagnese, Note on boundary stabilization of wave equations, SIAM J. Control Optim., 26 (1988), 1250-1257.

[47] J. E. Lagnese, Boundary stabilization of thin plates, SIAM Studies in Applied Math., Vol 10, SIAM 1989.

[48] J. E. Lagnese, Uniform asymptotic energy estimates for solution of the equation of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary, Nonlinear Anal. T.M.A., 16 (1991), 35-54.

[49] I. Lasiecka, Stabilization of wave and plate-like equations with nonlinear dissipation on the boundary, J. Diff. Equa., 79 (1989), 340-381.

[50] I. Lasiecka et D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping, J. Diff. Inte. Equa., 6 (1993), 507-533.

[51] I. Lasiecka et R. Triggiani, Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometrical conditions, Appl. Math. Optim., 25 (1992), 189-224.

[52] J.-L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, collection RMA, Masson, Paris, 1988.

[53] J. L. Lions, Exact contollability, stabilizations and perturbations of distributed systems, SIAM Rev., 30 (1988), 1-68.

[54] W. J. Liu, Partial exact controllability and exponential stability of the higher dimensional linear thermoelasticity, ESAIM COCV, 3 (1998), 23-48.

[55] P. Martinez, Stabilisation de systèmes distribués semi linéaires: domaines presque étoilés et inégalités intégrales généralisées, Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, France, 1998.

[56] P. Martinez, A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems, ESAIM: Control. Optim. Calcul. Varia., 4 (1999), 419-444.

[57] S. Messaoudi, Energy decay of solutions of a semilinear wave equation, Inter. J. Appl. Math., 9 (2000), 1037-1048.

[58] S. Messaoudi, Decay of the solution energy for a nonlinearly damped wave equation, Arabian. J. Sci. Eng. Sect. A Sci., 26 (2001), 63-68.

[59] M. Moussaoui, Singularités des solutions du problème mélé, controlabilité exacte et stabilisation frontière, ESAIM Proceedings, 1 (1996), 157-168.

[60] J. E. Muñoz Rivera, Global solution on a quasilinear wave equation with memory, Bolletino U.M.I., 7 (1994), 289-303.

[61] J. E. Muñoz Rivera et R. Racke, Polynomial stability in two-dimensional magneto-elasticity, IMA J. Appl. Math., 66 (2001), 269-283.

[62] J. E. Muñoz Rivera et R. Racke, global stability for damped Timoshenko systems, Discrete Contin. Dyn. Syst., 9 (2003), 1625-1639.

[63] J. E. Muñoz Rivera et R. Racke, Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems, global existence and erxponential stability, J. Math. Anal. Appl., 276 (2002), 248-278.

[64] M. Nakao, Convergence of solutions of the wave equation with a nonlinear dissipative term to the steady state, Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, 30 (1976), 257-265.

[65] M. Nakao, Decay of solutions of some nonlinear evolution equations, J. Math. Anal. Appl., 60 (1977), 542-549.

[66] M. Nakao, On the decay of solutions of some nonlinear dissipative wave equations in higher dimensions, Math. Z., 193 (1986), 227-234.

[67] M. Nakao, Remarks on the existence and uniqueness of global decaying solutions of the nonlinear dissipative wave equations, Math Z., 206 (1991), 265-275.

[68] M. Nakao et K. Ono, Global existence to the cauchy problem of the semilinear wave equation with a nonlinear dissipation, Funkcialaj Ekvacioj, 38 (1995), 417-431.

[69] S. Nicaise, Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications, Rendiconti di Matematica, 23 (2003), 1-34.

[70] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations, Applied Mathematical Sciences, vol. 44, Springer, New York, 1983.

[71] P. Pucci et J. Serrin, Asymptotic stability for nonautonomous dissipative wave systems, Comm. Pure. Appl. Math., 49 (1996), 177-216.

[72] T. Qin, Global solvability of nonlinear wave equation with a viscoelastic boundary condition, Chin. Ann. Math., 14B (3) (1993), 335-346.

[73] T. Qin, Breakdown of solutions to nonlinear wave equations with a viscoelastic boundary condition, Arab. J. Sci. Engng., 19 (2A) (1994), 195-201.

[74] R. Racke, Lectures on nonlinear evolution equations. Initial value problems. Aspect of Mathematics E19. Friedr. Vieweg Sohn, Braunschweig/Wiesbaden (1992).

[75] D. L. Russell, Decay rates for weakly damped systems in Hilbert space obtained with control - theoretic methods, J. Diff. Equa., 19 (1975), 344-370.

[76] D. L. Russell, Controllability and stabilization theory for linear partial differential equations. Recent progress and open questions, SIAM Rev., 20 (1978), 639-739.

[77] M. L. Santos, Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary, E. J. Diff. Equa., 73 (2001), 1-11.

[78] M. L. Santos, Decay rates for solutions of a system of wave equations with memory, E. J. Diff. Equa., 38 (2002), 1-17.

[79] L. R. Tcheugoué Tébou, Sur la stabilisation de l'éqaution des ondes en dimension 2, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math., 319 (1994), 585-588.

[80] L. R. Tcheugoué Tébou, On the decay estimates for the wave equation with a local degenerate or nondegenerate dissipation, Portug. Math., 55 (1998), 293-306.

[81] R. Triggiani, Wave equation on a bounded domain with boundary dissipation: an operator approach, J. Math. Anal. Appl., 137 (1989), 438-461.

[82] Y. You, Energy decay and exact controllability for the Petrovsky equation in a bounded domain, Advances in Appl. Math., 11 (1990), 372-388.

[83] E. Zuazua, Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems, Asymptotic Analysis, 1 (1988), 161-185.

[84] E. Zuazua, Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback, SIAM J. Control Optim., 28 (1990), 466-477.

[85] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping, Comm. Partial Diff. Equa., 15 (1990), 205-235.

[86] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains, J. Math. Pures et Appl., 70 (1991), 513-529.

[87] E. Zuazua et W. J. Liu, Decay rates for dissipative wave equations, Ricerche di Matematica, XLVIII (1999), 61-75.