



Modélisation de la rupture par forces cohésives : formulations et exemples d'applications

Fidèle Massamba

► To cite this version:

Fidèle Massamba. Modélisation de la rupture par forces cohésives : formulations et exemples d'applications. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066616 . tel-01658919

HAL Id: tel-01658919

<https://theses.hal.science/tel-01658919>

Submitted on 8 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE de DOCTORAT

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)

**ED 391 : Sciences Mécaniques, Acoustique, Électronique et Robotique de Paris
(S.M.A.E.R.)**

Spécialité : Mécanique

présentée par

Fidèle MASSAMBA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR

de

L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE (PARIS VI)

Sujet de thèse :

**Modélisation de la Rupture par Forces Cohésives :
Formulations et Exemples d'Applications**

Soutenance effectuée le 06/12/2016 devant le jury composé de :

M. Radhi ABDELMOULA	MdC. Université Paris 13, Villetaneuse	Rapporteur
M. Hicheme FERDJANI	Pr. Université de Blida, Algérie	Rapporteur
M.me Agnès MAUREL	DR. Institut Langevin	Examineur
M. Corado MAURINI	Pr. IJRLDA, Université Pierre et Marie Curie	Examineur
M. Joël FRELAT	CR. IJRLDA, Université Pierre et Marie Curie	Co-Directeur
M. Jean-Jacques MARIGO	Pr. École Polytechnique LMS, Palaiseau	Directeur

**Institut Jean Le Rond D'Alambert
Université U.P.M.C. Paris VI/CNRS-UMR 7190**

A mon Père Philippe BIMOUAKA
ma mère Adèle MOUTINOU
et mon petit frère Léonard LOUZOLO BIMOUAKA
Que la terre vous soient légère.

Remerciements

Ce travail n'aurait pu être achevé sans l'aide et le soutien de nombreuses personnes à qui je suis heureux d'exprimer mes profonds remerciements.

J'aimerais tout d'abord adresser toute ma reconnaissance à Monsieur Jean-Jacques MARIGO, Directeur de cette thèse pour m'avoir accepté et encadré. Je vous serais reconnaissant sur tout ce que vous avez fait pour que cette thèse puisse voir le jour. Ma reconnaissance s'adresse aussi à Monsieur Joël FRELAT Co-Directeur de thèse, pour ça disponibilité. Ce dernier est sortie de sa retraite pour venir m'aider à la réalisation de la partie numérique, je vous en remercie beaucoup. J'ai beaucoup profité de leurs inestimables connaissances et leurs rigueurs scientifiques ont été pour moi un modèle et une source constante de motivation dans l'accomplissement de ce travail. J'ai toujours pu compter sur leurs soutiens, leurs écoutes et leurs patiences.

Travailler avec messieurs MARIGO et FRELAT à été pour moi une chance exceptionnelle surtout dans un environnement comme l'institut Jean Le Rond d'Alembert où toute la communauté scientifique vive en harmonie. J'ai découverts beaucoup des choses que je ne connaissais pas scientifiquement et numériquement. C'est grâce à eux deux que ce travail est ce qu'il est. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour tout ce qu'ils ont pu m'apporter, tant sur le plan professionnel que personnel.

Je tiens à remercier messieurs Radhi ABDELMOULA et Hicheme FERDJANI de l'intérêt qu'ils ont témoigné à l'égard de mon travail, en acceptant la lourde tâche de rapporter ce mémoire, monsieur Corado MAURINI qui m'a fait l'honneur d'être président de Jury et madame Agnès MAUREL pour avoir acceptée d'être membre du jury.

Mes remerciements s'adressent aussi à monsieur Stéphane ZALESKI, Directeur de l'Institut Jean Le Rond D'Alembert (IJLRDA) pour m'avoir accueilli au sein du Laboratoire et intégré l'équipe MISES.

J'adresse ensuite un clin d'œil à tous les collègues de IJLRDA qui, de près ou de loin, ont largement contribué à faire de ces années des excellents souvenirs. Je pense notamment à mes collègues de bureau : Christophe JOSSERAND, Sébastien NEUKIRCH, Guillaume LEGROS, Yue LING (Stanley), Wojtek ANISZEWSKI et Amâncio FERNANDES, ancien collègue de bureau avant déménagement, je les remercie tous pour leurs soutiens et

encouragements. Je n'oublie pas les autres collègues avec qui nous avons beaucoup sympathisés : José-Maria FULLANA, Thomas SEON, Martine ROUSSEAU, Renée GATIGNOL, Djimédo KONDO, Arnaud LAZARUS, Maurice ROSSI, Pierre-Yves LAGRÉE, Joël POUGET et Bernard COLLET.

Mes remerciements également à tous les thésards qui achèvent leurs thèses, notamment : Mehdi THA, Andres CASTILLO, Jair Manuel REYES OLIVERA, Asma MANAI. Je suppose que nous avons tous vécu les mêmes choses aux mêmes moments.

Mention particulière à Can SELCUK (Selçuk Djan), un de mes meilleurs collègues et amis devenu comme un frère proche, il a terminé son doctorat quelques mois avant. J'ai eu beaucoup d'aides moral et physique de sa part, c'est l'occasion pour moi de lui dire merci.

Mes remerciements s'adressent aussi aux collègues de l'équipe informatique : Pascal RAY, Pascal LE SAEC, Patrick CAO HUU THIEN et une mention spéciale à Élisée MACKAGNY avec qui nous avons beaucoup échangé.

Enfin, mes toutes dernières pensées vont à mon petit frère LOUZOLO BIMOUAKA, mon père Philippe BIMOUAKA et ma mère Adèle MOUTINOÛ, tous décédés il y a quelques années. Au fond de mon cœur vous êtes toujours vivants et présents.

Je termine en remerciant tous les autres membres de ma famille, frères, sœurs, neveux et nièces et tous les amis. À noter la présence à la soutenance de mon fils et filles : Jarred BIMOUAKA, Moutinou MASSAMBA et Louzolo MASSAMBA sans oublier ma femme NKODIA BANTSIMBA. Que mon grand frère Germain MANKESSI BIMOUAKA soit honoré par cette thèse, c'est en partie grâce à lui que je suis aujourd'hui en France, malgré l'énorme éloignement géographique, il m'a toujours soutenu et encouragé.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Introduction générale	1
1 État des connaissances	5
1.1 Quelques généralités sur la rupture fragile	7
1.1.1 Notions sur les modes de rupture fragile	7
1.1.2 Les différents modes d'ouverture des fissures : Rappels	7
1.1.3 Énergie de séparation en mécanique de la rupture	9
1.2 Critère de rupture fragile K_{IC}	9
1.3 Critère de Mandel	9
1.4 Singularités en mécanique des milieux fissurés	10
1.4.1 Analyse asymptotique en mode I et II	11
1.4.2 Relation entre singularité et description énergétique	13
1.5 Théorie énergétique de la rupture fragile	13
1.5.1 Approche de Griffith	13
1.5.2 Approche d'Irwin	15
1.5.3 Autres expressions de G	16
1.6 Théorie des forces de cohésion de Barenblatt	18
1.7 Théorie des intégrales de contour	19
1.7.1 Intégrale J de Rice	19
1.7.2 Intégrale I de Bui	21
1.8 Les modèles des forces cohésives	21
1.8.1 Modèle de Dugdale	22
1.8.2 Modèle de Barenblatt	23
1.8.3 Modèle de Needleman	23
1.9 Fissure traversant une plaque	24
1.9.1 Fissure transversale dans une plaque infinie 2D	24
1.9.2 Fissure centrale dans un milieu élastique cas de Dugdale-Barenblatt	24
1.9.3 Fissure circulaire dans un solide infini : solution de Sneddon du problème plan de Griffith	26

1.9.4	Fissure elliptique dans un solide soumis à une traction normale uniforme	27
1.10	Propagation des fissures en mode mixte (2D)	29
1.10.1	Critère de la contrainte d'ouverture maximale	29
1.10.2	Critère de densité d'énergie minimale de déformation	30
1.11	Loi de propagation des fissures	31
1.11.1	Critère de propagation des fissures	32
1.12	Exemple d'application analytique : Essai Double Cantilever Beam (DCB) .	34
1.12.1	Déplacement contrôlé	36
1.12.2	Force contrôlée	36
1.13	Conclusion	37
2	Études analytiques : Présentation du problème de référence	39
2.1	Introduction	41
2.2	Notions fondamentales de la mécanique de rupture : Comportement macroscopiques des matériaux	41
2.3	La fissuration et la rupture des structures	42
2.4	Présentation générale du problème de référence	44
2.5	Études analytiques	44
2.5.1	Les différentes phases de résolution du problème analytique : Rappels	44
2.5.2	Étude analytique de la phases élastique $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_e$	45
2.5.3	Étude analytique de la phase de rupture cohésive $\sigma_c < \sigma_\infty < \sigma_r$. .	46
2.5.4	Analyse au delà du seuil de rupture	49
2.5.5	Les paramètres de modélisation prisent en compte	51
2.6	Définition et calcul du taux de l'énergie libérée aux points G_λ et G_l	51
2.6.1	Calcul de l'énergie totale libérée au point G_λ	52
2.6.2	Calcul de l'énergie totale libérée au point G_l	52
2.7	Conclusion	53
3	Initiation et propagation de fissure dans une plaque en présence des forces cohésives	55
3.1	Introduction	57
3.2	Notations et préliminaires géométriques	57
3.2.1	Déformations dans $\mathbb{R}^3$	57
3.2.2	Configuration déformée arbitraire	58
3.3	Équation d'équilibre et principe des travaux virtuels dans la configuration déformée	60
3.3.1	Théorème (théorème de Cauchy)	61
3.4	Le cadre de la modélisation	62
3.4.1	Description géométrique de la plaque	62
3.4.2	Compléments	65
3.5	Modèle cohésive en pointe de fissure	66
3.5.1	Rappels bibliographiques	66

3.5.2	Équilibre de la plaque fissurée en présence des forces cohésives . . .	69
3.5.3	Loi cohésive de type Dugdale	69
3.6	Formulation mécanique du problème	70
3.6.1	Cadre fonctionnel de résolution du problème	70
3.6.2	Définition	72
3.7	Évolution de la fissure et méthodologie de résolution du problème	72
3.7.1	Orientation	72
3.7.2	Scénario de fissuration et méthodologie de résolution	75
3.7.3	Cas particuliers importants	76
3.7.4	Remarque	77
3.7.5	Proposition en pointes de la zone cohésive $l_c \in [-q(t); q(t)]$	77
3.7.6	Ouverture de la fissure en pointes de la zone non-cohésive	78
3.8	Évolution de la fissuration : effet d'échelle	80
3.8.1	Étude de la phases élastique $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_e$	80
3.8.2	Étude de la phase purement cohésive	81
3.8.3	Étude de la phase partiellement cohésive	82
3.9	Écartement de fissure	89
3.10	Solution élémentaire des problèmes de fissure	90
3.10.1	Résolution du problème par l'analyse complexe	90
3.10.2	Problème de Hilbert	90
3.10.3	Rappels mathématiques	91
3.10.4	Solution du problème $F^+(t) = G(t)F^-(t) + f(t)$	94
3.10.5	Problème auxiliaire	95
3.10.6	Représentation complexe des contraintes et de déplacements	96
3.10.7	Problème aux limites sur la ligne de fissure	98
3.11	Application à la fissure centrale dans une plaque en présence des forces cohésives	100
3.11.1	Le Facteur d'Intensité des Contraintes FIC	103
3.11.2	Condition d'ouverture de fissure	103
3.12	Conclusion	104
4	Modélisation numérique de la plaque soumise aux efforts de tractions	105
4.1	Introduction	107
4.2	Rappels sur les problèmes de plaques	108
4.2.1	Définition géométrique de la plaque	108
4.2.2	Coordonnées paramétriques de la plaque	109
4.2.3	Formulation variationnelle de l'équilibre de la plaque	111
4.2.4	Loi de comportement élastique de la plaque	113
4.2.5	Modèle variationnel en déplacements	114
4.2.6	Modèle variationnelle mixte	115
4.2.7	Modèle contraintes	117
4.2.8	Formulation variationnelle étendue au Modèle de Kirchhoff	118
4.3	Mise en œuvre numérique	120

4.3.1	Notations et préliminaires	120
4.4	Formulation de l'élément DST	121
4.5	Élément DST sous forme discrète	123
4.5.1	Approximation par l'élément DKT	123
4.5.2	Exemple d'application d'une approximation sur un côté de l'élément DST du maillage	127
4.5.3	Énergie interne de CT de la plaque	129
4.5.4	Énergie de flexion de la plaque	130
4.5.5	Relations cinématiques de CT de la plaque	131
4.5.6	Construction de la matrice de rigidité $[k]_{9 \times 9}$	132
4.6	Résultats numériques	132
4.6.1	Exemple d'une plaque carrée trouée sollicitée aux efforts de tractions	132
4.6.2	Stratégie de modification de l'intégrale J pour la modélisation numérique	135
4.6.3	Modélisation de la zone cohésive de la plaque	136
4.7	Validation des calculs de l'intégrale J_{num} modifiée	137
4.7.1	Évolution de l'intégrale J_{num} modifiée par rapport à la longueur de la fissure	137
4.7.2	Évolution de l'intégrale J_{num} modifiée en fonction de σ_∞ et σ_c . . .	137
4.8	Conclusion	140
Conclusion générale et perspectives		143
Bibliographie		145

Table des figures

1.1	Les différents modes de sollicitations d'une fissure : I Ouverture ; II Cisaillement ; III Cisaillement anti-plan	8
1.2	Définition du repère local au voisinage de la pointe de la fissure	11
1.3	Champ de contraintes au voisinage d'une pointe de fissure	13
1.4	Croissance virtuelle de fissure	16
1.5	Forces de cohésions en fonction de l'écartement $F(v)$	18
1.6	Fissure en mode I et II	20
1.7	Contour d'intégration de l'intégrale J	20
1.8	Représentation schématique de la zone cohésive située devant la fissure macroscopique en mode I	21
1.9	Loi d'interaction de Dugdale dans la direction normale	22
1.10	Loi d'interaction de Needleman dans la direction normale	23
1.11	Modèle de fissure de longueur finie dans un massif infini soumis à la traction $\sigma_{22} = \sigma^\infty$: Dugdale-Barenblatt	25
1.12	Fissure elliptique soumise à une contrainte uniforme	28
1.13	Fissure pré-usinée dans une poutre (essai, Double Cantilever Beam DCB)	35
2.1	Différentes éprouvettes à l'état final après essai uni-axial : (a) Rupture par striction d'une éprouvette métallique ; (b) Rupture par décohesion des fibres d'un composite à fibres de carbone ; (c) Rupture par fissuration longitudinale d'une éprouvette de béton comprimée	42
2.2	Le Schenectady, un cargo des liberty ships de la seconde guerre mondiale en structure métallique, rompus brutalement sous l'effet de gel	43
2.3	Rupture brutale du pont de Sully-sur-Loire, 16 janvier 1985	43
2.4	Rupture fragile d'un rail sur la ligne D du RER, Octobre 2003	44
2.5	Géométrie et chargement de $\Omega_P/\mathbb{D}$ à l'état initial	46
2.6	Le corps Ω_c^0 pendant la phase de rupture cohésive	47
2.7	Géométrie et chargement du corps Ω_c^0 . Ligne de fissure séparée en partie cohésive Γ_c et non cohésive Γ_0	49
3.1	Configuration initiale et état déformée	61
3.2	Géométrie et chargement de la plaque $\Omega_P/\mathbb{D}$ à l'état initial ou phase élastique	63
3.3	Modèle des zones cohésives	67

3.4	Notation du problème	68
3.5	Modèle de Dugdale	70
3.6	État de fissure : (i) phase élastique, (ii) phase de rupture purement cohésive	73
3.7	(ii) ₁ Évolution et répartition des forces cohésives : (iii) ₁ fissure non-cohésive, (iv) ₁ fissure purement cohésive	76
3.8	(ii) ₂ Évolution et répartition des forces cohésives : (iii) ₂ fissure non-cohésive, (iv) ₂ fissure partiellement cohésive	76
3.9	Courbe d'évolution de la zone cohésive	83
3.10	Courbe d'évolution de la zone cohésive	83
3.11	Courbe d'évolution de la zone cohésive	83
3.12	Courbe de chargement : cas purement cohésif	84
3.13	Courbe de chargement : cas purement cohésif	84
3.14	Courbe de chargement : cas purement cohésif	84
3.15	Courbe de chargement : cas partiellement cohésif	86
3.16	Courbe de chargement : cas partiellement cohésif	86
3.17	Courbe de chargement : cas partiellement cohésif	87
3.18	Courbe de superposition de chargement : cas purement et partiellement cohésive	88
3.19	Courbe de superposition de chargement : cas purement et partiellement cohésive	88
3.20	Courbe de superposition de chargement : cas purement et partiellement cohésive	88
3.21	Fissure partiellement cohésive	91
3.22	Ligne de fissure orientée	92
3.23	Ligne de fissure entre les points $(-q(t), 0)$ et $(+q(t))$	97
3.24	Plaque fissurée partiellement cohésives	101
4.1	Description de la plaque	108
4.2	Coordonnées paramétriques de la plaque	110
4.3	Points de discontinuité sur le contour extérieur de la plaque	120
4.4	Élément triangulaire à cotés droits	121
4.5	Élément DKT à 3 nœuds et 3 degrés de libertés (<i>ddl</i>) par nœud	124
4.6	Variation quadratique de β_ζ sur les côtés	125
4.7	Élément triangulaire à cotés droits	128
4.8	Contour d'un quart de plaque après prise en compte des symétries	133
4.9	Longueur de fissure : répartition des différentes zones	136
4.10	Courbe de l'intégrale J analytique J_{ana} et numérique J_{num} : Pression Prs0 variable	137
4.11	Courbe de l'intégrale J_{num} en fonction de la longueur de la fissure l_f et de la pression Prs0	138
4.12	Courbe de l'intégrale J_{num} en fonction la pression Prs0. comparaison entre numérique cohésive et numérique non-cohésive	138

4.13	Courbe de comparaison de l'intégrale J numérique J_{num} non-cohésive et analytique J_{ana} en fonction la pression Prs0.	138
4.14	Courbe de comparaison de l'intégrale J numérique J_{num} cohésive et analytique J_{ana} en fonction la pression Prs0.	139
4.15	Courbe de comparaison de l'intégrale J numérique J_{num} non-cohésive et analytique J_{ana} en fonction la pression Prs0. Cas d'un ligament	139
4.16	Courbe de comparaison de l'intégrale J numérique J_{num} cohésive et analytique J_{ana} en fonction la pression Prs0. Cas d'un ligament	140

Introduction générale

Au cours de ces dernières années, la mécanique de la rupture a connu un important essor, accompagné du développement de divers outils mathématiques dont certains sont devenus classiques. Historiquement, l'impulsion initiale a été donnée par la recherche du taux d'énergie restituée de Griffith. C'est le succès d'introduction des forces cohésives, due au théorème de Dugdal-Barenblatt, et la méthode des intégrale de contour, qui a suscité l'intérêt des utilisateurs pour ce genre de problèmes. On a donc cherché à obtenir les résultats du même type pour le calcul analytique. A cette motivation initiale de l'analyse de la fissure, d'autres sont venues s'adjoindre, allant de la mécanique, en passant par des problèmes plus strictement mathématiques comme l'étude des équations variationnelles du type éléments finis. Il en est résulté une connaissance approfondie de la méthode aux éléments finis, avec l'introduction des concepts nouveaux de l'intégrale modifiée. L'intégrale modifiée, généralise la notion de propagation de fissure, et a fourni ses premiers exemples à la théorie de la rupture fragile, si fructueuse pour les équations intégrales. Le concept de l'intégrale de contour s'est imposé comme une formalisation élégante et générale de la notion de discrétisation en éléments finis.

Il ne nous semble pas cependant qu'on ait tiré de ces méthodes de toute la partie possible pour l'étude des problèmes de mécanique de rupture fragile. L'objet de cette étude est de combler cette lacune, et cela dans deux directions principales. L'objet de cette étude est aussi d'étudier du point de vue mathématique le problème de l'équilibre, dans certaines conditions, d'un corps parfaitement élastique. Bien que la présente étude soit consacrée à ce problème précis qui est décrit en détails ci-après. Il paraît très probable que les méthodes et les outils utilisés ici devraient dans d'autres domaines en particulier pour des problèmes d'évolution en élasticité.

Le problème d'élasticité qui est considéré ici est celui de l'équilibre d'un corps tridimensionnel qui occupe un volume $\Omega_P \subset \mathbb{R}^3$, et qui est en équilibre sous l'effet de certaines forces de volume (de densité f_v) et de certaines forces surfaciques (de densité f_s) appliquées sur la partie de contour de frontière $\partial\Omega_P$. Les inconnues du problème sont le champ des déplacements par rapport à la position d'équilibre non contraint du corps, $u = u(x)$, et, d'autre par le champ des contraintes $\sigma = \sigma(x)$ (champ de tenseur symétriques d'ordre 2 sur Ω_P); en fin le champ des déplacements u est donné, égal à u_0 , sur une partie de la frontière, complémentaire de $\partial\Omega_P$. Sous certaines hypothèses et en particulier celle d'un comportement parfaitement élastique du matériau, les champs u et σ sont respectivement

solutions de deux problèmes variationnels bien connus, que nous appellerons le problème en déplacement et problème en contraintes.

Nous passons maintenant à une description chronologique du contenu de cette étude. Elle est divisée en quatre chapitres. Le chapitre I contient d'abord les rappels nécessaires de différents modes d'ouvertures des fissures, de la théorie énergétique de la rupture fragile, de la théorie de forces de cohésions et de la théorie des intégrales de contours. Il donne une description précise des problèmes des propagations des fissures en mode mixe 2D et des différents modèles des forces cohésives. Le reste du chapitre contient une étude systématiques des problèmes des fissuration ainsi que la loi de propagation des fissures. L'application de cet exemple analytique est mise en évidence; en introduisant un essai Double Cantilever Beam (DCB).

Le chapitre II a pour objet la présentation du problème de référence et l'étude du problème en déplacement puis la rupture qui généralise le problème initial. Il contient une étude assez complète du problème de plaque avec cavité circulaire sollicitée sous charge de traction à l'infinie. Il contient les différentes phases de résolution abordées pendant l'étude analytique. Une fois ces différentes phases définies, nous donnons au chapitre II la définition du problème de plaque.

Le chapitre III donne des développements complémentaire de deux types. D'une part nous considérons les modèles parfaitement élastique et nous étudions la rupture avec force cohésives par le modèle de Dugdale. Il s'agit d'étudier le problème variationnel perturbé, au niveau de déplacement que des contraintes, et d'étudier leur limite, lorsqu'un paramètre de perturbation tends vers zéro. D'autre part nous donnons une étude analogue à celle faite aux chapitre I et II, pour un modèle de plaques parfaitement élastique. L'étude que nous présentons, est basée sur l'introduction d'un espace Ω_p que nous supposons un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Nous rappelons que si $(u = u_1, \dots, u_n)$ est une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, alors le tenseur des déformations $\varepsilon(u)$ (avec $u = (u_1, u_2, u_3) \in L^1(\Omega_P)^3$) est le tenseur d'ordre 2 dont les composantes, pour la base canonique de $\mathbb{R}^n$ s'écrivent :

$$\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Cette étude permet de rendre compte par exemple de la déformation de plaque qui se déforme en provoquant une fissure suivant l'axe $\mathcal{O}x_1$ sous l'effort de traction à l'infinie. Il semble que l'introduction de l'intégrale de contour et le modèle de Dugdale offrent un cadre naturelle pour les problèmes de mécanique de rupture.

Le chapitre IV décrit une théorie, basée sur la formulation variationnelle de l'équilibre de la plaque et l'utilisation des éléments finis. Outre la formulation variationnelle, un rappel sur les problèmes des plaques est donné. On aborde le problème de plaque, en étudiant le cas où l'on peut affirmer l'existence d'une solution. On définit alors, par éléments finis les équations d'équilibres et la formulation variationnelle. Le but est de ne pas faire un

exposé systématique des sujets abordés, nous allons seulement tenté de décrire quelques méthodes liées à l'étude de propagation de fissure dans la plaque en présence des forces cohésives. Dans ce chapitre, on d'écrit aussi la stratégie de modification de l'intégrale J de Rice pour la modélisation numérique. Des exemples de résolutions ont été donnés dans le cas des forces cohésives et non-cohésives.

Chapitre 1

État des connaissances

L'objectif de cette première partie est de rassembler un ensemble des notions et d'informations concernant la mécanique de la rupture fragile. Notamment, la propagation de fissure dans une plaque et la présence des forces cohésives. Après quelques rappels sur les différents modèles d'ouverture des fissures, nous abordons la synthèse bibliographique des problèmes mécanique de la rupture fragile, de forces de cohésion de Dugdale, de Barenblatt et de Needleman et la propagation de fissure dans la structure en fonction du chargement auquel la structure est soumise. On présente sur une série des modèles assez variés des différentes modélisation.

Sommaire

1.1	Quelques généralités sur la rupture fragile	7
1.1.1	Notions sur les modes de rupture fragile	7
1.1.2	Les différents modes d'ouverture des fissures : Rappels	7
1.1.3	Énergie de séparation en mécanique de la rupture	9
1.2	Critère de rupture fragile K_{IC}	9
1.3	Critère de Mandel	9
1.4	Singularités en mécanique des milieux fissurés	10
1.4.1	Analyse asymptotique en mode I et II	11
1.4.2	Relation entre singularité et description énergétique	13
1.5	Théorie énergétique de la rupture fragile	13

1.5.1	Approche de Griffith	13
1.5.2	Approche d'Irwin	15
1.5.3	Autres expressions de G	16
1.6	Théorie des forces de cohésion de Barenblatt	18
1.7	Théorie des intégrales de contour	19
1.7.1	Intégrale J de Rice	19
1.7.2	Intégrale I de Bui	21
1.8	Les modèles des forces cohésives	21
1.8.1	Modèle de Dugdale	22
1.8.2	Modèle de Barenblatt	23
1.8.3	Modèle de Needleman	23
1.9	Fissure traversant une plaque	24
1.9.1	Fissure transversale dans une plaque infinie 2D	24
1.9.2	Fissure centrale dans un milieu élastique cas de Dugdale-Barenblatt	24
1.9.3	Fissure circulaire dans un solide infini : solution de Sneddon du problème plan de Griffith	26
1.9.4	Fissure elliptique dans un solide soumis à une traction normale uniforme	27
1.10	Propagation des fissures en mode mixte (2D)	29
1.10.1	Critère de la contrainte d'ouverture maximale	29
1.10.2	Critère de densité d'énergie minimale de déformation	30
1.11	Loi de propagation des fissures	31
1.11.1	Critère de propagation des fissures	32
1.12	Exemple d'application analytique : Essai Double Cantilever Beam (DCB)	34
1.12.1	Déplacement contrôlé	36
1.12.2	Force contrôlée	36
1.13	Conclusion	37

1.1 Quelques généralités sur la rupture fragile

1.1.1 Notions sur les modes de rupture fragile

La théorie ou l'étude de la fissuration décrit le comportement des structures présentant des discontinuités linéiques dans les milieux considérés comme en 2D (plaques et coques par exemples), des discontinuités surfaciques dans le milieux 3D et permet de prévoir son évolution jusqu'à la rupture complète de la structure.

Localement, la rupture est caractérisée, par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties de part et d'autre d'une surface géométrique S . La coupure nouvellement créée est appelée fissure. C'est une surface de discontinuité pour le champ de déplacement. La discontinuité est appelée déplacement d'ouverture de la fissure elle s'exprime par la relation établit par [Bui, 1978] sous la forme :

$$[[u_i]](x) = u_i^+(x) - u_i^-(x) \quad (1.1)$$

La discontinuité normale $[[u_n]]$ est l'ouverture de la fissure proprement dite et la discontinuité tangentielle $[[u_t]]$ est appelée glissement relatif des deux lèvres de la fissure. La séparation du milieu continu étant supposée effective, les tractions surfaciques sur les lèvres S^+ et S^- s'annulent, le vecteur contraintes $\vec{T}$ représentant au point M la densité surfacique de force sur la facette d'orientation $\vec{n}$ liée à cette séparation s'écrit :

$$T_i(M, n_j) = \sigma_{ij}n_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

σ_{ij} désigne le tenseur de contraintes et n_j la normale unitaire extérieure à l'une ou à l'autre face de la fissure. La relation de Cauchy $\vec{T}(M, -\vec{n}) = -\vec{T}(M, \vec{n})$, devant être satisfaite pour toute surface Σ entourant le point M . Les conditions aux limites ci-dessus sont généralement admises sur la fissure.

1.1.2 Les différents modes d'ouverture des fissures : Rappels

Il existe en générale trois façons d'appliquer une force pour permettre à une fissure de se propager. Ainsi, trois modes de déplacements des bords d'une fissure peuvent se combiner en un mode mixte, ([Bui, 1978], [Labbens, 1980], [Bazant et Cedolin, 1991], [Leblond, 2003], [Pluvinage, 1989], [Bonnet et Frangi, 2007]). Considérons une fissure plane dans la direction $x : (u)$; $y : (v)$; et $z : (w)$, soit $u = u(x, y)$; $v = v(x, y)$; et $w = w(x, y)$. Ces trois modes sont successivement définis à partir des déplacements u_i, v_i, w_i où l'indice $i = I, II$ ou III indique le mode élémentaire de rupture.

Le Mode I, encore appelé mode d'ouverture de fissure, il est considéré comme étant le plus important en mécanique de la rupture pour beaucoup des matériaux. La rupture est caractérisée par un déplacement unique suivant l'axe Ox_2 correspondant à un problème plan particulier. Les surfaces de fissure se déplacent perpendiculairement l'une à l'autre.

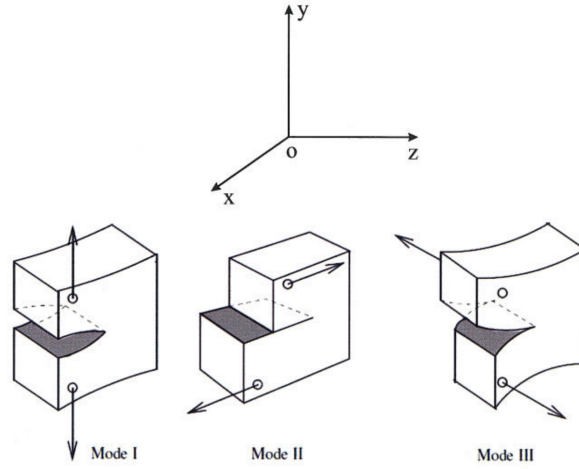


Figure 1.1: Les différents modes de sollicitations d'une fissure : I Ouverture ; II Cisaillement ; III Cisaillement anti-plan

Par définition on a : $U_I(x, y) = U_I(x, -y)$; $V_I(x, y) = -V_I(x, -y)$, ce qui permet décrire $U_I = \frac{1}{2}[u(x, y) + u(x, -y)]$; $V_I = \frac{1}{2}[v(x, y) - v(x, -y)]$; $W_I = 0$. Le Facteur d'Intensité de Contrainte (FIC) est défini par $K_I = \lim_{r \rightarrow 0^+} [\sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(r, \theta = 0)]$.

Le Mode II, est engendré par un cisaillement dans le plan des lèvres de la fissure et parallèle à l'axe $\mathcal{O}x_1$. Les surfaces de la fissure dans ce mode se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de fissure. Par définition on a : $U_{II}(x, y) = -U_{II}(x, -y)$; $V_{II}(x, y) = V_{II}(x, -y)$, d'où $U_{II} = \frac{1}{2}[u(x, y) - u(x, -y)]$; $V_{II} = \frac{1}{2}[v(x, y) + v(x, -y)]$; $W_{II} = 0$. Le FIC est défini par $K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0^+} [\sqrt{2\pi r} \sigma_{12}(r, \theta = 0)]$.

Le Mode III, est produit par un cisaillement anti-plan (*hors plan*) situé dans le plan de fissure $\mathcal{O}x_1x_3$ et parallèle à l'axe $\mathcal{O}x_3$. Par définition : $U_{III} = 0$; $V_{III} = 0$; $W_{III} = W(x, y)$. Le FIC est défini par $K_{III} = \lim_{r \rightarrow 0^+} [\sqrt{2\pi r} \sigma_{23}(r, \theta = 0)]$.

Lorsque les trois modes, dont le mode I, sont simultanément présent on dit qu'il s'agit du *mode mixte*. Dans ce cas, on procède par additivité des déplacements. Par exemple dans le cas du mode I et II, on a les additivités suivantes : $U(x, y) = U_I + U_{II}$; $V(x, y) = V_I + V_{II}$. Selon [Bui, 1978], la superposition de ces trois modes reste suffisante pour décrire le cas général de déplacement des lèvres de la fissure.

Dans le cas de déformation plane, la contraction latérale est empêchée, une condition supplémentaire est introduite : $W = 0$. Cette condition entraîne que la déformation ε_{zz} , les cisaillements τ_{xz} et τ_{yz} sont nuls : $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$, $\tau_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ et $\tau_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$. Par application de la loi de Hooke, les scissions γ_{xz} et γ_{yz} sont elles aussi nulles.

1.1.3 Énergie de séparation en mécanique de la rupture

Le phénomène de séparation est de nature essentiellement irréversible [Bui, 1978]. Les nouvelles surfaces créées peuvent reprendre contact (problème de mécanique de contact unilatéral), mais ne se recollent pas, c'est à dire qu'il n'y a pas d'adhésion au sens de la mécanique des surfaces. Le processus de séparation à partir du milieu continu exige une énergie qui est fonction de la surface créée. [Griffith, 1920] à formuler une hypothèse en disant que cette énergie est proportionnelle à la surface créée et s'écrit :

$$dW_s = 2\gamma ds \quad (1.3)$$

γ étant l'énergie superficielle caractéristique du matériau, ds étant l'aire géométrique de la nouvelle fissure. L'aire totale étant celle des deux faces, soit le double. L'énergie pour séparer le milieu continu a été interprétée comme une énergie superficielle, comme en mécanique des surfaces.

1.2 Critère de rupture fragile K_{IC}

En générale, les théories de la rupture fragile conduisent à la notion d'un seuil critique surtout dans le cas de mode d'ouverture symétrique, non pas pour la contrainte qui est infinie en fond de fissure, mais pour le facteur K_I . On a un critère de rupture de la forme :

$$K_I - K_{IC} = 0 \quad (1.4)$$

K_{IC} , caractéristique physique du matériau appelée ténacité. Dans les problèmes plans, le facteur K_I est une fonction de la géométrie de la structure, dépendant de la longueur l_f de la fissure et des paramètres du chargement Q_i .

$$K_I = f(l_f, Q_i) \quad (1.5)$$

La fonction $f(l_f, Q_i)$ est souvent déterminée dans les problèmes de mécanique de la rupture, par exemple dans les problèmes de poutre à fissure latérale soumis à la flexion trois points.

1.3 Critère de Mandel

L'état critique de la fissure est atteint lorsque les contraintes σ_{ij} sur le cercle de rayon $r = r_0$ vérifient certaines relations caractéristiques du matériau. Dans la théorie de [Mandel, 1966], il y a une relation critique entre les contraintes sur le cercle r_0 . Cela revient à considérer les facteurs K_I et K_{II} comme paramètres caractéristiques. Si r_0 est suffisamment petit pour que la singularité élastique soit dominante au voisinage extérieure de cette zone, le critère de la rupture contiendra les propriétés de la ténacité du matériau, [Labbens, 1980].

$$f(K_I, K_{II}) = 0 \quad (1.6)$$

avec $K_I > 0$. Pour préciser la forme de la relation ci-dessus, [Mandel, 1966] fait l'hypothèse que la fissure se propage dans la direction θ avec la fissure existante lorsque dans le plan des contraintes $(\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta r})$, le vecteur tension

$$\vec{T} = (\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta r}) \quad (1.7)$$

s'exerçant sur la facette portée par le rayon issu de la pointe de la fissure a son extrémité sur une courbe appelée courbe intrinsèque de la résistance moléculaire. Comme on se place sur le cercle de rayon r_0 , on peut porter dans le plan le vecteur de composantes $(\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta r})$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0}} K_I (3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}) - \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0}} 3K_{II} (\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}) \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0}} K_I (\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}) + \frac{1}{4\sqrt{2\pi r_0}} K_{II} (\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2}) \end{aligned} \quad (1.8)$$

En transformant les expressions des contraintes définies ci-dessus, [Bui, 1978] leur donne une forme simple sur laquelle on voit qu'un maximum de $K_N(\theta)$ entraîné la nullité de $K_T(\theta)$.

$$\begin{aligned} K_N(\theta) &= \sigma_{\theta\theta} \sqrt{2\pi r_0} = \frac{1}{4} K_I (3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}) - \frac{1}{4} K_{II} (\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}) \\ K_T(\theta) &= \sigma_{r\theta} \sqrt{2\pi r_0} = \frac{1}{4} K_I (3 \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}) + \frac{1}{4} K_{II} (\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

Les $K_N(\theta)$ et $K_T(\theta)$ ne sont pas les facteurs d'intensité de contrainte à l'extrémité de la fissure, mais une combinaison de K_I et K_{II} avant l'extension. L'hypothèse de [Mandel, 1966] postule que pour certains matériaux et pour $K_N > 0$, correspondant à une ouverture de la fissure, la courbe intrinsèque de résistance moléculaire est symétrique par rapport à l'axe K_N et largement ouverte sur cet axe.

1.4 Singularités en mécanique des milieux fissurés

Il est connu que certaines géométries comme les coins, les arrêtes ou les entailles et les nœuds sont des zones de concentrations des contraintes qui peuvent être néfaste à la résistance de la structure qui les subit. Ces cas sont souvent rencontrés dans les assemblages constitués de plusieurs matériaux et aux interfaces des éléments constitués des matériaux de nature différentes. L'application de la mécanique des milieux continus dans les structures constructives contenant des fissures se heurte à une singularité des champs de déformation et de contrainte dues à l'interprétation de la continuité géométrique. Ceux

ci dit que, la mécanique de la rupture est l'application de la mécanique des milieux continus à l'étude du comportement des éléments constructifs fissurés prenant en compte les conditions aux limites relatives à la présence géométrique des fissures.

1.4.1 Analyse asymptotique en mode I et II

Soit Ω_P un solide composé de matériau homogène et isotrope dont le comportement est élastique linéaire. On note E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

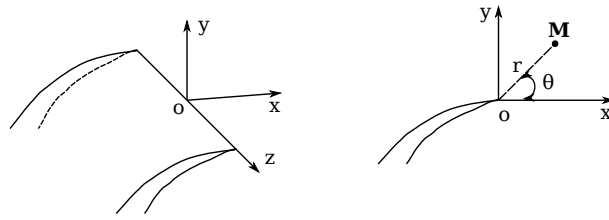


Figure 1.2: Définition du repère local au voisinage de la pointe de la fissure

Le problème est plan et définit dans le repère orthonormé $\mathbb{R}(\mathcal{O}, x_1, x_2)$. Le centre $\mathcal{O}$ du repère est confondu avec la pointe de la fissure. L'axe des coordonnées cartésiennes $\mathcal{O}x_1$ est tangent au plan de la fissure *i.e.* situé dans le prolongement de la fissure et l'axe $\mathcal{O}x_2$ perpendiculaire à la fissure. On définit également les coordonnées polaire (r, θ) correspondantes.

Le problème revient à trouver au voisinage de $r = 0$, le champ de déplacement du solide élastique Ω_p définit sous la forme :

$$u_i(r) = r^\alpha g_i(\theta) \quad (1.10)$$

En élasticité plane, la solution fournie par [Westergaard, 1939], exprimée en coordonnées polaires et reprise dans des ouvrages spécialisés ([Labbens, 1980], [Bui, 1978], [Leblond, 2003], [Bonnet et Frangi, 2007]), permet d'obtenir, à l'aide des fonctions d'Airy, les déplacements et les contraintes au voisinage de la pointe de la fissure.

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_I \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_I \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{II} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{r\theta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_I \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) \end{aligned} \quad (1.11)$$

A partir des contraintes en coordonnées polaires $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}$, il est possible de calculer les déplacements $u_{rr}, u_{\theta\theta}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}
u_{rr} &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_I \cos \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) + \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{II} \sin \frac{\theta}{2} (k + \cos \theta + 2) \\
u_{\theta\theta} &= \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_I \sin \frac{\theta}{2} (k - \cos \theta) - \frac{1}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} K_{II} \cos \frac{\theta}{2} (k + \cos \theta - 2)
\end{aligned} \tag{1.12}$$

avec μ le module de cisaillement, ν le coefficient de Poisson et k , la constante de Kolosov ([Parton et Perline, 1977], [Muskhelishvili, 1963]) définie dans les deux cas par :

$$\begin{aligned}
k &= \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad \text{en contrainte plane} \\
k &= 3 - 4\nu \quad \text{en déformation plane}
\end{aligned}$$

Les constantes K_I et K_{II} s'appellent facteurs d'intensité de contraintes, ils mesurent la force de singularité des contraintes. D'après les formules donnant les champs de déplacement, les facteurs K_I et K_{II} correspondant aux deux modes I et II sont directement proportionnels aux discontinuités des composantes u_2 et u_1 respectivement.

$$\begin{aligned}
[[u_2]](r) &= u_2(r, +\pi) - u_2(r, -\pi) = \frac{K_I}{\mu} (k + 1) \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \\
[[u_1]](r) &= u_1(r, +\pi) - u_1(r, -\pi) = \frac{K_{II}}{\mu} (k + 1) \sqrt{\frac{r}{2\pi}}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Le cas de chargement antiplan, donne une seule composante du déplacement $u_3(x_1, x_2)$. u_3 est indépendante de l'axe $\mathcal{O}x_3$. Les expressions du déplacement et des contraintes dans le voisinage de la pointe de la fissure sont :

$$[[u_3]] = \frac{2}{\mu} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\theta}{2} \tag{1.14}$$

et

$$\begin{aligned}
\sigma_{13} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \\
\sigma_{23} &= -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2}
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Le facteur d'intensité des contraintes K_{III} est lui aussi proportionnel à la discontinuité du déplacement tangentiel apparaissent comme des facteurs de discontinuités des déplacements :

$$[[u_3]](r) = \frac{4}{\mu} K_{III} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \tag{1.16}$$

Les facteurs d'intensité des contraintes sont ici les facteurs de discontinuités des déplacements. L'interprétation cinématique appliquée au facteur K_I , implique que $K_I > 0$. [Bui, 1978] affirme qu'avant la fissure du matériau, la contrainte normale $\sigma_{22}(r, \theta = 0) > 0$.

1.4.2 Relation entre singularité et description énergétique

La relation est établie dans le cadre de l'élasticité linéaire quasi-statique et les petites perturbations. Le taux de restitution d'énergie par unité de surface de propagation d'une fissure G et les facteurs d'intensités de contraintes associés à une pointe de fissure sont reliés en contrainte planes par la formule d'Irwin.

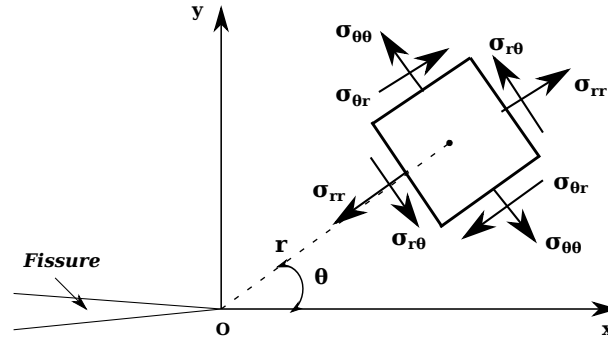


Figure 1.3: Champ de contraintes au voisinage d'une pointe de fissure

$$G = \frac{K_I^2 - K_{II}^2}{E} \quad (1.17)$$

1.5 Théorie énergétique de la rupture fragile

Une fissure est définie comme la surface S séparant localement un solide en deux parties. Le champ de déplacement est alors discontinu à travers cette surface et les trois composantes vectorielles de cette discontinuité définissent les trois modes de rupture. L'objet de la mécanique de la rupture est l'étude des évolutions de propagation de cette surface en fonction des chargements appliqués et des caractéristiques du matériau étudié.

1.5.1 Approche de Griffith

Dans le cadre de la mécanique de la rupture, en quasi-statique, l'étude des fissures planes dans un milieu homogène a été approchée initialement par Griffith (1921) dans [Bui, 1978]. Ce dernier a étudié la rupture de point de vue énergétique. Il suppose l'existence d'une énergie de liaison positive par unité de surface γ . Cette énergie de liaison dans le matériau est supposée être plus basse lorsque les lèvres de la fissure sont en contact que

lorsqu'elles sont séparées. Le problème abordé est le suivant.

Soit Ω un solide élastique avec une fissure S . Pendant la propagation de la fissure, la géométrie de Ω change, la surface augmente de dS . Le changement de la longueur de fissure s'accompagne à des variations de certaines quantités d'énergies. Le taux de variation correspondant est pris comme un paramètre caractéristique de la fissure. Le bilan de conservation de l'énergie totale du solide fissuré après accroissement dS de la fissure est défini sous la forme :

$$dW_{tot} = dW_{elas} + dW_{ext} + dW_{dis} + dW_{cin} = 0 \quad (1.18)$$

Les paramètres sont définis tels que dW_{elas} est la variation de l'énergie élastique, dW_{ext} le travail des forces extérieures ou variation de l'énergie potentielle, $dW_{dis} = 2\gamma dS$ l'énergie dissipée dans la surface pendant la procédure de séparation et dW_{cin} la variation de l'énergie cinétique. Pour Griffith, la variation d'énergie liée à la rupture est proportionnelle à l'augmentation de l'aire de la fissure et s'écrit sous la forme :

$$dW_{dis} = 2\gamma dS \quad (1.19)$$

γ est le taux de dissipation par unité d'accroissement de la fissure qui dépend de la propriété des matériaux considérés. Avant propagation, le solide est en état d'équilibre $dW_{cin} = 0$, la propagation étant en cours, la fissure se propage de façon instable si l'énergie cinétique $dW_{cin} > 0$ augmente d'où :

$$\frac{\partial}{\partial S}(W_{elas} + W_{ext}) + 2\gamma < 0 \quad (1.20)$$

Le paramètre G définissons le taux de restitution de l'énergie est de la forme :

$$G = -\frac{\partial}{\partial S}(W_{elas} + W_{ext}) \quad (1.21)$$

Le critère de propagation de Griffith se traduit donc par l'énergie de séparation de la forme :

$$G > 2\gamma \quad (1.22)$$

En tenant compte de $dW_{dis} = 2\gamma dS$, le bilan d'énergie dW_{tot} se réécrit de la façon suivante en évolution quasi-statique :

$$(G - \gamma)dS = 0 \quad (1.23)$$

G apparaît comme une grandeur caractéristique de la propagation de la fissure. En effet, si $G > 2\gamma$ présence de l'énergie disponible qui sert à rompre les liaisons, c'est l'énergie de séparation ; si $G = 2\gamma$ l'initiation de la propagation est possible, il n'y a pas d'accroissement de l'énergie cinétique, la rupture est contrôlée. Dans ce cas la croissance de la fissure est stable ; si $G < 2\gamma$ la fissure ne se propage pas $dS = 0$. Ce cas définit le critère d'arrêt de la propagation d'une fissure.

1.5.2 Approche d'Irwin

L'idée d'[Irwin, 1958] est de porter le critère sur le facteur d'intensité K_I qui caractérise l'intensité de la singularité en mode I. Il postule l'existence d'une grandeur K_{IC} appelée ténacité, telle que :

$$K_I \leq K_{IC}, \quad \begin{cases} si & K_I \leq K_{IC} & \text{pas de propagation} \\ si & K_I = K_{IC} & \text{propagation possible} \end{cases} \quad (1.24)$$

[Irwin, 1958] considère les fissures comme les surfaces de discontinuités de déplacement puisque chacune des trois composantes de déplacement peut être affectée. Il a observé et définit trois modes indépendants possibles pour les mouvements respectifs des surfaces d'une fissure. [Irwin, 1957], en s'appuyant sur les travaux de [Griffith, 1920] à montrer que les contraintes au voisinage du front de fissure ont la forme :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^I(\theta) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{II}(\theta) + \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}^{III}(\theta) + \sigma_{ij}^0 + 0(\sqrt{r}) \quad (1.25)$$

où r et θ sont les coordonnées polaires locales ; $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Les fonctions f_{ij} sont des fonctions connues et σ_{ij} sont des contraintes finies aux fronts de fissure. Les trois grandeurs importantes K_I , K_{II} et K_{III} sont des facteurs d'intensité de contraintes qui correspondent aux trois modes de base de déplacement relatif des lèvres de la fissure. Ils dépendent de la longueur de la fissure, de la géométrie et des charges appliquées. La formule d'Irwin est donnée en théorie pour une situation où coexistent les modes I, II et III. Elle relie le taux de restitution d'énergie G aux facteurs d'intensités de contraintes K_I , K_{II} , K_{III} et s'écrit sous la forme :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{K_{III}^2}{2\mu} = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1 + \nu}{E} K_{III}^2 \quad (1.26)$$

Cette formule montre que G dépend seulement uniquement de la valeur actuelle des champs mécaniques, mais aussi de leurs formes asymptotiques au voisinage de la pointe de la fissure. Cependant elle suppose que la propagation de la fissure se fait dans le prolongement de la direction initiale, elle suppose de plus les champs mécaniques indépendants de x_3 . En présence de mode mixte (mode I + mode II), la fissure ne se propage pas en ligne droite. La tangente est discontinue, il y a branchement de la fissure. Cette situation pose de nombreux problèmes spécifiques. Le taux de restitution d'énergie prend la valeur :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (1.27)$$

Si $K_{III} \neq 0$, existence d'un déversement du front de fissure. La formule d'Irwin n'a donc véritablement d'intérêt pratique qu'en mode I pur *i.e.*, $K_{II} = K_{III} = 0$, mais elle reste rigoureusement exacte pour $K_{II} \neq 0$ et/ou pour $K_{III} \neq 0$, mais dans le cas purement virtuel d'une extension colinéaire et de champs mécanique constamment indépendant de l'axe $\mathcal{O}x_3$. En présence de contraintes planes, G prend la valeur de

$$G = \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) \quad (1.28)$$

Nous restreignons donc au cas du mode I pur sous la formule :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \quad (1.29)$$

Selon [Leblond, 2003], cette formule établit l'équivalence des critères de propagation dans la théorie d'Irwin $K_I = K_{Ic}$ et de Griffith $G = G_c$. La correspondance entre grandeur critique est donnée par :

$$G = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{IC}^2 \quad (1.30)$$

De nombreuses tentatives de recherches ont été menées pour évaluer le taux de restitution d'énergie en présence de branchement, l'une d'entre elle consiste à reprendre le raisonnement qui conduit à la formule d'Irwin en utilisant la forme asymptotique faisant intervenir les facteurs d'intensités avant branchement et après branchement. En conclusion, le calcul d'Irwin est applicable pour toutes longueurs l_f de l'extension.

1.5.3 Autres expressions de G

Le raisonnement est rapporté à un problème plan dans le cas de l'élasticité linéaire. Nous rapportons également toutes les grandeurs mécaniques à une unité d'épaisseur.

Soit Ω un solide élastique linéaire avec une fissure de longueur initiale l_f et dl_f l'accroissement virtuel de la fissure.

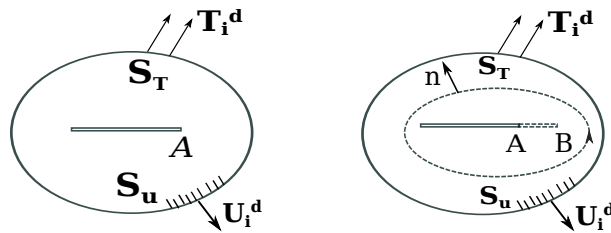


Figure 1.4: Croissance virtuelle de fissure

Le solide Ω est soumis à des sollicitations suivantes : sur la partie $\partial\Omega_T = S_T$ de la frontière, on impose la force surfacique T_i^d et sur la partie complémentaire $\partial\Omega_u = S_u$, les déplacements u_i^d . $\partial\Omega = \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_u$ et $\partial\Omega_T \cap \partial\Omega_u = \emptyset$. On cherche à évaluer le problème du taux de restitution de l'énergie G à l'aide d'une intégrale curviligne. Le terme de dW_{ext} défini précédemment est déjà curviligne, il suffit de transformer le terme dW_{elas} de variation d'énergie élastique en intégrale curviligne. L'énergie cinétique est négligée

($dW_{cin} = 0$) dans les calculs.

Le problème revient à considérer les champs élastique solution du problème aux limites dépendant de la longueur de la fissure. On écrit G sous la forme :

$$G = -\frac{\partial}{\partial l_f} \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}) dw + \int_{\partial\Omega_T} T_i^d \frac{\partial u_i}{\partial l_f} ds = -\frac{\partial}{\partial l_f} \int_{\Omega} W(\varepsilon_{ij}) dw + \int_{\partial\Omega} T_i \frac{\partial u_i}{\partial l_f} ds \quad (1.31)$$

En remplaçant $\partial\Omega_T$ par la surface $\partial\Omega$, de telle sorte que $\frac{\partial \vec{u}}{\partial l_f} = 0$ sur $\partial\Omega_u$ et en utilisant le principe des puissances virtuelles ou travaux virtuels, nous pouvons écrire le premier terme du dernier membre de G sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial l_f} \int_{\partial\Omega_T} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dw = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} T_i \frac{\partial u_i}{\partial l_f} ds \quad (1.32)$$

Les tractions T_i et $\frac{\partial T_i}{\partial l_f}$ sont nulles sur la fissure, il est possible de remplacer $\partial\Omega$ par Ω .

$$G = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} (T_i \frac{\partial u_i}{\partial l_f} - u_i \frac{\partial T_i}{\partial l_f}) ds \quad (1.33)$$

Sachant que $\partial\Omega = \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_u$, l'expression de G peut être écrit sous la forme :

$$G = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_T} T_i^d \frac{\partial u_i}{\partial l_f} ds - \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega_u} u_i^d \frac{\partial T_i}{\partial l_f} ds \quad (1.34)$$

Une application à cette formule donne le cas d'un chargement à un paramètre. Soit Q , un effort général appliqué et q , la grandeur cinématique conjuguée de telle sorte que la grandeur des efforts extérieurs soit égale à $Q\dot{q}$. (Q est une force ponctuelle exercée sur un point de Ω et q le déplacement de ce point dans la direction de la force). L'intégrale $\int_{\partial\Omega} T_i \frac{\partial u_i}{\partial l_f} ds$ est le travail des efforts extérieurs dans le déplacement $\frac{\partial u_i}{\partial l_f}$, donc décrit un comportement de la forme : $Q \frac{\partial q}{\partial l_f}$. De même pour l'intégrale $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial T_i}{\partial l_f} u_i ds = q \frac{\partial Q}{\partial l_f}$. La relation de G devient :

$$G = \frac{1}{2} (Q \frac{\partial q}{\partial l_f} - \frac{\partial Q}{\partial l_f} q) \quad (1.35)$$

On introduisons la raideur $R(l_f)$ et la complaisance $C(l_f)$ en fonction de la longueur l_f de la fissure, on peut écrire respectivement pour la raideur $Q = R(l_f)q$ et pour la complaisance $q = C(l_f)Q$. On écrit G en fonction de la raideur

$$G = -\frac{1}{2} q^2 \frac{dR}{dl_f} \quad (1.36)$$

et en fonction de la complaisance sous la forme :

$$G = \frac{1}{2} Q^2 \frac{dC}{dl_f} \quad (1.37)$$

D'après [Leblond, 2003], les formules de la raideur et de complaisance possèdent une interprétation graphique sur la courbe effort-déplacement

1.6 Théorie des forces de cohésion de Barenblatt

Ce sont des forces attractives F s'exerçant entre les particules de part et d'autres du plan de séparation AB , situées dans une très petite zone de largeur $d \ll l_f$. D'après [Bui, 1978], les forces de cohésion ont la particularité de dépendre de l'écartement des particules. Pour les faibles écartements v , on a une réponse quasi-élastique. Pour les écartements importants dépassant certaines valeurs v_m , les forces disparaissent. La force F est donc une fonction non linéaire de l'écartement v des particules.

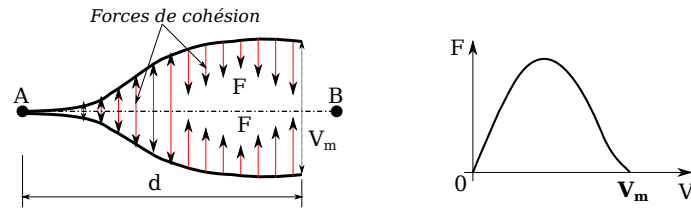


Figure 1.5: Forces de cohésions en fonction de l'écartement $F(v)$

On considérons une fissure immobile AB (voir figure 1.5) qui s'ouvre sous l'action des forces extérieures. On peut écrire :

$$K'(A) - K_I(A) = 0 \quad (1.38)$$

avec $K'(A)$, le facteur d'intensité donné par la relation :

$$K'(A) = \int_0^d k_p(x_1, A) F[v(x_1)] dx_1 \quad (1.39)$$

$k_p(x_1, A)$ est la fonction poids de Bueckner, c'est le Facteur d'Intensité des Contraintes en mode I, à la pointe A . [Barenblatt, 1962] fait l'hypothèse qu'au moment de la rupture, la forme de l'ouverture de la fissure dans la petite zone de largeur d est toujours la même quelque soit le chargement ou la géométrie de la structure. La valeur critique K_{IC} rattachée aux forces de cohésion est donnée par

$$K_{IC} = \int_0^d k_p(x_1, A) F_C(x_1) dx_1 \quad (1.40)$$

$F_C(x_1)$ est une force qui remplace les forces de cohésion $F[v(x_1)]$. Lorsque d est très petit devant l_f , et lorsque les forces de cohésion sont importantes, la forme de l'ouverture de la fissure $v(x_1)$ dans la zone critique est entièrement déterminée par la courbe $F(v)$ entre la force de cohésion et l'écartement. Lorsque la fissure se propage d'une longueur

unité, ([Willis, 1975a], [Willis, 1975b]) le travail effectué par les forces de cohésion est égal à l'aire sous la courbe $F(v)$ est précisément :

$$\tau = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{IC}^2 \quad (1.41)$$

Cette formule est également obtenue en déformation plane dans laquelle K_{IC} est donné par l'expression ci-dessus et qui se trouve en parfaite accord avec la théorie de [Griffith, 1920] en identifiant τ à 2γ .

En conclusion, les théories de [Griffith, 1920], d'[Irwin, 1957] et de [Barenblatt, 1962] se rejoignent, bien qu'elles soient basées sur les considérations différentes. [Griffith, 1920], fait une interprétation énergétique plus globale, mais sans précisé la nature des forces qui entre en jeux dans la séparation. [Irwin, 1957], ne prend pas en compte les forces de cohésions, sont point de vue conduit à une résolution du problème en mécanique linéaire. Par contre [Barenblatt, 1962] attribue aux forces de cohésion un rôle important dans la rupture, il considère les champs mécaniques finis dans tout le solide.

1.7 Théorie des intégrales de contour

Le milieu pris en compte est supposé homogène, isotrope élastique linéaire, sauf dans la région $\mathbb{D}$ où il peut exister certains défauts tels que : l'inclusion, cavités, dislocations ou fissures. L'analyse élastique linéaire d'une structure fissurée conduit souvent à introduire les coefficients K . Une autre façon de caractériser la singularité du champ de contraintes au voisinage de la pointe des fissures est d'étudier certaines intégrales de contour qu'on peut déduire de la loi de conservation de l'énergie. Parmi les intégrales de contour, l'intégrale J de Rice et l'intégrale I de Bui sont sans doute les plus connues.

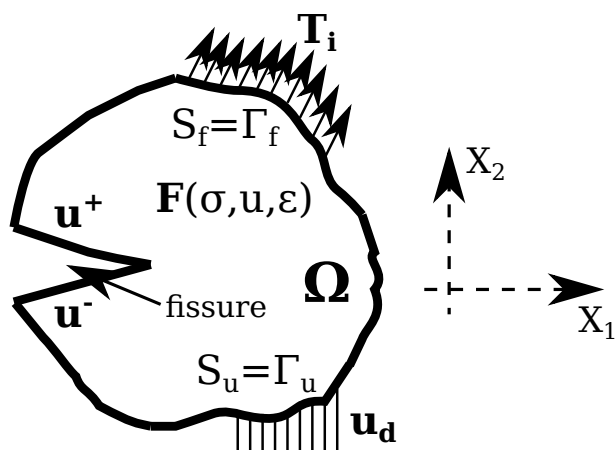
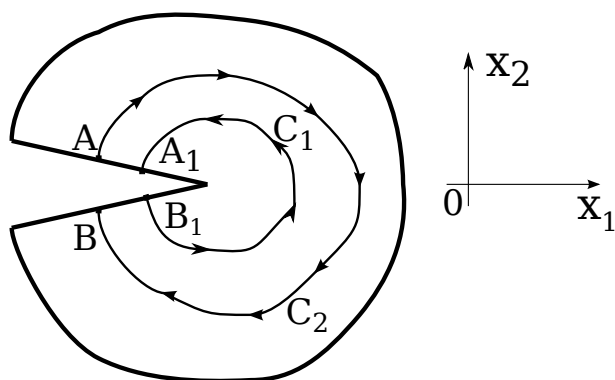
1.7.1 Intégrale J de Rice

Considérons le problème défini par la figure ci-dessous.

Soit C un contour entourant la pointe de la fissure et $\vec{n}$ sa normale sortante. Soit $P_i(\sigma, \varepsilon(u))$, la densité volumique de déformation élastique. L'intégrale de [Rice, 1968] est alors définie par l'expression

$$J = \int_C (P_i n_i - \sigma_{ij} n_j \frac{\partial u_i}{\partial x_i}) dC \quad (1.42)$$

Cette intégrale J est indépendante du contour ouvert d'intégration C . Pour le démontrer, il suffit de supposer un contour fermé constitué de deux contours ouverts C_1 et C_2 et deux segments sur les lèvres de la fissure AA_1 et BB_1 (voir figure). Par application de la formule de Green, l'intégrale est nulle sur le contour fermé et nulle également sur les deux segments où $n_i = 0$ et $\sigma_{ij} = 0$ d'après les conditions aux limites des contraintes nulles sur les lèvres de la fissure. On peut donc appliquer l'intégrale J sur le contour voisin de la

Figure 1.6: Fissure en mode *I* et *II*Figure 1.7: Contour d'intégration de l'intégrale J

pointe de la fissure avec les champs de contraintes définit par l'expression 2 ci-dessus et de déplacements définit par les expressions 3. Cela revient à trouver :

$$J = \begin{cases} \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) & \text{en contrainte plane} \\ \frac{(1-\nu^2)}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) & \text{en déformation plane} \end{cases} \quad (1.43)$$

1.7.2 Intégrale I de Bui

C'est une intégrale curviligne définie le long du contour C .

$$I = \int_C (u_i n_j \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} - P_i^* n_i) dC \quad (1.44)$$

avec P_i^* , l'énergie volumique complémentaire de déformation élastique. On démontre que l'intégrale I est exactement identique à l'intégrale J en faisant les mêmes hypothèses que celle de l'intégrale J . I est aussi indépendant du contour C et s'écrit :

$$I = J = \begin{cases} \frac{1}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) & \text{en contrainte plane} \\ \frac{(1-\nu^2)}{E}(K_I^2 + K_{II}^2) & \text{en déformation plane} \end{cases} \quad (1.45)$$

Il est important de noter que les champs mécaniques dans la région singulière sont mal connus. Seuls les champs lointains peuvent être connus avec plus de précision. Les propriétés d'invariance de J ou de I par rapport au contour d'intégration fournit un moyen numérique de transfert d'information de la zone extérieur vers la région singulière et réciproquement.

1.8 Les modèles des forces cohésives

Les modèles pour les forces cohésives considèrent souvent la présence d'une zone d'élaboration en tête de fissure dans laquelle les forces de cohésions attractives normale σ_n et ou tangentielle σ_t résistent à la séparation des lèvres de la fissure, caractérisée par le saut de déplacement $\llbracket u \rrbracket(x) = u^+(x) - u^-(x)$.

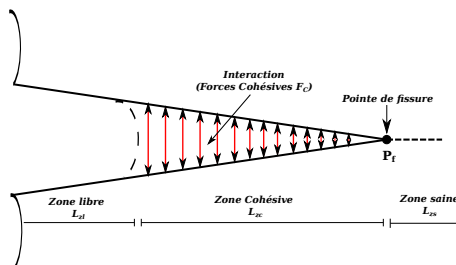


Figure 1.8: Représentation schématique de la zone cohésive située devant la fissure macroscopique en mode I

Pour décrire le comportement de la figure, on se donne la loi d'interaction qui lie les forces cohésives F_c aux sauts de déplacements $\llbracket u \rrbracket$ en sachant que les forces de cohésions ont la particularité de dépendre du saut de déplacement [Jaubert, 2006]. Le taux de restitution de l'énergie critique G_c est :

$$G_c = \int_0^{l_c} F_c([u]) d\llbracket u \rrbracket \quad (1.46)$$

1.8.1 Modèle de Dugdale

Ce modèle décrit l'évolution des forces de traction σ_n en fonction du saut de déplacement normale $\llbracket u_n \rrbracket$. Le saut reste nul tant que la force n'atteint pas la valeur critique σ_c , on utilise le comportement d'un solide rigide parfait jusqu'à un seuil d'ouverture au-delà duquel l'interaction des lèvres devient nulle (voir figure de Dugdale).

Les forces s'opposant à l'ouverture de la fissure sont constantes dans toute la zone d'élaboration. La densité d'énergie de surface s'écrit :

$$\phi(\llbracket u_n \rrbracket) = \begin{cases} \frac{G_c}{\delta_c} \llbracket u_n \rrbracket & \text{si } 0 \leq \llbracket u_n \rrbracket \leq \delta_c \\ G_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c \end{cases} \quad (1.47)$$

La fonction $\phi(\llbracket u_n \rrbracket)$ dénotant le saut de déplacement est bilinéaire : elle est linéaire croissante jusqu'à ce que le saut de déplacement $\llbracket u_n \rrbracket$ atteigne le saut critique δ_c puis est constante et égale à G_c pour $\llbracket u_n \rrbracket \geq \delta_c$. De ce fait, l'énergie de surface de Dugdale est un cas particulier de l'énergie de surface de type Baranblatt, et reste une énergie cohésive initialement rigide.

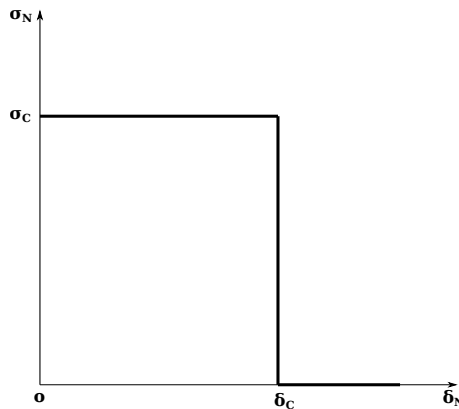


Figure 1.9: Loi d'interaction de Dugdale dans la direction normale

1.8.2 Modèle de Barenblatt

Modèle introduit courant les années 1960, la théorie de ce modèle est rapprochée à celle de Griffith. [Barenblatt, 1962] et [Goodier, 1975] admettent l'existence d'une zone dans laquelle les molécules peuvent être écartés de δ , cet écart résulte des contraintes de cohésion qui s'opposent à la séparation franche. Les contraintes de cohésion $\delta = 0$ sont nulles à l'extrémité de la zone de cohésion et varient en fonction de l'écartement δ suivant la loi du matériau. En exprimant la variation d'énergie potentielle dans une intégrale de contour, [Rice, 1968] a montré que, tant que la zone de cohésion est petite, la variation d'énergie potentielle dans une extension dl_f de la fissure est liée aux contraintes de cohésion par l'expression :

$$\frac{dP}{dl_f} = -e_p \int_0^{\delta_t} \sigma(\delta) d\delta \quad (1.48)$$

Cette expression traduit l'équivalence entre l'énergie de surface de Griffith et les forces de cohésion de Barenblatt. Avec e_p l'épaisseur du matériau. L'énergie de Griffith ou les forces de cohésion de Baranblatt absorbent dans la zone de l'extrémité de la fissure l'énergie potentielle libérée en conservant l'énergie sous forme mécanique, et en considérant le phénomène réversible [Labbens, 1980].

1.8.3 Modèle de Needleman

Ce modèle décrit l'évolution des forces de cohésion normale σ_n et tangentielle σ_t en fonction des composantes δ_n et δ_t du saut de déplacement [Needleman, 1987]. La figure ci-dessous présente l'évolution de force normale en fonction du saut normal lorsque le saut tangentiel est nul.



Figure 1.10: Loi d'interaction de Needleman dans la direction normale

Le saut critique δ_c au delà du quel l'interaction entre les lèvres de fissure deviennent nulles ainsi que la résistance au glissement par rapport à la résistance normale. Lorsque $\delta_n < 0$, la valeur de la contrainte σ_n intervienne dans le rôle de pénalisation afin de tenir

compte de la condition de non pénétration des lèvres de la fissure. Ce modèle ne fait intervenir le paramètre δ_c .

1.9 Fissure traversant une plaque

La théorie de la rupture fragile, en quasi-statique, a été généralisée au cas des plaques [Labbens, 1980]. On élasticité plane, on montre que les solutions du problème s'applique à une plaque dans le cas d'une charge de traction normale exercée sur la face de la plaque et le cisaillements nuls sont appliqués en tout point même dans le cas d'une épaisseur quelconque.

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (1.49)$$

Il a été démontré par [Sih *et al.*, 1966] que lorsque la plaque est traversée par une fissure, et si la plaque est suffisamment épaisse, la déformation plane s'établit partout sauf au voisinage des faces de la plaque. Dans ce cas le front de fissure s'oppose à la contraction transversale. La déformation plane ne subsiste plus lorsqu'on s'éloigne du front de fissure. La solution plane n'est plus valable puisque les contraintes varient dans l'épaisseur de la plaque. Dans le cas d'une plaque épaisse dont les faces sont libres, la solution du problème est tridimensionnel, seule la zone singulière admette une solution de déformation plane [Bui, 1978].

1.9.1 Fissure transversale dans une plaque infinie 2D

Soit une plaque de longueur infinie et de largeur $2L$. Une fissure de longueur $2l_f$ se trouve centrée dans le sens de la largeur de la plaque. La fissure est définie en mode I.

Sur la plaque, on exerce une traction uni-axiale $\sigma > 0$ à l'infini. En déformation plane, les facteurs d'intensités de contraintes à chacune des deux pointes sont donnés :

$$K_I = \sigma \sqrt{\frac{\pi l_f}{\cos \frac{\pi l_f}{2L}}}, \quad K_{II} = 0 \quad (1.50)$$

Lorsque la longueur de la fissure l_f augmente et tende vers la largeur L de la plaque, *i.e.* si $l_f \rightarrow L$, le facteur $K_I \rightarrow \infty$ et si $L \rightarrow \infty$ pour une longueur l_f fixée, on retrouve l'expression d'Irwan dans le cas d'une ellipse très plate. Le facteur K_I est égal à $K_I = \sigma \sqrt{\pi l_f}$. Pour le cas d'un effort de compression uni-axiale $\sigma < 0$ appliqué à l'infini, la fissure reste en contact et devient invisible. On a $K_I = K_{II} = 0$ pour $\sigma < 0$.

1.9.2 Fissure centrale dans un milieu élastique cas de Dugdale-Barenblatt

Il s'agit d'un modèle de fissure de longueur finie dans un massif soumis aux efforts de tractions uniformes $\sigma_{22} = \sigma^\infty$. La solution de ce problème à une importante application

dans la théorie de la rupture, [Bui, 1978]. Le modèle est caractérisé par l'existence des forces de cohésions particulières constante égale à la limite d'élasticité en traction σ_0 , sur la largeur R .

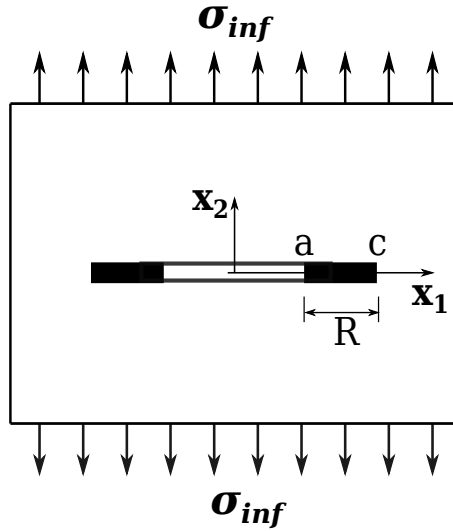


Figure 1.11: Modèle de fissure de longueur finie dans un massif infinie soumis à la traction $\sigma_{22} = \sigma^\infty$: Dugdale-Barenblatt

Dans la figure ci-dessus, $2c$ est la longueur totale de la coupure, $2a$ la longueur de la fissure proprement dite, c'est aussi l'intervalle où la traction est identiquement nulle. Les conditions aux limites sur la longueur de la fissure s'écrit :

$$\sigma_{22}^0(x_1, 0) = \begin{cases} -\sigma^\infty & |x_1| < a \\ -\sigma^\infty + \sigma_0 & a < |x_1| < c \end{cases}$$

à l'infinie, on a :

$$\sigma_{ij} = 0(|x_1|^2)$$

La fonction $\Phi'(x)$ du problème est de la forme :

$$\Phi'(x) = \frac{(z^2 - c^2)^{-\frac{1}{2}}}{2i\pi} \int_{-c}^{+c} \frac{\sigma_{22}^0(t, 0)}{-i(c^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}(t - z)} dt \quad (1.51)$$

Dans ce modèle caractérisé par des forces de cohésion, on demande que les contraintes soient finies aux points $z = \pm c$, et les facteurs d'intensités nuls en ces points. $\Phi'(z)$ est une fonction régulière au point $z = c$, ce qui introduit la nullité de l'intégrale ci-dessus au point $z = c$.

$$\int_{-c}^{+c} \frac{\sigma_{22}^0(t, 0)}{-i(c^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}}(t - z)} dt = 0 \quad (1.52)$$

En explicitant la relation ci-dessus et en tenant compte des conditions aux limites, on peut écrire la relation permettant d'obtenir la largeur de la zone des forces de cohésion :

$$R = c - a = a \left[\frac{1}{\cos(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_0})} - 1 \right] \quad (1.53)$$

Il est aussi important de noter que R est plus petit que la force de cohésion δ est grande. La discontinuité normale δ est par définition la discontinuité de $u_2(a)$ calculée au point a . Cette discontinuité a été calculée par [Burdekin et Stone, 1966] et donnée par la relation :

$$\delta = u_2^+(a) - u_2^-(a) = \frac{k+1}{\pi\mu} \sigma_0 a \log \left| \frac{1}{\cos(\frac{\pi\sigma^\infty}{2\sigma_0})} \right| \quad (1.54)$$

Dans l'hypothèse de contrainte plane et pour le cas de chargements faibles, un développement limité autour du terme σ^∞ donne la relation de discontinuité sous la forme :

$$\delta = \frac{\pi\sigma_\infty^2 a}{E\sigma_0} \quad (1.55)$$

Si l'on considère que la fissure a pour longueur $2a$ correspondant à l'intervalle où la traction est nulle, on peut alors introduire le facteur d'intensité $K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$ et obtenir le paramètre δ sous la forme $\delta = \frac{K_I^2}{E\sigma_0}$. Cette dernière relation établie l'équivalence entre la théorie du K_{IC} et certaine théorie de la rupture basée sur l'ouverture critique de la fissure δ_c . Le modèle de Dugdale-Barenblatt est un modèle de force de cohésion, et de forces attractives entre les particules de deux faces de la fissure d'intensité constante. Il est surtout utilisé pour introduire la plasticité en fond de fissure. On suppose que la plasticité se trouve localisée sur le ligament de largeur R . Dans la zone plastique de largeur R , lorsque le chargement est faible (déformation plastique confinée) on a $R = \frac{\pi K_I^2}{2\sigma_0^2}$.

1.9.3 Fissure circulaire dans un solide infini : solution de Sneddon du problème plan de Griffith

Dès les années 1945, Sneddon a résolu le problème plan de Griffith à partir de la solution de Wetersgaard. Pour le problème d'un plan fissuré soumis à l'infini à une traction, les expressions des premiers termes des contraintes sont obtenues par [Sneddon, 1946] à partir d'un développement limité au voisinage de front de fissure sous la forme :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + O(\sqrt{\frac{r}{a}}) \\ \sigma_{yy} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} (1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}) + O(\sqrt{\frac{r}{a}}) \\ \tau_{xy} &= \sigma \sqrt{\frac{a}{2r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} + O(\sqrt{\frac{r}{a}}) \end{aligned} \quad (1.56)$$

La fissure s'ouvre en forme d'une petite ellipse. Dans sa résolution, l'auteur donne les éléments pour le calcul des premiers termes des déplacements au voisinage du front de fissure. Pour une fissure circulaire, l'auteur utilise les équations de l'élasticité par la transformation de Fourier, et donne les expressions des premiers termes des contraintes dans un trièdre lié à la normale $\vec{n}$ et à la tangente $\vec{t}$ sous la forme :

$$\begin{aligned}\sigma_{nn} &= \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) + 0(\sqrt{\sqrt{\frac{r}{a}}}) \\ \sigma_{zz} &= \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) + 0(\sqrt{\frac{r}{a}}) \\ \sigma_{tt} &= 2\nu\frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2} - 0(\sqrt{\frac{r}{a}}) = \nu(\sigma_{nn} + \sigma_{zz}) \\ \tau_{zn} &= \frac{2}{\pi}\sigma\sqrt{\frac{a}{2r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2} + 0(\sqrt{\frac{r}{a}})\end{aligned}\tag{1.57}$$

Il y a des similitudes entre les expressions (1.56) et (1.57). Pour les fissures circulaires, il est nécessaire de noter l'existence de la déformation plane dans le plan normal sous la forme $\sigma_{tt} = \nu(\sigma_{nn} + \sigma_{zz})$. Le même problème pour une fissure elliptique a été résolu par [Green et Sneddon, 1950], les expressions générales ont été obtenues sans développement limités en isolant les termes singuliers.

1.9.4 Fissure elliptique dans un solide soumis à une traction normale uniforme

La solution de Sneddon du problème de fissure circulaire soumise à une certaine contrainte d'ouverture normale avait montré l'existence d'un facteur des contraintes. Dès les années 1961, [Irwin, 1962] généralise la fissure elliptique soumise à une contrainte uniforme d'ouverture les résultats de Sneddon sur la fissure circulaire.

[Green et Sneddon, 1950] avaient montré au par avant que la fissure elliptique s'ouvrait en petit ellipsoïde. [Irwin, 1956], [Irwin, 1957], [Irwin, 1962], montre que dans un plan normal au voisinage du front de fissure, r petit et $\theta = \pi$, donne le premier terme de l'ouverture de la fissure sous la forme :

$$\eta = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} \frac{\sigma}{\zeta(k)} \sqrt{\frac{2ar}{c}} (a^2 \cos^2 \phi + c^2 \sin^2 \phi)^{\frac{1}{4}}\tag{1.58}$$

avec $\zeta(k)$ une fonction d'intégration elliptique de seconde espèce, donnée par :

$$\zeta(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \phi} d\phi\tag{1.59}$$

avec $k^2 = 1 - \frac{a^2}{c^2}$ égale à 1 pour le segment de droite ($k = 1$) et $\frac{\pi}{2}$ pour une circonférence ($k = 0$).

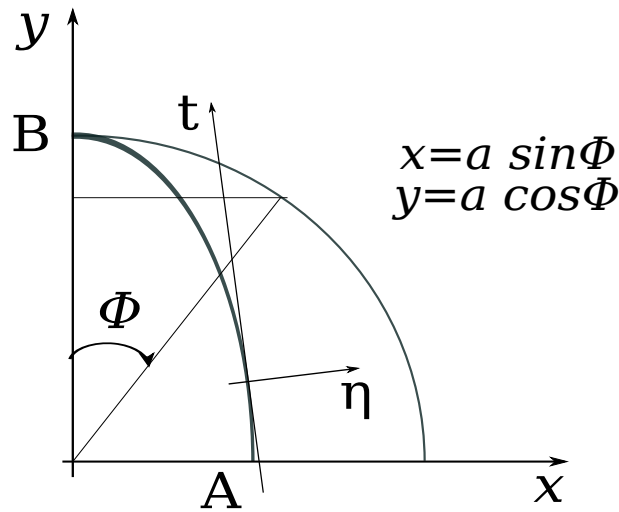


Figure 1.12: Fissure elliptique soumise à une contrainte uniforme

Irwin montre aussi que sur un arc d'ellipse ds petit devant les dimensions de l'ellipse cette ouverture varie très peu, et peut être identifiée à une ouverture en déformation plane.

$$\eta = \frac{2(1 - \nu^2)}{E} K_I(\phi) \sqrt{\frac{2r}{\pi}} \quad (1.60)$$

avec

$$K_I(\phi) = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\zeta(k)} (\sin^2 \phi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \phi)^{\frac{1}{4}} \quad (1.61)$$

Au sommet du petit axe de l'ellipse, K_I est maximal pour $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$K_{I_{max}} = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\zeta(k)}$$

Pour une circonférence, $a = c$, $\zeta(k) = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le résultat de Sneddon :

$$K_I = \frac{2}{\pi} \sigma \sqrt{\pi a}$$

Pour une ellipse très plate, le rapport $\frac{a}{c} \rightarrow 0$ ($\frac{a}{c} = 0$) ce qui donne la fonction d'intégrale elliptique $\zeta(k) = 1$, d'où :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a}$$

[Kassir et Sih, 1966] ont montré que pour un chargement plus complexe comprenant les tractions et les cisaillements appliqué à ellipse en tout point du contour, il existe un champ de contrainte singulier complexe contenant les modes I et II en déformation plane. La technique n'est limitée aux chargements uniformes.

1.10 Propagation des fissures en mode mixte (2D)

Lorsqu'une fissure est soumise simultanément à plusieurs modes de chargement, on cherche souvent à trouver l'intensité de sollicitation à laquelle la rupture se produit, et aussi la direction dans laquelle la fissure se propage. Dans pareil cas, on utilise souvent dans la littérature les critères de rupture. [Griffith, 1920] dans [Labbens, 1980] à étudier une plaque plane soumise aux efforts de tractions Q suivants l'axe $\mathcal{O}x_1$ et P_c suivant l'axe $\mathcal{O}x_2$, évidée d'une ellipse aplatie dont le petit rayon b et le grand rayon a sont tels que $b \ll a$. Le grand axe de l'ellipse fait l'angle θ avec l'axe $\mathcal{O}x_1$.

Le cas $\theta = 0$, l'auteur montre que l'instabilité de la fissure, est une ellipse très plate avec $b \rightarrow 0$ et une charge de traction égale :

$$P_c^2 = \frac{2E\gamma}{a\pi(1-\nu^2)} \quad (1.62)$$

La contrainte σ_{yy} créée par le chargement au sommet du grand axe pour le rayon de courbure ρ_c de l'ellipse est égale à :

$$\sigma_{yy} = 2P_c \sqrt{\frac{a}{\rho_c}} = 2P_c \frac{a}{b} \quad \text{avec} \quad \rho_c = \frac{b^2}{a} \quad (1.63)$$

1.10.1 Critère de la contrainte d'ouverture maximale

Critère important dans le cas de propagation des fissures en mode mixte. Pour simplifier les calculs, [Erdogan et Sih, 1963] ont fait les hypothèses suivantes : au moment de la rupture, la fissure se propage dans la direction pour laquelle la contrainte tangentielle est maximale, et la fissure est instable lorsque :

$$K_{IC} = \sigma_{\theta\theta\max} \sqrt{2\pi r} \quad (1.64)$$

En partant de l'idée que l'ouverture d'une fissure est provoquée par la contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ normale. La direction de l'extension s'obtient par dérivation, on dérive l'expression asymptotique $\sigma_{\theta\theta}$ défini en coordonnées polaires en mode mixte (K_I et K_{II}) par rapport à θ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= -\frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} (K_I \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta) - \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} (K_I \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{3}{2} K_{II} \cos \theta) \\ &= -\frac{3}{4} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II} (\cos \theta - 1)] \end{aligned} \quad (1.65)$$

La contrainte $\sigma_{\theta\theta}$ est maximale lorsque la contrainte de cisaillement s'annule. En utilisant l'expression asymptotique définie en coordonnées polaires en mode mixte, on a :

$$K_I \left(-\frac{3}{2} \sin \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) + K_{II} \left(-\frac{3}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{9}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) = 0 \quad (1.66)$$

Sachant que $\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} = 2 \sin \theta \cos \frac{\theta}{2}$ et $\cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2} = 2 \cos \theta \cos \frac{\theta}{2}$. L'utilisation de ces expressions trigonométriques permet de simplifier l'équation de contraintes définie en coordonnées polaires sous la forme :

$$K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0 \quad (1.67)$$

La direction θ_0 de l'extension est celle pour laquelle $\sigma_{r\theta}(\theta_0) = 0$, ce qui permet d'écrire :

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (1.68)$$

La relation entre K_I , K_{II} et K_{IC} définie le critère de propagation en mode mixte.

$$\cos \frac{\theta_0}{2} [K_I \cos^2 \frac{\theta_0}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta_0] = K_{IC} \quad (1.69)$$

$\theta_0 \in]-\pi; \pi[$ est l'angle de la propagation de la fissure. Pour le mode I pur $K_{II} = 0$, $\theta_0 = 0$ tandis que pour le mode II pur $K_I = 0$, $\theta_0 = -\arccos \frac{1}{3} = -70.5^\circ$.

Mandel dans [Labbens, 1980] et [Bui, 1978] précise que la direction θ de propagation de la fissure est celle pour laquelle le vecteur contrainte $\vec{T} = (\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta})$ est défini dans le plan $(\sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta})$. [Bui, 1978] réécrit les contraintes en leur donnant une forme simple :

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{K_{\theta\theta}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{K_{r\theta}(\theta)}{\sqrt{2\pi r}} \end{aligned} \quad (1.70)$$

en définissant des facteurs d'intensités effectifs :

$$\begin{aligned} K_{\theta\theta}(\theta) &= \frac{1}{4} K_I (3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{3\theta}{2}) - \frac{1}{4} K_{II} (\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}) \\ K_{r\theta}(\theta) &= \frac{1}{4} K_I (3 \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2}) + \frac{1}{4} K_{II} (\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2}) \end{aligned} \quad (1.71)$$

La fissure se propage donc selon la direction où la valeur $K_{r\theta}(\theta) = K_T(\theta)$ est nulle, et lorsque $K_{\theta\theta}(\theta) = K_N(\theta)$ atteint la valeur de la ténacité du matériau K_{IC} ($K_{r\theta}(\theta_0) = K_{IC}$ et $K_{r\theta}(\theta_0) = 0$).

L'avantage de ce critère est la facilité de sa mise en œuvre, basée uniquement sur la notion de facteur d'intensité de contraintes. Il peut cependant paraître discutable dans la mesure où le champ de contraintes locales en fond de fissure est seulement un champ approché [Bouchard, 2000]. De plus, l'existence d'une zone non élastique en fond de fissure modifie également la répartition de contraintes.

1.10.2 Critère de densité d'énergie minimale de déformation

Au voisinage de la pointe de fissure où l'on calcule la densité de l'énergie de déformation $w(\varepsilon) = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}$, le champ des contraintes est singulier avec les valeurs $r^{-\frac{1}{2}}$. Pour la déformation plane des modes I et II, la partie singulière du tenseur des contraintes ne dépend que des coordonnées polaires (r, θ) . [Sih, 1974] propose un critère de

densité d'énergie minimale de déformation, le critère stipule qu'au cours de la fissuration l'amorçage de la propagation se produit dans la direction radiale le long de laquelle la densité d'énergie de déformation est minimale et atteint sa valeur critique. L'énergie de déformation peut s'écrire :

$$W = \frac{S(\theta)}{r} \quad (1.72)$$

avec $S(\theta)$, la densité d'énergie de déformation s'écrivant :

$$S(\theta) = \frac{1}{\pi} (c_{11}K_I^2 + 2c_{12}K_IK_{II} + c_{22}K_{II}^2) \quad (1.73)$$

où les coefficients c_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$) sont donnés par :

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{16\mu} (1 + \cos \theta) \left[\frac{2}{3} (1 - 2\nu)^2 + 1 - \cos \theta \right] \\ c_{22} &= \frac{1}{16\mu} \left[\frac{2}{3} (1 - 2\nu)^2 (1 - \cos \theta + 4 - 3 \sin^2 \theta) \right] \\ c_{12} &= \frac{1}{16\mu} \left[2 \sin \theta \left(\cos \theta - \frac{1}{3} (1 - 2\nu)^2 \right) \right] \\ c_{33} &= \frac{1}{4\mu} \end{aligned} \quad (1.74)$$

avec μ : le module de Coulomb. Le critère de propagation s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\theta)}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial^2 S(\theta)}{\partial \theta^2} &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.75)$$

Pour $\theta = \theta_0$, la valeur critique de la densité d'énergie de déformation vaut :

$$S_{cr}(\theta_0) = \frac{(1 - 2\nu)}{4\pi\mu} K_{Ic}^2 \quad (1.76)$$

Pour le mode I pur on a $\theta_0 = 0$ et pour le mode II pur on a $\theta_0 = 79.2^\circ$.

1.11 Loi de propagation des fissures

On s'intéresse ici à la loi de propagation de Griffith qui repose sur l'hypothèse de l'absence des forces cohésives *i.e.* pour les matériaux fragiles, on introduit le concept de l'absence des forces cohésives. On prend en compte, la ténacité et la densité surfacique d'énergie de fissuration. La fissure reste irréversible, par contre la stabilité introduit l'énergie potentielle et l'énergie de fissuration pendant la phase de propagation. Cette stabilité conduit au critère de propagation qui consiste à faire une comparaison entre le taux de restitution d'énergie potentielle et le taux de création d'énergie de fissuration.

Table 1.1: Exemple des valeurs de module d'Young, de ténacité et de densité d'énergie de surface des matériaux ([Lawn, 1993]).

Matériaux	E (MPa)	K_{IC} (MPa.m ^{1/2})	G_c (J m ⁻²)
Diamant	1000	4	15
Silice	70	0.75	8
Acier	200	20-200	50-50000
Béton	30	1-1.5	30-80
Pâte de ciment	20	0.5	10

1.11.1 Critère de propagation des fissures

1.11.1.1 Ténacité du matériau - critère d'Irwin

La description de propagation de fissure en mécanique de la rupture est l'œuvre d'Irwin. Ce dernier, courant les années (1957), a étudié la propagation de la fissure au point singulier du front de la fissure. Au cours de cette même décennie, [Muskhelishvili, 1963] dans [Marigo, 2010] introduit les solutions analytiques en 2D basées sur la théorie des potentiels complexes, [Irwin, 1957] introduit la loi d'évolution des fissures basée sur les facteurs d'intensités des contraintes. Ce dernier introduit la notion de ténacité d'un matériau isotrope en postulant qu'il existe une valeur critique K_{Ic} du facteur d'intensité des contraintes K_I en mode I en deçà de laquelle la fissure ne peut pas se propager. [Marigo, 2010] affirme que la ténacité K_{Ic} est une caractéristique du matériau, indépendante de la géométrie, du comportement et du chargement de la structure. La loi reste insuffisante puisqu'il ne prend en compte que le cas des matériaux isotropes de plus elle est facile d'application que pour le mode I d'ouverture de fissures. On élasticité plane, la loi d'Irwin s'écrit :

$$K_I \leq K_{Ic}, \quad \begin{cases} si & K_I \leq K_{Ic} & \text{pas de propagation} \\ si & K_I = K_{Ic} & \text{propagation possible} \end{cases} \quad (1.77)$$

Dans le cas de chargement en mode II pur *i.e.*, $K_I = 0$, la loi considère que la fissure ne se propage pas quelque soit l'intensité du chargement. Dans le tableau ci-dessous, on trouvera les ordres de grandeurs de ténacité, les modules d'Young et les densités d'énergie de surface pour différents matériaux.

1.11.1.2 Énergie de fissuration : Hypothèse de Griffith

L'énergie potentielle représente l'énergie emmagasinée par la structure essentiellement sous forme élastique, en réponse aux différentes sollicitations. Cette énergie n'est toujours pas permanente puisqu'elle disparaît dès qu'on relâche les efforts. Par contre l'énergie de fissuration est liée à l'hypothèse faite sur la cohésion ou la non cohésion des fissures. Pour les différenciées, [Marigo, 2010] précise que l'énergie potentielle est globale, dépende à la

fois de la géométrie du chargement et du comportement et l'énergie de fissuration reste locale donc possible de la mesurer. Dans le cadre de la théorie de Griffith, l'énergie de fissuration d'une structure dans un état de fissuration Γ s'écrit :

$$D(\Gamma) = \int_{\Gamma} G_C(\underline{x}, \underline{n}(\underline{x})) dS \quad (1.78)$$

G_C étant la densité surfacique d'énergie de fissuration effective. La formule d'Irwan qui relie K_{IC} à G_C en mode I d'ouverture des fissures et en déformations planes :

$$G_C = \frac{1 - \nu^2}{E} K_{IC}^2 \quad (1.79)$$

1.11.1.3 Loi de propagation de Griffith

Soit $P(t, l_f)$, l'énergie potentielle de la structure à l'équilibre à l'instant t dans un état de fissuration (réel ou virtuel) Γ dépend à la fois de t et de Γ . Le paramètre temps t sert à décrire le trajet de chargement et l'évolution de l'état du milieu considéré. Sous le chargement, la fissuration va évoluer, l'état de fissuration réel à l'instant t est noté $\Gamma(t)$. Si on se donne l'état de fissuration initial Γ_0 , le trajet de chargement et l'état de fissuration seront décrit par la loi qui régit $t \mapsto \Gamma(t)$.

1.11.1.4 Critère de stabilité de Griffith

Critère énergétique qui consiste à comparer le taux de restitution d'énergie potentielle $P(t, l_f)$ au taux de création d'énergie de fissuration. La fissure évolue tant que la structure continue à emmagasiner l'énergie potentielle pour créer de nouvelles surfaces fissurées *i.e* si $G > G_C$. Si $G \leq G_C$, la structure fissurée ne peut être d'équilibre stable. Pour une fissuration ne dépendant que d'un seul paramètre l_f est décrit par des expressions ci-dessous. Connaissant l'état initial $l_f(0) = l_{f0}$, en considérant que l'énergie potentiel est une fonction dérivable de la longueur de la fissure l_f , le problème décrivant l'évolution de cette longueur en fonction du temps t revient à écrire suivant la loi de Griffith. Trouver $t \mapsto l_f(t)$ pour $t > 0$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{\partial l_f}{\partial t}(t) \geq 0 & \forall t \\ -\frac{\partial P}{\partial l_f}(t, l_f(t)) \leq \frac{dD}{dl_f}(l_f(t)) & \forall t \end{cases} \quad (1.80)$$

L'énergie potentielle est fonction de variable $P(t, l_f(t))$ et l'énergie de fissuration est fonction de la variable $D(l_f)$. Le bilan énergétique conduit à écrire :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial l_f}(t, l_f(t)) + \frac{dD}{dl_f}(l_f(t)) \right] \frac{\partial l_f}{\partial t}(t) = 0 \quad \forall t \quad (1.81)$$

Pendant l'évolution de la fissure, la structure restitue de l'énergie potentielle et crée l'énergie de fissuration. On suppose que l'évolution de la fissuration est continue en temps. On doit avoir $G = G_c$ lorsque la fissure se propage.

1.11.1.5 Fissuration dépendant de n paramètres

Cette situation se rencontre en $2D$ dans le cas où il y a n pointes de fissures susceptibles de se propager suivant un trajet prédéfini. Ce cas peut aussi se rencontrer en $3D$ si l'on restreint la forme de la fissure en supposant par exemple qu'elle est elliptique en prenant la longueur des deux axes pour paramètres. Soit $\underline{l}_f = (l_{f1}, \dots, l_{fn})$ les n paramètres, l'énergie potentielle est une fonction $P(t, l_f)$ et l'énergie de fissuration est la fonction $D(\underline{l}_f)$. La condition d'irréversibilité se traduit par :

$$\frac{\partial l_{fi}}{\partial t}(t) \geq 0 \quad \forall i \quad (1.82)$$

Le taux de restitution d'énergie par :

$$G = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial P}{\partial l_{fi}}(t, \underline{l}_f(t)) v_i \quad (1.83)$$

Le taux de création d'énergie par :

$$\delta D = \sum \frac{\partial D}{\partial l_{fi}}(\underline{l}_f(t)) v_i \quad (1.84)$$

Le critère de stabilité revient à écrire $G \leq \delta D$ ce qui s'écrit :

$$- \frac{\partial P}{\partial l_{fi}}(t, \underline{l}_f(t)) \leq \frac{\partial D}{\partial l_{fi}}(\underline{l}_f(t)) \quad \forall i \quad (1.85)$$

En tenant compte de l'irréversibilité et du critère de stabilité, le bilan d'énergie :

$$\left[\frac{\partial P}{\partial l_{fi}}(t, \underline{l}_f(t)) + \frac{\partial D}{\partial l_{fi}}(\underline{l}_f(t)) \right] \frac{\partial l_{fi}}{\partial t}(t) = 0 \quad \forall i \quad (1.86)$$

1.12 Exemple d'application analytique : Essai Double Cantilever Beam (DCB)

Pour illustrer le modèle théorique présenté dans la partie précédente, nous allons voir comment résoudre analytiquement le problème de propagation de fissure suivant la loi de Griffith à partir d'un essai Double Cantilever Beam (DCB). Rappelons que dans la théorie de Griffith, la propagation des fissures est régie : par le principe d'irréversibilité en sachant que la fissure ne peut que croître, par le principe de stabilité, en sachant que la fissure se propagera s'il existe une direction de propagation suivant laquelle la restitution d'énergie potentielle sera suffisante pour fournir l'énergie de fissuration correspondante, et en fin par un bilan d'énergie en sachant que lors de la propagation la restitution d'énergie potentielle est égale à la création d'énergie de surface.

La démarche de cet exemple d'application consiste à traiter le cas simple de propagation de fissure suivant la loi de Griffith. La principale difficulté dans la mise en œuvre de la loi de Griffith réside dans le calcul de l'énergie potentielle en fonction du paramètre de fissuration l_f . En général, ce calcul n'est pas exact. Vu la complexité du problème, on fait recours à des approximations des calculs numériques et des hypothèses simplificatrices sur la forme des champs de contraintes.

L'essai consiste à écarter progressivement les lèvres de fissure pré-usinée dans une poutre. On pilote en déplacement contrôlé, *i.e.* au delà d'un certain seuil du déplacement contrôlé, la fissure se propage.

1.12.0.6 Position du problème

Géométrie.

Considérons une poutre Ω de section rectangulaire, de longueur L , d'épaisseur d et de demi-hauteur h . On note l_f la longueur de la fissure mesurée en fonction du paramètre de contrôle, x la coordonnée longitudinale liée au front de la fissure. L'origine de la fissure étant prise à l'extrémité gauche de la poutre (voir figure).

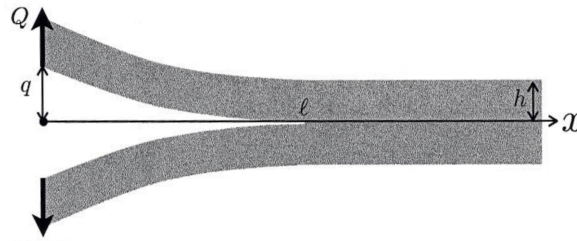


Figure 1.13: Fissure pré-usinée dans une poutre (essai, Double Cantilever Beam DCB)

On désigne par $Q \in L^2(\Omega)$, la force extérieure exercée à l'extrémité gauche de la poutre.

Energie de surface de la poutre.

Au point $0 \leq x \leq l_f$ de la poutre, le moment fléchissant $M_f(x)$ sur une branche supérieure est égale à $M_f(x) = Q \times x$. L'énergie élastique dans chacune des deux branches déformées est l'énergie de flexion de la forme :

$$W_f = \int_0^{l_f} \frac{M_f^2(x)}{2EI} dx = \frac{Q^2 l_f^3}{6EI} \quad (1.87)$$

E , le module d'Young et $I = \frac{h^3 d}{12}$, l'inertie de la demie-section de la poutre. Dans la partie non fissurée de la poutre, l'énergie de flexion est négligeable $W_f = 0$. La déflexion

ou déplacement transversal q de l'extrémité gauche de la branche supérieure de la poutre est reliée à la force Q par l'expression :

$$Q = 3EI \int_0^{l_f} \frac{q}{l_f} dx = \frac{Eh^3 e}{4l_f^2} dx \quad (1.88)$$

1.12.1 Déplacement contrôlé

Le déplacement transversal q est pris comme un paramètre de chargement croissant. L'énergie potentielle est égale à l'énergie élastique. Pour les deux branches de la poutre on a : pour $q = t$,

$$P(t, l_f) = Eh^3 \frac{dt^2}{4l_f^2} \quad (1.89)$$

Le taux de restitution de l'énergie potentielle :

$$G(t, l_f) = -3EI \frac{1}{d} \frac{\partial P}{\partial l_f}(t, l_f) = \frac{3Eh^3 t^2}{4l_f^4} \quad (1.90)$$

L'énergie de fissuration $D(l_f) = G_c dl_f$, la loi de Griffith devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial l_f}{\partial t}(t) \geq 0 & \text{irréversibilité,} \\ 4G_C l_f^4(t) \geq 3Eh^3 t^2 & \text{stabilité} \\ [4G_C l_f^4(t) - 3Eh^3 t^2] \frac{\partial l_f}{\partial t}(t) = 0 & \text{bilan d'énergie} \end{cases} \quad (1.91)$$

avec la condition initiale $l_f(0) = l_{f0} > 0$, la solution q_c du problème est de la forme :

$$q_c = \sqrt{\frac{4G_C l_{f0}^4}{3Eh^3}} \quad (1.92)$$

Pour $t < q_c$, on a par rapport à la condition de l'irréversibilité : $4G_C l_f^4(t) \geq 4G_C l_{f0}^4 = 3Eh^3 q_c^2 > 3Eh^3 t^2$. Pour $l_f(t) = l_{f0}$, pour $t \in [0; q_c]$, le critère de stabilité est vérifié. La solution est telle que $t > q_c$

$$l_f(t) = l_{f0} \sqrt{\frac{t}{q_c}} \quad (1.93)$$

1.12.2 Force contrôlée

La force Q est supposée comme un paramètre croissant depuis 0 *i.e.* $Q = t$. Les énergies sont :

$$P(t, l_f) = -\frac{4t^2 l_f^3}{Eh^3 d}, \quad G(t, l_f) = -\frac{1}{d} \frac{\partial P}{\partial l_f}(t, l_f) = \frac{12t^2 l_f^2}{Eh^3 d^2} \quad (1.94)$$

La loi de Griffith devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial l_f}{\partial t}(t) \geq 0 & \text{irréversibilité} \\ 12t^2 l_f^2(t) \leq G_c E h^3 d^2 & \text{stabilité} \\ [12t^2 l_f^2(t) - G_c E h^3 d^2] \frac{\partial l_f}{\partial t}(t) = 0 & \text{bilan d'énergie} \end{cases} \quad (1.95)$$

soit

$$Q_c = \sqrt{\frac{G_c E h^3 d^2}{12 l_{f0}^2}} \quad (1.96)$$

Si $t < Q_c$, la fissure ne se propage pas, cette solution est la seule pour t assez petit, on à condition de $12t^2 l_f^2(t) < G_c E h^3 d^2$ donc $\frac{\partial l_f}{\partial t}(t) = 0$. Si $t > Q_c$, il n'existe plus de solution à la loi d'évolution de Griffith. D'après la condition d'irréversibilité on à $l_f(t) \geq l_{f0}$, on a $12t^2 l_f^2(t) > G_c E h^3 d^2$ qui ne satisfait plus le critère de stabilité.

Sous la force contrôlée, la fissure ne se propage pas tant que la force reste inférieure à la valeur critique Q_c , et se propage de façon instable au delà. Avec Q_c la charge maximale que peut supporter la poutre DCB.

$$Q = \begin{cases} Q_c \frac{q}{q_c} & \text{si } q \leq q_c \\ Q_c \sqrt{\frac{q_c}{q}} & \text{si } q > q_c \end{cases} \quad (1.97)$$

1.13 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter les différents modèles utilisant les forces cohésives. La modélisation essentielle dans l'établissement de cette bibliographie est de disposer d'une représentation du modèle de Dugdale que nous utilisons par la suite dans cette étude. Au vu de cet examen bibliographique, les problèmes à résoudre sont nombreux à savoir le saut de déplacement, la singularité en pointe de fissure, la présence des forces cohésives, la création et la propagation de la fissure... Les résultats de l'étude bibliographique montre pour plusieurs auteurs que la présence des forces cohésives dans un processus de fissuration est souvent modélisée par la loi de Griffith ou de Dugdale-Barenblatt. Le modèle de Griffith reste insuffisant puisqu'il est formulé en terme énergétiquement (hypothèses fondamentales de la densité d'énergie de surface) et ne prend pas en compte. Pour la modélisation de la rupture avec forces cohésives, c'est plutôt le modèle de Dugdale qui sera prise en compte. Ce modèle à l'avantage de calculer dans un matériau élastoplastique, la distribution des contraintes en fond de fissure, la taille de la zone plastique et l'écartement en pointe de la fissure. On suppose dans ce modèle qu'à la pointe de la fissure sur une longueur L_{zc} des forces de cohésions agissent pour s'opposer aux efforts extérieurs.

Chapitre 2

Études analytiques : Présentation du problème de référence

Après quelques rappels historiques sur le comportement macroscopique des matériaux, le chapitre II aborde les grandes lignes du problème de référence selon les travaux de [Ferdjani et al., 2007]. On présente l'étude analytique d'une plaque carrée $\Omega_P = (-L, L) \times (-L, L)$ avec une cavité circulaire au centre. Le modèle est formulée énergétiquement par des hypothèses fondamentales de la densité d'énergie de surface ou de Griffith. L'étude est subdivisée en trois phase : la phase élastique, la phase de rupture cohésive et la phase au delà du seuil de rupture. Dans la phase de rupture, il y a la présence des forces cohésives, la résolution est basée sur le modèle de Dugdale.

Sommaire

2.1	Introduction	41
2.2	Notions fondamentales de la mécanique de rupture : Comportement macroscopiques des matériaux	41
2.3	La fissuration et la rupture des structures	42
2.4	Présentation générale du problème de référence	44
2.5	Études analytiques	44
2.5.1	Les différentes phases de résolution du problème analytique : Rappels	44
2.5.2	Étude analytique de la phases élastique $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_e$	45

2.5.3	Étude analytique de la phase de rupture cohésive $\sigma_c < \sigma_\infty < \sigma_r$. .	46
2.5.4	Analyse au delà du seuil de rupture	49
2.5.5	Les paramètres de modélisation prisent en compte	51
2.6	Définition et calcul du taux de l'énergie libérée aux points G_λ	
	et G_l	51
2.6.1	Calcul de l'énergie totale libérée au point G_λ	52
2.6.2	Calcul de l'énergie totale libérée au point G_l	52
2.7	Conclusion	53

2.1 Introduction

Depuis des décennies, la mécanique de la rupture connaît un grand nombre de succès scientifiques, avec notamment l'apparition de la mécanique linéaire de rupture qui a permis de mieux prendre en compte le comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés ; on peut citer par exemple [Bui, 1978], [Rice, 1968] qui introduisent la notion d'intégrales indépendantes de contour telles que l'intégrale J , dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de la fissure. Les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité, et des champs asymptotiques en pointes de fissures nécessaires à l'analyse et à l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution précise à des nombreux problèmes de géométries simples et peuvent donc être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes complexes.

Le domaine d'application de cette théorie ne se limite pas aux structures métalliques, elle s'applique également aux bétons, aux céramiques et aux polymères. Les échelles d'applications sont également très diverses puisqu'elles vont des microstructures à la géomécanique des l'écorce terrestre.

2.2 Notions fondamentales de la mécanique de rupture : Comportement macroscopiques des matériaux

Tous les matériaux contiennent des défauts. Certains de ces défauts perturbent le champ de contraintes et créent des concentrations des contraintes qui favorisent la formation des fissures. Les matériaux fragiles sont particulièrement sensibles à la présence des défauts.

Du point de vue macroscopique, le comportement d'un matériau est souvent identifié en réalisant les essais uni-axiaux sur les éprouvettes, *i.e.* on réalise sur une éprouvette cylindrique par exemple, les essais de traction ou de compression suivant une direction donnée ($\underline{e}_1$ par exemple). Pour une éprouvette cylindrique le tenseur de contraintes s'écrit sous la forme $\underline{\underline{\sigma}} = \sigma \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$. Ce tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$ n'est pas uni-axial et ε_{11} est la composante suivant la direction principale $\underline{e}_1$.

Pour un composite constitué d'une matrice polymère renforcée par des fibres de carbone dans une direction, la rupture est caractérisée par la décohésion des fibres. Par contre pour un béton sollicité en compression, la rupture se traduit par l'apparition de fissures longitudinales comme le montre la figure ci-dessous. La mécanique de la rupture est donc l'étude des fissures macroscopiques, elle permet de déterminer les champs de contraintes et de déformations et aussi d'exprimer les conditions de propagations des fissures.

La mécanique linéaire de la rupture par fissuration est fondée sur une analyse élastique du champ des contraintes en petites déformations. L'analyse des contraintes et des déformations

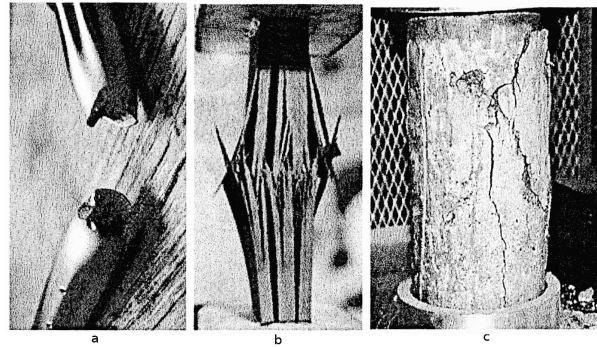


Figure 2.1: Différentes éprouvettes à l'état final après essai uni-axial :
 (a) Rupture par striction d'une éprouvette métallique ; (b) Rupture par
 décohesion des fibres d'un composite à fibres de carbone ; (c) Rupture
 par fissuration longitudinale d'une éprouvette de béton comprimée

au voisinage des pointes de fissures constitue une base nécessaire pour étudier le comportement des fissures.

2.3 La fissuration et la rupture des structures

La fissuration est un défaut qui touche tous les matériaux et toutes les structures à toutes les échelles de temps et de l'espace. Elle touche aussi les structures en service conduisant parfois à des ruptures brutales sans préavis. Le phénomène est difficile à éviter, mais possible à contrôler ([Marigo, 2010]), aux moyens des essais *insitu* et aux moyens des outils informatique, en développant des modèles de plus en plus sophistiqués qui permettent de faire des simulations numériques plus précises. Domaine de recherche de la Mécanique des Solides, il est plus orienté dans la branche de Mécanique de Rupture. Parmi les figures ci-dessous, nous présentons quelques exemples de rupture brutale ou fragile :

Le Schenectady, faisant partie des cargos, appelés Liberty ships, construit durant la seconde guerre mondiale et dont 200 sur 5000 ont subi des dommages importants sous l'effet de la température plus froide de l'eau de la mer du nord. La baisse de température a favorisé la ténacité du métal qui est passée de l'état ductile à l'état fragile. A cet effet, les conséquences liées aux cargos de la liberty ships ont fait naître une importante découverte sur la notion de la température de transition fragile-ductile grâce aux travaux d'Irwin.

Le pont suspendu de Sully-sur-Loire (France 1985) est un exemple de rupture brutale d'une structure en acier, pour une baisse de température jusqu'à environ -20°C qui fragilise les aciers au niveau des suspentes et qui provoque une chute de ténacité et plus récemment, en octobre 2003 sur la ligne D du RER, une autre rupture fragile due aux conditions climatiques. La baisse de température, a poussé le rail de se contracter (un phénomène de couplage thermo-mécanique caractérisé par le coefficient de dilatation empêché par la

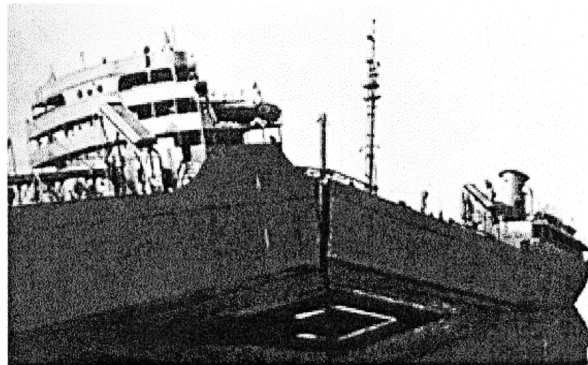


Figure 2.2: Le Schenectady, un cargo des liberty ships de la seconde guerre mondiale en structure métallique, rompus brutalement sous l'effet de gel

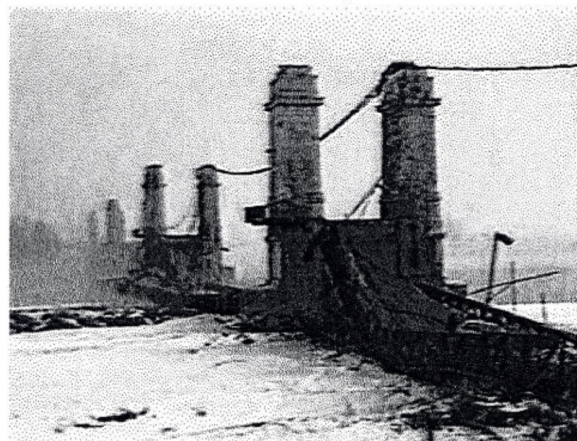


Figure 2.3: Rupture brutale du pont de Sully-sur-Loire, 16 janvier 1985

flexion du rail sur le ballast).

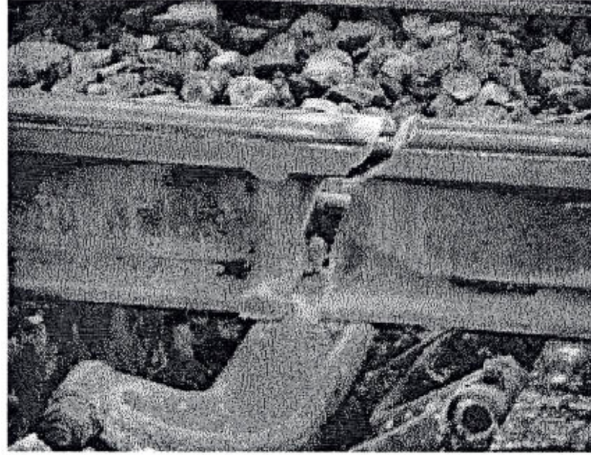


Figure 2.4: Rupture fragile d'un rail sur la ligne D du RER, Octobre 2003

Le rail a engendré des contraintes thermiques de traction proportionnelles à la baisse de température, et comme ce dernier possède de plus un petit défaut, cela a suffi pour provoquer la rupture brutale du rail. Les géo-matériaux comme le béton qui supportent mal les contraintes de traction sont également concernés par la fissuration.

2.4 Présentation générale du problème de référence

2.5 Études analytiques

Une plaque carrée $\Omega_P = (-L, +L)^2$ a été choisie et étudiée analytiquement par [Ferdjani *et al.*, 2007]. L'étude a été effectuée en plusieurs phases après application de la charge statique σ_∞ à l'infinie. À l'état d'équilibre, le solide est décrit par la phase élastique. Après application de la charge, la plaque fissure. On parle alors de la phase de rupture et de propagation de la fissure. Le modèle analytique que nous étudions numériquement est donc constitué des équations de la phase élastique, de la phase de rupture et de la phase de rupture cohésive. La plaque de référence possède un défaut $\mathbb{D} = \{(x, y); x^2 + y^2 < \mathbb{R}^2\}$ supposé symétrique suivant les axes $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ et l'effort appliqué est maximal aux points $(\pm d, 0)$ de la frontière du défaut.

2.5.1 Les différentes phases de résolution du problème analytique : Rappels

Rappelons les ingrédients principaux du modèle analytique. Ce modèle, formulé en termes énergétiques est basé sur l'hypothèse fondamentale que la densité d'énergie surfacique $\phi([u_n])$ de fissure dépend d'une façon non trivial au saut de déplacement à la

différence du modèle de [Griffith, 1920] dans lequel on assure que la densité $\phi(\llbracket u_n \rrbracket)$ est constante. Ainsi dans le modèle de [Dugdale, 1960a], en supposant que l'ouverture de la fissure est en mode I, *i.e.* le déplacement normale est discontinu. La densité $\phi(\llbracket u_n \rrbracket)$ d'énergie en fonction de déplacement est donnée par l'expression :

$$\phi(\llbracket u_n \rrbracket) = \begin{cases} \frac{G_c}{l_c} \llbracket u_n \rrbracket & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket \leq l_c \\ G_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket \geq l_c \end{cases} \quad (2.1)$$

où $\llbracket u_n \rrbracket$, dénote le saut de déplacement, G_c le taux de l'énergie critique restituée venant de la théorie de [Griffith, 1920] et l_c la longueur interne caractéristique des modèles des forces cohésives. Le rapport $\frac{G_c}{l_c}$ décrit la contrainte de cohésion sous la forme :

$$\sigma_c = \frac{G_c}{l_c} \quad (2.2)$$

En terme de force cohésives, l'effort normal σ_{nn} se trouvant à l'interaction entre les lèvres de la fissure sera égale à $\llbracket u_n \rrbracket \leq l_c$ et disparaît dès que $\llbracket u_n \rrbracket \geq l_c$. Par conséquent, les lèvres de la fissure sont divisée en deux zones : une zone cohésive dans laquelle les forces cohésives sont égale à σ_c et une zone non cohésive ou il y a aucune force cohésive.

Trois phases décrie ce modèle : la phase élastique, la phase de rupture cohésive et la phase au delà du seuil de rupture.

2.5.2 Étude analytique de la phases élastique $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_e$

État supposé élastique, le corps $\Omega_P = (-L, +L)^2$ ([Ferdjani *et al.*, 2007]) à l'état d'équilibre est relia par des équations :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \sigma_{ij} &= 0 \quad \text{dans } \Omega_P / \mathbb{D} \\ \sigma_{ij} &= A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \quad \text{dans } \Omega_P / \mathbb{D} \\ \sigma_{ij} n_j &= 0 \quad \text{sur } \partial \Omega_P \\ \sigma_{ij} e_1 &= 0 \quad \text{sur } \{\pm L\} \times (-L, +L) \\ \sigma_{ij} e_2 &= \sigma_\infty e_2 \quad \text{sur } (-L, +L) \times \{\pm L\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

avec $\varepsilon_{ij}(u)$, le tenseur de déformation linéaire, n_j la normale extérieure du corps $\Omega_P / \mathbb{D}$ et e_2 un vecteur de base. Le défaut est supposé symétrique pour les axes $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ et l'effort est maximal aux points d'intersection $(\pm d, 0)$ de la frontière du défaut. Par symétrie, on a les contraintes en x sous la forme :

$$\sup_{x \in \Omega_P / \mathbb{D}} \max\{\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x)\} = \sigma_{22}(\pm d, 0) \quad (2.4)$$

où $\{\sigma_i(x)\}_{1 \leq i \leq 3}$: sont des contraintes principale en x

$$\sigma_c = \sup\{\sigma_\infty : \sigma_{22}(\pm d, 0) \leq \sigma_c\} \quad (2.5)$$

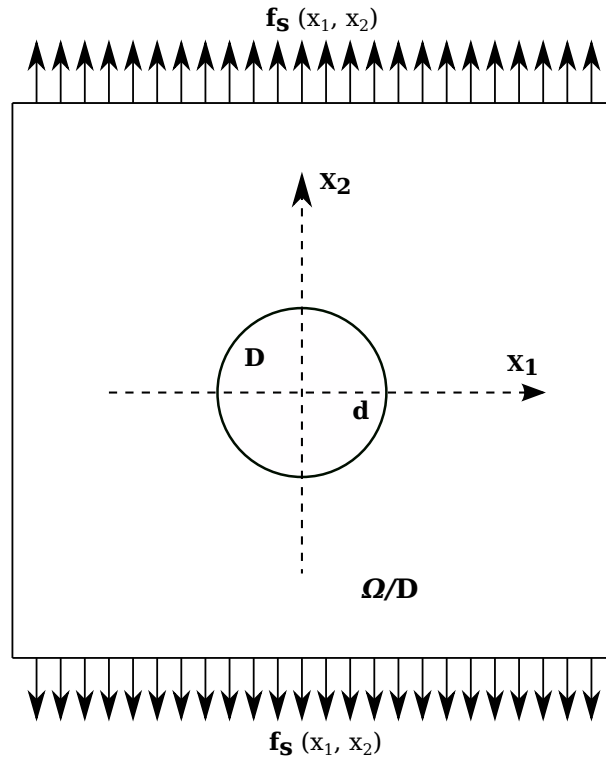


Figure 2.5: Géométrie et chargement de $\Omega_P/\mathbb{D}$ à l'état initial

Cette phase élastique s'arrête lorsque l'effort maximal de traction dans le corps $\Omega_P/\mathbb{D}$ atteint la valeur critique σ_c , correspondant au début d'une fissure dans le modèle de Dugdale-Barenblatt.

2.5.3 Étude analytique de la phase de rupture cohésive $\sigma_c < \sigma_\infty < \sigma_r$

Dans le cas où $\sigma_\infty \geq \sigma_r$, la réponse n'est plus élastique, la rupture apparaît de telle sorte que la traction maximale dans le corps fissuré reste plus petite que la valeur critique σ_c . Pour des raisons de symétrie, la fissure apparaît aux points $(\pm d, 0)$ où il y a des fortes concentrations des contraintes. La propagation de la fissure est symétrique le long de l'axe $x_2 = 0$, aux niveaux des points $(\pm d, 0)$.

$$\Omega_c^0 = \Omega_P/(\mathbb{D} \cup \Gamma); \quad \Gamma = (-L, -d] \times \{0\} \cup [+d, +l) \times \{0\} \quad (2.6)$$

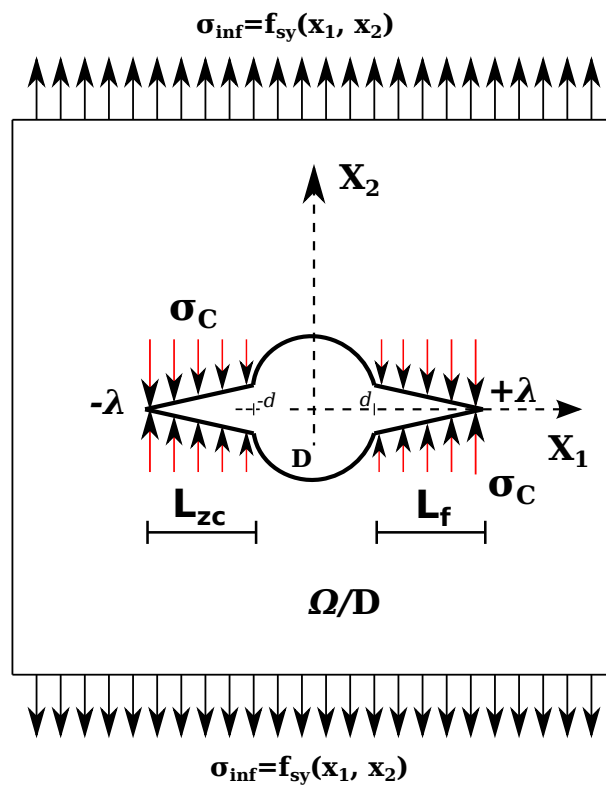


Figure 2.6: Le corps Ω_c^0 pendant la phase de rupture cohésive

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \sigma_{ij} &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_P / (\mathbb{D} \cup \Gamma) \\
\sigma_{ij} &= A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \quad \text{dand} \quad \Omega_P / (\mathbb{D} \cup \Gamma) \\
\sigma_{ij} n_j &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_P \\
\sigma_{ij} e_1 &= 0 \quad \text{sur} \quad \{\pm L\} \times (-L, +L) \\
\sigma_{ij} e_2 &= \sigma_\infty e_2 \quad \text{sur} \quad (-L, +L) \times \{\pm L\} \\
\sigma_{ij} e_2 &= \sigma_c e_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Le problème (Équations (2.7)) admet une solution unique pour le couple (σ_∞, l) . u est solution unique de déplacement en bout de la fissure. La loi gouvernant l'évolution de la fissure en bout en tenant compte du chargement est d'écrit par l'énergie totale à l'équilibre du corps fissuré en fonction de la charge σ_∞ et de la longueur l_f en bout de la fissure. L'énergie totale de surface due aux forces cohésives s'écrit :

$$\varepsilon_s(\sigma_\infty, l_f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_P / (\mathbb{D} \cup \Gamma)} A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(u) dx + \int_{\Gamma} \sigma_c \llbracket u_2 \rrbracket dx_1 - \int_{\partial \Omega_P} \sigma_\infty u_2 n_2 ds \tag{2.8}$$

On cherche l'énergie minimale locale dans l'intervalle ouvert $]d, l[$ où l est supposé être un point stationnaire de la déformation $\varepsilon_s(\sigma_\infty, \cdot)$ et satisfaisant l'équation :

$$-\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial l}(\sigma_\infty, l) = 0 \tag{2.9}$$

Le taux d'énergie restituée dû à la croissance de la fissure doit être nulle.

$$u(x) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} u(\theta) + \bar{u}(x) \tag{2.10}$$

avec $u(\theta) = (3 - 4\nu - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2$, (r, θ) dénote les coordonnées polaire et $\bar{u}(x)$ est le champ de déplacement singulier correspondant au mode I.

$$-\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial l_f}(\sigma_\infty, l_f) = 2 \frac{1 - \nu^2}{E} K_I^2 \tag{2.11}$$

Le seuil de rupture est défini par :

$$\sigma_r = \{\sigma_\infty > \sigma_c : l_f(\sigma_\infty) < L \quad \text{et} \quad \llbracket u_2 \rrbracket(d) < l_c\} \tag{2.12}$$

Si $l = L$, on peut déduire de l'équation d'équilibre et des condition aux limites que la charge doit être égale à $(1 - \frac{d}{L})\sigma_c$. Ce qui donne une limite supérieure de seuil de fissure par l'expression :

$$\sigma_r \leq (1 - \frac{d}{L})\sigma_c \tag{2.13}$$

2.5.4 Analyse au delà du seuil de rupture

On se trouve dans le cas où la charge augmente au delà du seuil de rupture σ_r . Dans ce cas, les auteurs considèrent deux parties : une partie décrivant l'initiation de la fissure Γ_0 et une autre pour la propagation de la partie non cohésive Γ_c des lèvres de la fissure. On dénote, λ et l les bouts respectives du corps fissuré Ω_c^0 :

$$\begin{aligned}\Omega_c^0 &= \Omega_P / (\mathbb{D} \cup \Gamma), \quad \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_c \\ \Gamma_0 &= (-\lambda, -d] \times \{0\} \cup [d, \lambda) \times \{0\} \\ \Gamma_c &= (-l, -\lambda) \times \{0\} \cup [\lambda, l) \times \{0\}\end{aligned}\tag{2.14}$$

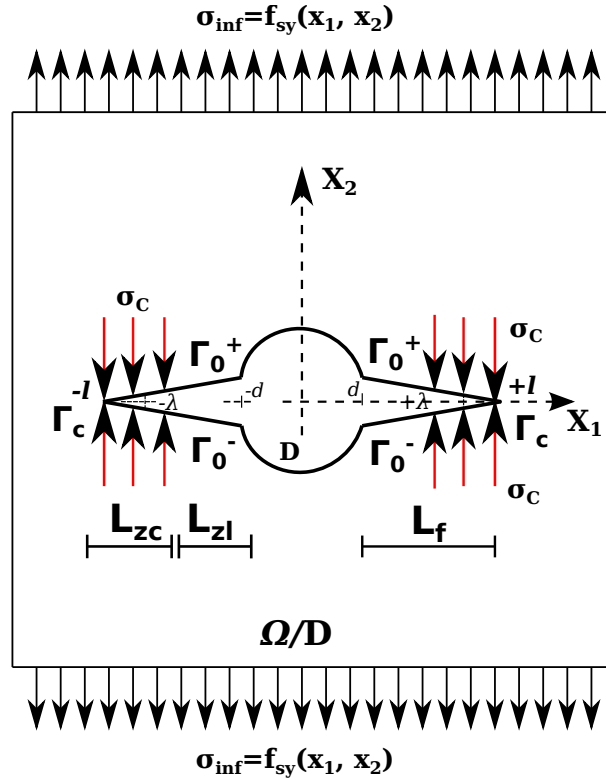


Figure 2.7: Géométrie et chargement du corps Ω_c^0 . Ligne de fissure séparée en partie cohésive Γ_c et non cohésive Γ_0

Le champ de déplacement u et des contraintes σ doivent satisfaire l'ensemble des équations suivantes :

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \sigma_{ij} &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_c^0 \\
\sigma_{ij} &= A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \quad \text{dans} \quad \Omega_c^0 \\
\sigma_{ij} n_j &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_P \cup \Gamma_0 \\
\sigma_{ij} e_1 &= 0 \quad \text{sur} \quad \{\pm L\} \times (-L, +L) \\
\sigma_{ij} e_2 &= \sigma_\infty e_2 \quad \text{sur} \quad (-L, +L) \times \{\pm L\} \\
\sigma_{ij} e_2 &= \sigma_c e_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma_c
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Pour un ensemble des paramètres $\sigma_\infty, \lambda, l$ donnés, tels que $d \leq \lambda \leq l < L$, le problème linéaire élastostatique admet une solution unique u . Le cas $d = \lambda$ correspond à la phase élastique et le cas $d = \lambda < l$ correspond à la phase cohésive. Le champ des contraintes satisfait l'équation variationnelle suivante (Théorème des Travaux Virtuels, voir [Gurtin, 1981]), pour tout champ de vecteur v sur le corps fissuré Ω_c^0 .

$$\int_{\Omega_c^0} A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(v) \cdot \varepsilon_{ij}(v) dx - \int_{\partial \Omega_P} \sigma_\infty v_2 n_2 ds + \int_{\Gamma_c} \sigma_c \llbracket v_2 \rrbracket dx_1 = 0 \tag{2.16}$$

L'énergie de surface du corps à l'équilibre est donnée par l'expression :

$$\varepsilon_s(\sigma_\infty, \lambda, l_f) = \int_{\Gamma} \phi(\llbracket u_2 \rrbracket) dx_1 = \int_{\Gamma_c} \sigma_c \llbracket u_2 \rrbracket dx_1 + 2G_c(\lambda - d) \tag{2.17}$$

Le coefficient 2 désigne la présence de deux bouts de fissures. L'énergie totale du corps à l'équilibre devient :

$$\varepsilon_{sT}(\sigma_\infty, \lambda, l_f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c^0} A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij}(u) dx - \int_{\partial \Omega_P} \sigma_\infty u_2 n_2 ds + \int_{\Gamma_c} \sigma_c \llbracket u_2 \rrbracket dx_1 + 2G_c(\lambda - d) \tag{2.18}$$

A fin d'obtenir le minimum local d'énergie aux points λ et l , on minimise l'énergie totale de déformation $\varepsilon_{sT}(\sigma_\infty, \lambda, l)$ par dérivation on ces points sous la forme :

$$-\frac{\partial \varepsilon_{sT}}{\partial l_f}(\sigma_\infty, l_f, \lambda) = 0 \quad ; \quad -\frac{\partial \varepsilon_{sT}}{\partial \lambda}(\sigma_\infty, l_f, \lambda) = 0 \tag{2.19}$$

Le champ de déplacement est singulier aux bouts $x_1 = \pm l$, la forme de singularité et celle définie à l'équation (1.10). Pour les points $x_1 = \pm \lambda$, le champ de déplacements est discontinu, la contrainte normale se déplace de σ_c à 0. Le taux d'énergie totale restituée dû à la propagation de ces bouts est de la forme :

$$-\frac{\partial \varepsilon_{sT}}{\partial \lambda}(\sigma_\infty, \lambda, l_f) = 2\sigma_c \llbracket u_2 \rrbracket(\lambda) - 2G_c \tag{2.20}$$

Le critère de propagation $-\frac{\partial \varepsilon_{sT}}{\partial \lambda}(\sigma_\infty, l_f, \lambda) = 0$, est équivalent au critère d'ouverture $\llbracket u_2 \rrbracket(\lambda) = l_c$, finalement, les équations (Équations (2.19)) sont identiques à

$$K_I = 0 \quad ; \quad \llbracket u_2 \rrbracket(\lambda) = l_c \quad (2.21)$$

L'objectif est ici d'étudier la dépendance de σ_r du rapport entre la taille du défaut et la longueur critique $\frac{d}{l_c}$.

2.5.5 Les paramètres de modélisation prisent en compte

Les paramètres décrivons le défaut sont des fonctions sans dimensions, ils sont listés tels que : $e, d, L, E, \nu, \sigma_c, l_f, \lambda$. La forme de défaut est décrit par le paramètre e . D'autre paramètres sont :

$$\eta = \frac{d}{l_c}, \quad \lambda_c = \frac{\pi}{8(1-\nu^2)} \frac{E}{\sigma_c} l_c, \quad \delta = \frac{d}{\lambda_c} \quad (2.22)$$

$$\sigma(x) = S(e, \eta, \nu, \frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}, \frac{l}{d}, \frac{x}{d}) \sigma_c \quad (2.23)$$

La charge élastique dans cette :

$$\sigma_r = S_r(\sigma, \eta, \nu,) \sigma_c \quad (2.24)$$

Le champ de déplacement u s'écrit comme suite :

$$u(x) = u(e, \eta, \nu, \frac{\sigma_\infty}{\sigma_c}, \frac{l}{d}, \frac{x}{d}) \frac{\sigma_c}{E} d \quad (2.25)$$

2.6 Définition et calcul du taux de l'énergie libérée aux points G_λ et G_l

Soit Ω_c^0 le corps fissuré dans lequel la fissure Γ est subdivisée en deux parties : la partie cohésive Γ_c et la partie non cohésive Γ_0 . Les lèvres de la fissure sont soumises aux contraintes cohésives σ_c suivant la normale. A l'équilibre sous chargement externe σ_∞ , le champ de déplacement u dépend de σ_∞, λ et l . L'énergie totale du corps est donnée par l'expression :

$$\varepsilon_{s_T}(\sigma_\infty, \lambda, l_f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_c^0} A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \varepsilon_{kl}(u) dx + \int_{\Gamma_c} \sigma_c \llbracket u_2 \rrbracket dx_1 - \int_{\partial\Omega_P} \sigma_\infty u_2 n_2 ds + 2G_c(\lambda - d) \quad (2.26)$$

Le taux de l'énergie restituée G_l et G_λ en bout des parties cohésives et non cohésive s'opposent à la dérivée partielle de déformation ε_{s_T} en respectant l et λ respectivement sous la forme :

$$G_l = -\frac{\partial \varepsilon_{s_T}}{\partial l}(\sigma_\infty, l, \lambda) \quad ; \quad G_\lambda = -\frac{\partial \varepsilon_{s_T}}{\partial \lambda}(\sigma_\infty, l, \lambda) \quad (2.27)$$

2.6.1 Calcul de l'énergie totale libérée au point G_λ

Le champ de déplacement u n'étant pas singulier aux points $\pm\lambda$, une dérivée formelle sous le signe d'intégration de $\varepsilon_{sT}(\sigma_\infty, \lambda, l)$, conduit à écrire, tout en respectant λ :

$$G_\lambda = \int_{\Omega_c^0} A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u) \cdot \varepsilon_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right) dx + \int_{\partial\Omega_P} \sigma_\infty \frac{\partial u}{\partial \lambda} n_2 ds - \int_{\Gamma_c} \sigma_c \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} \right] dx_1 + 2\sigma_c [u_2](x) - 2G_c \quad (2.28)$$

$\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ représente le taux du champ de déplacement à l'équilibre sous la charge σ_∞ due à l'accroissement virtuelle de la zone non cohésive. En vertu de l'équation (22), les termes contenant $\frac{\partial u}{\partial \lambda}$ disparaissent, et finalement l'énergie libérée au point λ devient :

$$G_\lambda = 2\sigma_c [u_2](x) - 2G_c \quad (2.29)$$

2.6.2 Calcul de l'énergie totale libérée au point G_l

Le champ de déplacement étant singulier aux points $\pm l$, le calcul de G_l reste spéciale pour cette zone. D'un point de vu mathématiques il est nécessaire d'utiliser le théorème de transport. En raison de singularité de la fonction à intégrer voir [Marsden et Hughes, 1983]. On utilise la procédure générale établie par [Destuynder et Djaoua, 1981] basée sur le changement de variables et qui transforme le domaine variable fissurée à un domaine fixé fissuré.

Soient l et λ deux valeurs en bouts de fissures tels que : $d \leq \lambda < l < L$. Ω_c^0 un domaine fixe fissuré et $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_c$, la fissure fixe voir équation (18). v , une fonction définie sur $[-l, +l]$ tels que :

$$v = 0 \quad \text{dans} \quad [-\lambda, \lambda] \quad ; \quad v(\pm l) = \pm 1 \quad ; \quad v(\pm L) = 0 \quad (2.30)$$

Si $h > 0$ est petit, la variable Γ^h et la variable de rupture correspondant à Ω_c^h , définie par :

$$\Gamma^h = \Gamma_0 \cup \Gamma_c^h \quad ; \quad \Omega_c^h = \Omega / (D \cup \Gamma^h) \quad (2.31)$$

avec

$$\Gamma_c^h = (-l - h, -\lambda] \times \{0\} \cup [\lambda, l + h) \times \{0\} \quad (2.32)$$

$$x^h \equiv \theta^h(x) = (x_1 + hv(x_1), x_2) \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_\infty, \lambda, l + h) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_c^h} A_{ijkl} \varepsilon_{ij}(u^h)(x^h) \varepsilon_{ij}(u^h)(x^h) dx^h - \int_{\partial\Omega} \sigma_\infty u_2^h(x^h) n_2 dx_1^h \\ & + \int_{\Gamma_c^h} \sigma_c [u_2^h](x_1^h) dx_1^h + 2G_c(\lambda - d) \end{aligned} \quad (2.34)$$

En effectuant un changement de variable, on a :

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_\infty, \lambda, l + h) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_c^0} A_{ijkl} (F^h)^{-1}_{\alpha i} \varepsilon_{ij}(u^h)(x^h) \varepsilon_{ij}(u^h)(x^h) dx^h - \int_{\partial\Omega} \sigma_\infty u_2^h(x^h) n_2 dx_1^h \\ & + \int_{\Gamma_c^h} \sigma_c \llbracket u_2^h \rrbracket (x_1^h) dx_1^h + 2G_c(\lambda - d) \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(\sigma_\infty, \lambda, l + h) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega_c^0} A_{ijkl} (F^h)^{-1}_{\alpha i} \hat{u}_{j,\alpha}^h (F^h)^{-1}_{\beta k} \hat{u}_{l,\beta}^h \det F^h dx - \int_{\partial\Omega} \hat{u}_2^h n_2 (1 + h\dot{v}) dx_1 \\ & + \int_{\Gamma_c} \sigma_c \llbracket \hat{u}_2^h \rrbracket (1 + h\dot{v}) dx_1 + 2G_c(\lambda - d) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dans l'équation ci-dessus, nous utilisons la sommation conventionnelle en répétant l'indice. Notons $F^h = \nabla \theta^h$, et les conditions aux limites $\hat{u}^0 = u^0 = u$

$$\frac{d\theta^h}{dh} \big|_{h=0} = v e_1 \quad ; \quad \frac{d(F^h)^{-1}}{dh} \big|_{h=0} = \dot{v} e_1 \otimes e_1 \quad ; \quad \frac{d(\det F^h)}{dh} \big|_{h=0} = \dot{v} \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} G_l = -\frac{d\varepsilon}{dh}(\sigma_\infty, \lambda, l + h) \big|_{h=0} = & - \int_{\Omega_c^0} \sigma_{ij} \dot{u}_{i,j} dx + \int_{\partial\Omega} \dot{u}_2 n_2 dx_1 - \int_{\Gamma_c} \sigma_c \llbracket \dot{u}_2 \rrbracket n_2 dx_1 \\ & - \int_{\Gamma_c} \sigma_c \llbracket \hat{u}_2 \rrbracket \dot{v} dx_1 + \int_{\Omega_c^0} (\sigma_{1j} u_{j,1} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j}) \dot{v} dx_1 \\ & + \int_{\partial\Omega} \sigma_\infty u_2 n_2 \dot{v} dx_1 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Les termes contenant $\hat{u}$ disparaissent en vertu de l'équation (22), l'énergie totale restituée G_l devient :

$$G_l = - \int_{\Omega_c^0} (\sigma_{1j} u_{j,1} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{i,j}) \dot{v} dx + \int_{\partial\Omega} \sigma_\infty u_2 n_2 \dot{v} dx_1 - \int_{\Gamma_c} \sigma_c \llbracket u_2 \rrbracket \dot{v} dx_1 \quad (2.39)$$

2.7 Conclusion

L'étude analytique d'une plaque avec cavité circulaire, sollicitée aux efforts de tractions à l'infinie a été résolue en présence des forces cohésives de Dugdale. A travers cette résolution, les équations formulées et les conditions aux limites prisent en compte servira d'orientation pour le modèle numérique. Ainsi, rappelons que les méthodes énergétiques et les forces cohésives utilisées permettent de s'affranchir de la connaissance du champ des contrainte et de déformations à la pointe de la fissure. L'approche d'ensemble de l'étude a été repartie en trois phases : la phase élastique où la plaque est supposée être à l'équilibre, la phase de rupture cohésive, dans laquelle la fissure apparaît aux points

$(\pm d, 0)$ où les efforts sont maximaux pendant la propagation élastique et enfin, la phase au delà du seuil de rupture où la charge augmente au delà de la contrainte de rupture. Les deux phases de résolution énergétique précédemment décrits sont pris en compte dans la résolution numérique. Par rapport à l'étude analytique, la loi de comportement du matériau définie sera modifiée pour être introduit dans le code de calcul Cast3M qui fait partie des chapitres suivants.

Chapitre 3

Initiation et propagation de fissure dans une plaque en présence des forces cohésives

Nous décrivons ici le problème de mécanique constituant le problème de référence. Nous rappelons les différentes relations et conditions aux limites que doivent vérifier le champ des déplacements et le champ des contraintes. Nous donnons ensuite la loi de comportement qui donnent des relations entre le champ des déformations et de champ de contraintes. Finalement nous en déduisons de manière formelle les principes variationnelles dont sont respectivement solutions le champ des déplacements et le champ des contraintes.

Sommaire

3.1	Introduction	57
3.2	Notations et préliminaires géométriques	57
3.2.1	Déformations dans $\mathbb{R}^3$	57
3.2.2	Configuration déformée arbitraire	58
3.3	Équation d'équilibre et principe des travaux virtuels dans la configuration déformée	60
3.3.1	Théorème (théorème de Cauchy)	61

3.4	Le cadre de la modélisation	62
3.4.1	Description géométrique de la plaque	62
3.4.2	Compléments	65
3.5	Modèle cohésive en pointe de fissure	66
3.5.1	Rappels bibliographiques	66
3.5.2	Équilibre de la plaque fissurée en présence des forces cohésives	69
3.5.3	Loi cohésive de type Dugdale	69
3.6	Formulation mécanique du problème	70
3.6.1	Cadre fonctionnel de résolution du problème	70
3.6.2	Définition	72
3.7	Évolution de la fissure et méthodologie de résolution du problème	72
3.7.1	Orientation	72
3.7.2	Scénario de fissuration et méthodologie de résolution	75
3.7.3	Cas particuliers importants	76
3.7.4	Remarque	77
3.7.5	Proposition en pointes de la zone cohésive $l_c \in [-q(t); q(t)]$	77
3.7.6	Ouverture de la fissure en pointes de la zone non-cohésive	78
3.8	Évolution de la fissuration : effet d'échelle	80
3.8.1	Étude de la phases élastique $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_e$	80
3.8.2	Étude de la phase purement cohésive	81
3.8.3	Étude de la phase partiellement cohésive	82
3.9	Écartement de fissure	89
3.10	Solution élémentaire des problèmes de fissure	90
3.10.1	Résolution du problème par l'analyse complexe	90
3.10.2	Problème de Hilbert	90
3.10.3	Rappels mathématiques	91
3.10.4	Solution du problème $F^+(t) = G(t)F^-(t) + f(t)$	94
3.10.5	Problème auxiliaire	95
3.10.6	Représentation complexe des contraintes et de déplacements	96
3.10.7	Problème aux limites sur la ligne de fissure	98
3.11	Application à la fissure centrale dans une plaque en présence des forces cohésives	100
3.11.1	Le Facteur d'Intensité des Contraintes FIC	103
3.11.2	Condition d'ouverture de fissure	103
3.12	Conclusion	104

3.1 Introduction

La mécanique linéaire de la rupture ou mécanique de la rupture fragile, repose sur les lois globales de conservation de l'énergie. Elle concerne l'étude de l'effet de la présence de fissure dans un solide sur les champs mécaniques, notamment dans le but d'évaluer la nocivité des fissures. Les fissures sont susceptibles de se propager, *i.e.* de s'agrandir de façon progressive ou brutale selon les matériaux en présence et le type de chargement. Elle est développée sous les hypothèses de déformations planes HDP et de petites perturbations HPP, on se restreint de plus à des évolutions quasi-statiques, les effets d'inertie sont négligés.

D'autre part, on utilise les zones cohésives : ce sont des zones où sont appliquées les forces de cohésion F_c qui s'exercent entre les lèvres de la fissure, fonction du saut de déplacement $\llbracket u \rrbracket$. Les modèles de forces cohésives supposent qu'à la pointe de fissure sur une longueur l_{zc} , les forces de cohésion agissent pour s'opposer aux charges extérieures. L'intensité des forces de cohésion présente une distribution $\sigma_{coh}(x)$ qui varie selon les modèles. Dans le modèle de Dugdale, les forces de cohésion ont une amplitude constante et égale à R_e la limite d'élasticité.

Ce chapitre commence par des préliminaires et des notations géométriques, de la déformation d'un solide de la configuration de référence à la configuration déformée. On définit les équations d'équilibres de la configuration de référence ainsi que celles de la configuration déformée. Le but est de présenter, et comparer, des méthodes de calcul numérique fondées sur les éléments finis qui permettent d'évaluer, pour une plaque avec fissure centrale, la propension de la fissure à se propager. Ces méthodes reposent soit sur l'exploitation des déplacements nodaux au voisinage de la pointe de fissure, soit sur le calcul numérique du taux de restitution de l'énergie.

3.2 Notations et préliminaires géométriques

3.2.1 Déformations dans $\mathbb{R}^3$

Soit Ω_P un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^3$ de frontière $\Gamma = \partial\Omega_P$ suffisamment régulier et soit $\overline{\Omega}_P$ l'adhérence de Ω_P dans $\mathbb{R}^3$. $\overline{\Omega}_P$ représente le volume occupé par le solide non déformé dans la configuration de référence. Soit x , un point de $\overline{\Omega}_P$ de composante x_i dans la base orthogonale directe $\mathcal{B} = (\mathcal{O}, e_1, e_2, e_3)$ ou canonique $\{e_i\}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ la dérivée partielle par rapport à la variable x_i . La déformation de la configuration de référence est une application $\varphi : \overline{\Omega}_P \rightarrow \mathbb{R}^3$, suffisamment régulière, injective, et préservant l'orientation, *i.e.* vérifiant :

$$\det \nabla \varphi(x) > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}_P \quad (3.1)$$

$\nabla \varphi$: matrice gradient de déformation définie par $\nabla \varphi = (\partial_j \varphi_i)$. avec φ_i , les com-

posantes de φ dans la base $\{e_i\}$. Pour chaque déformation φ , il est associé un déplacement u , qui est le champ de vecteurs $u : \bar{\Omega}_P \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\varphi(x) = I_d + u(x)$. Le gradient de déplacement $\nabla u = (\partial_j u_i)$ satisfait la relation matricielle $\nabla \varphi = I_d + \nabla u$. $\bar{\Omega}_P$ étant la configuration de référence et φ la déformation, l'ensemble $\varphi(\bar{\Omega}_P)$ sera appeler la configuration déformée. En chaque point $M^\varphi(x^\varphi) = \varphi(x)$ de la configuration déformée, on définit les vecteurs $\partial_j \varphi = \partial_j \varphi_i e_i$. Ce qui veut dire que chaque vecteur $\partial_i \varphi$ mesure la déformation locale dans la direction e_j , en ce sens que le vecteur $\det(e_j)$ est transformé en le vecteur $\det(\partial_j \varphi)$ au premier ordre en $\det$.

3.2.2 Configuration déformée arbitraire

Dans cette section nous calculons arbitrairement à titre formel les éléments de surface et de volume dans la configuration déformée en fonction des quantités correspondantes exprimées dans la configuration de référence.

Supposons que φ soit une déformation, si dv est l'élément de volume au point x de la configuration de référence. dv^φ , l'élément de volume au point $x^\varphi = \varphi(x)$ de la configuration déformée, donnée par la formule classique en élasticité :

$$dv^\varphi = (\det \nabla \varphi(x)) dv \quad (3.2)$$

Cette expression traduit le comportement d'un élément de volume dans la configuration déformée. Étant donné un champ de tenseurs $\sigma : \bar{\Omega}_P \rightarrow \mathbb{M}^3$ suffisamment régulier, nous définissons en chaque point de $\bar{\Omega}_P$ sa divergence $\text{div} \sigma_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{ij,j}$ comme étant le vecteurs dont les composantes sont les divergences des vecteurs lignes de la matrice σ_{ij} :

$$\text{div} \sigma_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \partial_j \sigma_{ij} e_i \quad (3.3)$$

De la même manière, dans la configuration déformée, on définit la divergence $\text{div}^\varphi \sigma_{ij}^\varphi$ d'un champ de tenseurs $\sigma^\varphi : \bar{\Omega}_P^\varphi \rightarrow \mathbb{M}^3$ en chaque point de $\bar{\Omega}_P^\varphi$ par : $\text{div}^\varphi \sigma_{ij}^\varphi \stackrel{\text{def}}{=} \partial_j^\varphi \sigma_{ij}^\varphi e_i$, avec la notation $\partial_i^\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i^\varphi}$. Une simple application de la formule de Green pour un champ de tenseur conduit à l'expression :

$$\int_{\Omega_P} \text{div} \sigma dv = \left(\int_{\Omega_P} \partial_j \sigma_{ij} dv \right) e_i = \left(\int_{\partial \Omega_P} \sigma_{ij} n_j ds \right) e_i \quad (3.4)$$

ou par le théorème de la divergence :

$$\int_{\Omega_P} \text{div} \sigma dv = \int_{\partial \Omega_P} \sigma n ds \quad (3.5)$$

Dans la configuration déformée, on obtiendrait la même relation :

$$\int_{\Omega_P^\varphi} \text{div}^\varphi \sigma^\varphi dv^\varphi = \int_{\partial \Omega_P^\varphi} \sigma^\varphi n^\varphi ds^\varphi \quad (3.6)$$

où ds et ds^φ , les éléments de surface, n et n^φ les normales extérieures le long de $\partial\Omega_P$ et $\partial\Omega_P^\varphi$, respectivement. Ce qui signifie que pour tout tenseur $\sigma^\varphi(x^\varphi)$ défini en un point $x^\varphi = \varphi(x)$ de la configuration déformée, nous associons le tenseur $\sigma(x)$ défini au point x de la configuration de référence par la relation :

$$\sigma(x) = (\det \nabla \varphi(x)) \sigma^\varphi(x^\varphi) \nabla \varphi(x)^{-T}, \quad x^\varphi = \varphi(x) \quad (3.7)$$

Si $\sigma^\varphi : \overline{\Omega}_P^\varphi \rightarrow \mathbb{M}^3$ est un champ de tenseur, l'application $\{\sigma^\varphi : \overline{\Omega}_P^\varphi \rightarrow \mathbb{M}^3\} \rightarrow \{\sigma = (\det \nabla \varphi) \sigma^\varphi \nabla \varphi^{-T} : \overline{\Omega}_P \rightarrow \mathbb{M}^3\}$. L'expression ainsi définie est la transformation de Piola. La relation entre les éléments de surface ds et ds^φ est décrit par le théorème suivant :

3.2.2.1 Théorème

Soit $\sigma = (\det \nabla \varphi) \sigma^\varphi \nabla \varphi^{-T} : \overline{\Omega}_P \rightarrow \mathbb{M}^3$ la transformation de Piola d'un champ de tenseur $\sigma^\varphi : \overline{\Omega}_P^\varphi \rightarrow \mathbb{M}^3$. Alors :

$$\operatorname{div} \sigma(x) = (\det \nabla \varphi(x)) \operatorname{div}^\varphi \sigma^\varphi(x^\varphi) \quad \forall x^\varphi = \varphi(x), \quad x \in \overline{\Omega}_P \quad (3.8)$$

$$\sigma(x) n ds = \sigma^\varphi(x^\varphi) n^\varphi ds^\varphi \quad \forall x^\varphi = \varphi(x), \quad x \in \partial\Omega_P \quad (3.9)$$

où ds et ds^φ désignent les éléments de surface aux points $x \in \partial\Omega_P$ et $x^\varphi = \varphi(x) \in \partial\Omega_P^\varphi$, de normales extérieures unitaire respectives n et n^φ . on peut donc écrire :

$$(\det \nabla \varphi(x)) \nabla \varphi(x)^{-T} n ds = n^\varphi ds^\varphi \quad \text{et} \quad \det \nabla \varphi(x) | \nabla \varphi(x)^{-T} n | ds = ds^\varphi \quad (3.10)$$

Pour calculer l'élément de longueur dans la configuration déformée, φ est supposé comme une déformation dérivable au point $x \in \overline{\Omega}_P$. On a pour tout point $x + \delta x \in \overline{\Omega}_P$:

$$\varphi(x + \delta x) = \varphi(x) + \nabla \varphi(x) \delta x + o(|\delta x|) \quad (3.11)$$

Le tenseur des déformations de Cauchy-Green, noté $C = \nabla \varphi^T \nabla \varphi$, apparaît en formant :

$$|\varphi(x + \delta x) - \varphi(x)|^2 = \delta x^T \nabla \varphi(x)^T \nabla \varphi(x) \delta x + o(|\delta x|^2) \quad \forall x \in \overline{\Omega}_P, x + \delta x \in \overline{\Omega}_P \quad (3.12)$$

Comme le montre le développement limité, ce tenseur symétrique $C = \nabla \varphi^T \nabla \varphi$, joue un rôle important en théorie de l'élasticité [Ciarlet, 1986]. Ce tenseur est aussi utilisé dans le calcul des longueurs dans la configuration déformée, en supposant c_λ une courbe tracée dans la configuration de référence et définie comme une intervalle compacte de R par : $c_\lambda = f(I)$, $f : I \rightarrow \overline{\Omega}_P$, I : intervalle compacte de R . Les composantes de l'application f sont notées f_i , la longueur de la courbe c_λ dans la configuration de référence est donnée par :

$$l(c_\lambda) = \int_I |f'(q)| dq = \int_I (f'_i(q) f'_i(q))^{\frac{1}{2}} dq \quad (3.13)$$

et la longueur de la courbe déformée $c_\lambda^\varphi = \varphi(c_\lambda)$ est donnée par :

$$l(c_\lambda^\varphi) = \int_I |(\varphi \circ f)'(q)| dq = \int_I (C_{ij}(f(q))f'_i(q)f'_j(q))^{\frac{1}{2}} dq \quad (3.14)$$

Ces deux expressions montrent que les éléments de longueur dl et dl^φ dans la configuration de référence et déformée s'écrivent respectivement :

$$dl = \sqrt{dx^T dx} \quad \text{et} \quad dl^\varphi = \sqrt{dx^T C dx} \quad (3.15)$$

3.2.2.2 Remarque

Nous venons de montrer que les changements de formes géométriques (volume, surface, longueur) dépend respectivement du scalaire $\det \nabla \varphi$, de la matrice $(\text{cof} \nabla \varphi)$ et de la matrice $\nabla \varphi^T \nabla \varphi$. Ces quantités sont souvent retrouvées dans les expressions générales d'une densité d'énergie.

Introduisons maintenant le tenseur E des déformations de Green-Saint Venant qui mesure l'écart entre une déformation donnée et une déformation rigide. Elle s'exprime en fonction du gradient de déplacement ∇u on rappelle que $\varphi = I_d + u$:

$$E = E(u) = \frac{1}{2} (C - I) = \frac{1}{2} (\nabla u^T + \nabla u + \nabla u^T \nabla u) \quad (3.16)$$

Soit en composante :

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_i u_j + \partial_j u_i + \partial_i u_k \partial_j u_k) \quad (3.17)$$

Le tenseur symétrique E admet trois valeurs propres réelles associées à trois directions propres. Lorsque la plus grande de ces trois valeurs est suffisamment petite, alors on rentre dans le cadre des petites déformations. On peut donc associé aux grandeurs cinématiques C et E les grandeurs mécaniques traduisant la notion d'efforts, et menant au principe des travaux virtuels.

3.3 Équation d'équilibre et principe des travaux virtuels dans la configuration déformée

Soit $\bar{\Omega}_P^\varphi$, un corps occupant la configuration déformée. $\bar{\Omega}_P^\varphi$ est soumis aux efforts de volume, correspondant à un champ de vecteurs $f^\varphi : \Omega_P^\varphi \rightarrow R^3$ ou aux forces appliquées de surface $g^\varphi : \Gamma_1^\varphi \rightarrow R^3$ définis sur une portion $\Gamma_1^\varphi = \partial_N \Omega_P^\varphi$ de la frontière $\Gamma^\varphi = \partial \Omega_P^\varphi$, et appelé densité de forces appliquées de surface de la configuration déformée. Ces forces résultent de l'action d'une force élémentaire $f^\varphi(x^\varphi) dv^\varphi$, exercée sur l'élément de volume dv^φ en tout point x^φ de Ω_P^φ et au force élémentaire de surface $g^\varphi(x^\varphi) ds^\varphi$, exercée sur l'élément de surface ds^φ en tout point de x^φ de la portion de frontière Γ_1^φ . Étant donné

un sous-domaine A^φ de la configuration déformée $\bar{\Omega}_P^\varphi$ et x^φ un point de la frontière ∂A^φ où la normale extérieure unitaire n^φ est bien définie.

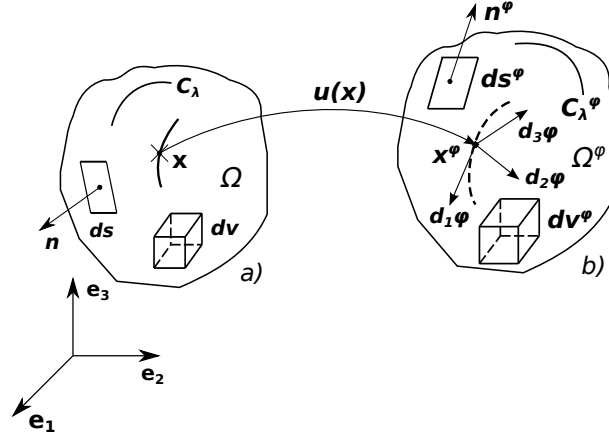


Figure 3.1: Configuration initiale et état déformée

Une force de surface élémentaire $T^\varphi(x^\varphi, n^\varphi)ds^\varphi$ est exercée sur ds^φ dans toute configuration déformée $\bar{\Omega}_P^\varphi$ dans laquelle le corps est en équilibre statique, il existe un système de forces $f^\varphi : \bar{\Omega}_P^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $T^\varphi : \bar{\Omega}_P^\varphi \times \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ qui définit l'équilibre statique. En chaque point $x^\varphi \in \bar{\Omega}_P^\varphi$, il existe un tenseur $\sigma^\varphi(x^\varphi) \in \mathbb{M}^3$ tel que $T^\varphi(x^\varphi, n) = \sigma^\varphi(x^\varphi)n \quad \forall n \in \Sigma_1$. Ce tenseur est symétrique et vérifie les équations aux dérivées partielles.

3.3.1 Théorème (théorème de Cauchy)

Supposons que le champ de densité de force appliquée de volume $f^\varphi : \bar{\Omega}_P^\varphi \rightarrow \mathbb{R}^3$ soit continu et que la champ des vecteurs des contraintes de Cauchy $T^\varphi : (x^\varphi, n) \in \bar{\Omega}_P^\varphi \times \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ soit continûment dérivable par rapport à la variable x^φ pour tout $n \in \Sigma_1$, et continu par rapport à n pour tout $x^\varphi \in \bar{\Omega}_P^\varphi$. Alors l'équilibre statique entraîne l'existence d'un champ de tenseur continûment dérivable $\sigma^\varphi : \bar{\Omega}_P^\varphi \rightarrow \mathbb{M}^3$ tel que :

$$\begin{aligned} T^\varphi(x^\varphi, n) &= \sigma^\varphi(x^\varphi)n \quad \forall x^\varphi \in \bar{\Omega}_P^\varphi; \quad \forall n \in \Sigma_1 \\ -\text{div}^\varphi \sigma^\varphi(x^\varphi) &= f^\varphi(x^\varphi) \quad \forall x^\varphi \in \Omega_P^\varphi \\ \sigma^\varphi(x^\varphi) &= \sigma^\varphi(x^\varphi)^T \quad \forall x^\varphi \in \bar{\Omega}_P^\varphi \end{aligned} \tag{3.18}$$

D'après le théorème de Cauchy, le champ de tenseurs de contraintes est solution du problème aux limites écrit formellement :

$$\begin{aligned}
 -\operatorname{div}^\varphi \sigma^\varphi(x^\varphi) &= f^\varphi(x^\varphi) \quad \text{dans} \quad \Omega_P^\varphi \\
 \sigma^\varphi &= \sigma^\varphi(x^\varphi)^T \quad \text{dans} \quad \Omega_P^\varphi \\
 \sigma^\varphi n^\varphi &= g^\varphi \quad \text{sur} \quad \Gamma_1^\varphi
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Rappelons que $T^\varphi(x^\varphi, n^\varphi) = g^\varphi(x^\varphi)$ pour $x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi$ et n^φ la normale extérieure unitaire. La forme en divergence de ces équations permet de donner une formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega_P^\varphi} \sigma^\varphi : \nabla^\varphi u^\varphi dv^\varphi = \int_{\Omega_P^\varphi} f^\varphi dv^\varphi + \int_{\Gamma_1^\varphi} g^\varphi \cdot u^\varphi ds^\varphi \tag{3.20}$$

avec u^φ un champ de vecteur suffisamment régulier $u^\varphi : \overline{\Omega_P^\varphi} \rightarrow \mathbb{R}^3$ vérifiant la condition $u^\varphi = 0$ sur $\Gamma_0^\varphi = \Gamma^\varphi - \Gamma_1^\varphi$ (les lecteurs intéressés peuvent voir les détails de démonstration dans [Ciarlet, 1986]), $\nabla^\varphi u^\varphi \in L^2(\Omega; \mathbb{M}^N)$ où $\mathbb{M}^N$ désigne l'espace des matrices $N \times N$. On appelle u le déplacement et on définit le tenseur des déformations linéarisé associé à u comme étant la partie symétrique du gradient de u .

3.4 Le cadre de la modélisation

Dans cette section, on introduit quelques bases de la modélisation avec le respect des concepts de la mécanique de rupture fragile. Pour la modélisation géométrique et mécanique des fissures, le concept utilisant le point de vue de Griffith n'est pas pris en compte. Ce dernier idéalise géométriquement les fissures comme des coupures dans le milieu sain, qui deviennent des surfaces de discontinuité des déplacements du point de vue cinématique. En termes d'interaction entre les lèvres, le point de vue de Griffith reste insuffisant puis qu'il consiste à négliger les forces de cohésion en bout de fissure. Ainsi un modèle plus réaliste, de Dugdale qui prend en compte les forces de cohésions fonction de saut des déplacements est considéré.

On se place au niveau macroscopique et on idéalise la fissure comme une coupure dans la plaque. En 2D, cette coupure récemment créée est supposée comme une droite où les déplacements sont discontinus. La plaque Ω_P est carrée et possède à l'état initial un défaut $\mathbb{D} = \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$ privé du segment $\Gamma = (\pm R, 0) \times \{0\}$, i.e. $\Omega_P / \mathbb{D}$. Le défaut est un cercle de centre $(0, 0)$ de rayon R . L'étude est réalisée dans le cadre des hypothèses HPP et HDP.

3.4.1 Description géométrique de la plaque

3.4.1.1 Configuration initiale : phase élastique $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_e$

L'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ habituel rapporté à un repère orthonormé fixe (e_1, e_2, e_3) et le système cartésien (x_1, x_2, x_3) sont utilisés. La configuration de référence de la structure

est un ensemble ouvert Ω_P de $\mathbb{R}^2$ borné du plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ dont la frontière est notée Γ . La structure est constituée de matériau isotrope dont le comportement élastique est caractérisé par les coefficients de Lamé μ et λ avec un module de Young E et de coefficient de Poisson ν . La structure s'adapte à la loi de la zone cohésive de type Dugdale et elle est soumise à un chargement de traction croissant sur les deux bords latéraux, les deux autres bords sont libres.

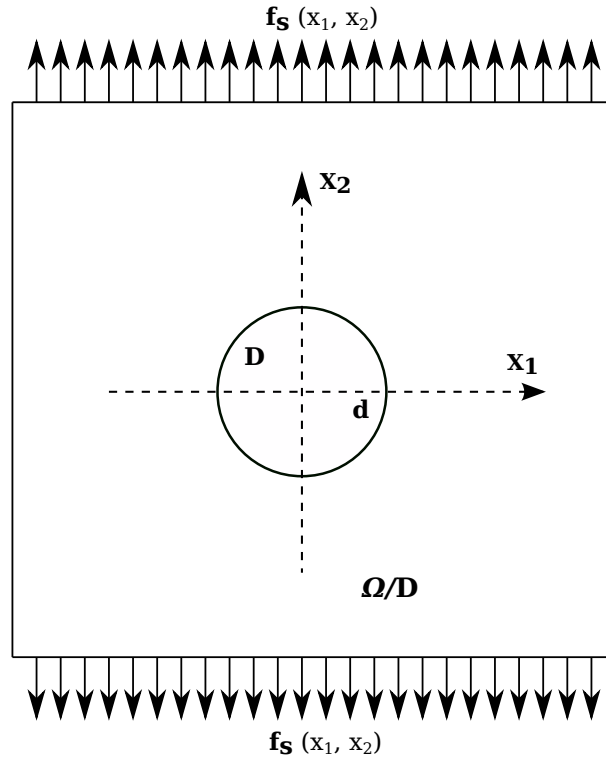


Figure 3.2: Géométrie et chargement de la plaque $\Omega_P/\mathbb{D}$ à l'état initial ou phase élastique

La structure élastique $\Omega_P = (-L, +L)^2$ voir [Ferdjani *et al.*, 2007] est définie dans la configuration de référence par les équations d'équilibre et la loi de comportement :

$$\begin{aligned}
 \operatorname{div} \sigma_{ij} &= 0 \quad \text{sur} \quad \Omega_P/\mathbb{D} \\
 \sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij}(u) + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon_{ij}(u) \delta_{ij} \quad \text{dans} \quad \Omega_P/\mathbb{D} \\
 \sigma_{ij} n_j &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial_N \Omega_P \\
 \sigma_{ij} e_1 &= 0 \quad (\pm L) \times (-L, +L) \\
 \sigma_{ij} e_2 &= \sigma_\infty e_2 \quad \text{sur} \quad (-L, +L) \times (\pm L)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

avec $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ dans $\Omega_P/\mathbb{D}$, le champ de déformation linéaire est associé au champ de déplacement u . n_j , la normale extérieure du corps $\Omega_P/\mathbb{D}$ et e_2 un vecteur de base. La force volumique est négligée, $\partial_N \Omega_P$ représente la partie de la borne du domaine

soumise à la force imposée.

Le défaut $\mathbb{D} = \{(x, y); x^2 + y^2 < R^2\}$ est supposé symétrique pour les axes $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ et l'effort est maximal aux points d'intersections $(\pm d, 0)$ de la frontière de $\mathbb{D}$. En absence de fissure, et lorsque la solution est purement élastique, le champ de déplacement u et de contrainte σ sont solutions du problème linéaire.

3.4.1.2 Symétrie et hypothèse de régularité de la structure

Les hypothèses de symétrie et de régularité sont celles utilisées dans [Pham, 2016] pour la résolution d'un problème de plaque sollicitée en traction-compression. La géométrie de la structure $\Omega_P/\mathbb{D}$ étant symétrique ainsi que le chargement, plusieurs hypothèses peuvent être formulées pour l'obtention de la solution dans la base (e_1, e_2) .

Toute la charge se trouve dans le plan parallèle au plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ et, la plaque à une épaisseur faible selon $\vec{x}_3$, il en résulte que nous pouvons considérer le problème en état plan de contrainte. Il nous faut chercher à définir l'état de charge appliqué au défaut $\mathbb{D}$ de rayon R . Le principe de Saint-Venant permet d'affirmer que, loin du trou, nous sommes en présence d'un tenseur de traction uni-axiale.

Le champ de tenseur des contraintes étant plan, les composantes de cisaillement σ_{12} symétrique, s'annulent sur les axes $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$. En conséquence le tenseur de contrainte reste principale sur la base (e_1, e_2) , en tous points du domaine. Les valeurs propres sont : σ_1 et σ_2 . Le champ des contraintes en tout point x peuvent s'écrire sous la forme :

$$\sup_{x \in \Omega_P/\mathbb{D}} \max\{\sigma_1(x), \sigma_2(x), \sigma_3(x)\} = \sigma_{22}(\pm d, 0) \quad (3.22)$$

où $\{\sigma_i(x)\}_{1 \leq i \leq 3}$: sont des contraintes principale en x . Donc le champ de contrainte élastique $\sigma_i(x)$ est une fonction régulière de x . Sa composante normale $\sigma_{nn}(x)$ atteint la valeur maximale pour les points $(\pm d, 0)$ dans la direction normale e_2 . En fin, la phase élastique s'arrête lorsque l'effort maximal de traction dans le corps $\Omega_P/\mathbb{D}$ atteint la valeur critique σ_c , correspondant au début d'une fissure dans le modèle de Dugdale-Baremlatt.

$$\sigma_e = \sup\{\sigma_\infty : \sigma_{22}(\pm d, 0) \leq \sigma_c\} \quad (3.23)$$

Conséquences sur les hypothèses

Après les hypothèses prises en compte, les contraintes sont réparties le long de l'axe $x_2 = 0$ selon les conditions suivantes :

1- le vecteur contrainte $\sigma_{2i}^0(x_1, 0)$ (avec $i = 1, 2$) suivant e_2 est normale et s'exprime par : $\sigma_{22}^0(x_1, 0)e_2 = \Sigma(x_1, 0)e_2$. La distribution de contrainte normale $\sigma_{nn}(x_1, 0)$ parallèle à l'axe x_2 est une fonction paire régulière de x_1 , elle admet x_1 comme axe de symétrie

et la valeur maximale est atteinte pour $x_1 = 0$. En développant cette contrainte normale $\sigma_{22}(x_1, 0)$ à l'ordre 2 par rapport à x_1 , on a la distribution :

$$\Sigma(x_1, 0) = \sigma_{22}(x_1, 0) + \frac{x_1}{1!} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_1}(x_1, 0) + \frac{x_1^2}{2!} \frac{\partial^2 \sigma_{22}}{\partial x_1^2}(x_1, 0) + 0(x_1^2) \quad (3.24)$$

La distribution des contraintes étant une fonction paire, on peut écrire :

$$\Sigma(x_1, 0) = \sigma_{22}(0, 0) + \frac{x_1^2}{2} \sigma_{22,11}(0, 0) + 0(x_1^2) \quad (3.25)$$

2- On introduit la longueur caractéristique du gradient de déplacement des contraintes suivant $x_1 = 0$ sous la forme : $l_c = 2\sqrt{\frac{\sigma_{22}(x_1, 0)}{\sigma_{22,11}(x_1, 0)}}$. Le développement de distribution de contrainte normale se réécrit comme suit.

$$\Sigma(x_1, 0) = \sigma_{22}(0, 0) \left(1 + \frac{2x_1^2}{l_c^2} \right) + 0(x_1^2) \quad (3.26)$$

Cette expression traduit la bonne approximation de $\Sigma(x_1, 0)$ lorsque x_1 est très petit devant l_c ($x_1 \ll l_c$). La formulation plus générale de cette expression est décrit dans le cas de problème d'évolution de rupture par [Pham *et al.*, 2016]. Les hypothèses de symétrie et de régularité supposent que la fissure s'initie au point $\underline{0} = (0, 0)$ à l'instant critique $t_c = \frac{\sigma_c}{\sigma_{22}(0, 0)}$, lorsque la contrainte normale maximale du problème élastique atteint la valeur critique σ_c . La distribution plus générale de contraintes normale devient

$$\Sigma(x_1, 0) = \frac{\sigma_c}{t_c} \left(1 - \frac{2x_1^2}{l_c^2} \right) t + 0t(x_1^2) \quad (3.27)$$

A travers cette relation, la fissure est supposée toujours droite et se situe sur l'axe $x_2 = 0$. Après l'instant t , il est possible de définir la fissure comme un ensemble des points de discontinuité du champ de déplacement $u(t)$ noté $\mathbb{S}_{u(t)} \in \Gamma$ de l'axe $x_2 = 0$ compris dans la structure $\Omega_P/\mathbb{D}$.

$$\mathbb{S}_{u(t)} = \{x \in \Omega_P/\mathbb{D}; \llbracket u(t) \rrbracket(x) \neq 0\} \subset \Gamma = \Omega_P/\mathbb{D} \cap \{x_2 = 0\} \quad (3.28)$$

Le champ de déplacement a travers la ligne de discontinuité est normale. La fissure est toujours en mode d'ouverture suivant l'axe x_1 avec un saut normale de déplacement $\llbracket u_2(t) \rrbracket(x)$ au point $(x_1, 0) \in \mathbb{S}_{u(t)}$.

3.4.2 Compléments

3.4.2.1 Conditions de stabilité locale de la fissure

La géométrie du solide fissuré est décrit par un domaine plan $\Omega_c^0 \subset \mathbb{R}^2$ de frontière $\partial\Omega_P$. On suppose pour simplifier l'absence de force de volume. L'équilibre du solide dans les conditions ainsi définies (sollicité par la contrainte σ_∞), les déplacements $\underline{u}_d$ imposés sur une partie $\partial_D\Omega_P$ de la frontière $\partial\Omega_P$ et une densité d'efforts surfacique $\underline{T}^d$ sur une

partie complémentaire $\partial_N \Omega_P$ de $\partial \Omega_P$, est décrit par des déplacements $\underline{u}$ et de contrainte $\underline{\sigma}$, gouverné par les équations locales. Les surfaces $\partial_D \Omega_P$ et $\partial_N \Omega_P$ forment une partition de $\partial \Omega_P$.

3.4.2.2 Proposition

Le champ de déplacement $u(t)$ et le champ de contrainte σ associé sont solutions du problème de la phase élastique s'ils satisfont les conditions locales suivantes :

Équations d'équilibre :

$$\text{div} \sigma_{ij} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_P / (\mathbb{D} \cup \Gamma) \quad (3.29)$$

Conditions aux limites et de symétries :

$$\left| \begin{array}{l} \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \underline{T}^d \quad \underline{x} \in \partial_N \Omega_P \\ \underline{u}(\underline{x}) = \underline{u}_d(\underline{x}) \quad \underline{x} \in \partial_D \Omega_P \\ \underline{u}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = 0 \quad \underline{x} \in \mathbb{S}_{sym}. \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) - \sigma_n \underline{n}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \underline{x} \in \mathbb{S}_{sym}. \end{array} \right. \quad (3.30)$$

Chemin de fissure :

$$\left| \begin{array}{l} \llbracket u_2 \rrbracket = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{12} \leq \sigma_c \quad \text{sur} \quad \Gamma / \mathbb{S}_{u(t)} \\ \llbracket u_2 \rrbracket \geq 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = \phi(\llbracket u_2 \rrbracket) \quad \text{sur} \quad \mathbb{S}_{u(t)} \end{array} \right. \quad (3.31)$$

où $\sigma_n = \underline{n} \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}$, la contrainte normale. Les surfaces $\partial_D \Omega_P$ et $\partial_N \Omega_P$ supportent les valeurs imposées du déplacement ou du vecteur contrainte, tandis que sur le long de la surface de symétrie $\mathbb{S}_{sym}$, on exprime le glissement sans frottement. L'utilité pratique des conditions de symétrie vient de ce qu'il représente le comportement attendu des déplacements et des contraintes sur le plan de symétrie géométrique lorsque les conditions de chargement sont elles-mêmes symétriques. En conséquence, les conditions de symétries permettent ainsi de poser le problème d'équilibre sur un domaine réduit par utilisation de symétries planes.

3.5 Modèle cohésive en pointe de fissure

3.5.1 Rappels bibliographiques

Les modèles cohésifs sont souvent introduits pour tenir compte de la relaxation plastique qui se produit en tête de fissure [Labbens, 1980]. Initialement, c'est [Barenblatt, 1959] qui a présenté le premier modèle cohésif, suivi par celui de [Dugdale, 1960b] sous une forme légèrement différente. D'autres modèles ont suivis : ([Vitvicki et Leonov, 1960], [Bilby *et al.*, 1963]). Dans ces modèles, on considère les forces de cohésions qui agissent à

la pointe d'une fissure, ces forces dépendent fortement de la distance y entre deux plans atomiques. L'intensité de contrainte de cohésion est supposée nulle lorsque la distance inter-atomique est égale à la distance au repos b_0 . L'intensité de contrainte de cohésion passe par un maximum lorsque la distance y s'accroît d'environ une fois et demi la valeur de b_0 . La contrainte de cohésion maximale est définie telle que : $\max \sigma_c \sim \sqrt{\frac{EG_s}{b_0}}$, cette intensité diminue lorsque la distance y augmente. L'énergie de surface est reliée à l'intensité des contraintes de cohésion par l'expression : $G_s = \frac{1}{2} \int_{b_0}^{\infty} \sigma_c(y) dy$.

3.5.1.1 Principe

On se propose d'appliquer la méthode des forces cohésives à la résolution de problèmes faisant intervenir la rupture avec propagation de fissure. Avant d'aborder certaines questions concernant les forces cohésives, nous commençons le problème par la présentation d'une figure limitant les différentes zones d'un solide élastique en rupture fragile.

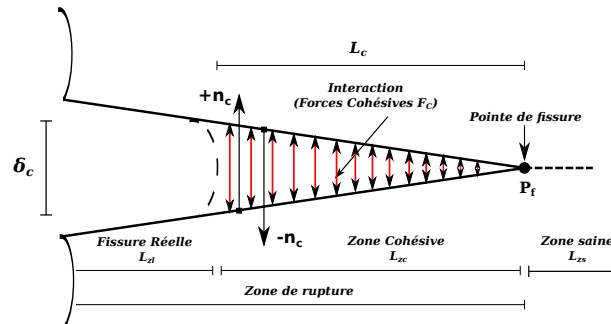


Figure 3.3: Modèle des zones cohésives

Le problème est d'autant plus intéressant que dans bien de nombre, le problème de Barenblatt s'y ramène approximativement. L'énergie potentiel de surface $\phi(\llbracket u_n \rrbracket) = 0$ est donnée par :

- une zone saine : L_{zs} ,
- une zone cohésive : L_{zc} , les lèvres de fissure sont soumises aux forces cohésives, avec la longueur caractéristique L_{zc} et un déplacement δ_c .
- une zone libre : L_{zl} , la rupture au début de fissure est définie par les conditions aux limites avec la zone cohésive.

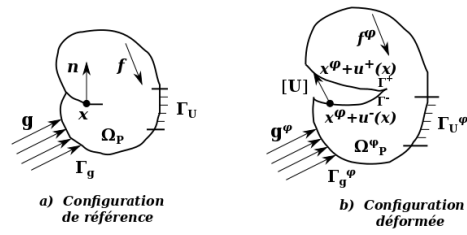


Figure 3.4: Notation du problème

3.5.2 Équilibre de la plaque fissurée en présence des forces cohésives

3.5.2.1 Configuration déformée : phase de rupture cohésive $\sigma_e < \sigma_\infty < \sigma_r$

3.5.3 Loi cohésive de type Dugdale

La propagation et la nucléation de fissures dans la structure à lieu dans la configuration déformée, elles sont gérées par la loi cohésive de type Dugdale ([Ferdjani *et al.*, 2007], [Pham *et al.*, 2016] et [Pham, 2016]). Modèle formulé en termes énergétiques, la densité d'énergie surfacique $\phi(\llbracket u_n \rrbracket)$ de fissure dépend d'une façon non trivial au saut de déplacement à la différence du modèle de [Griffith, 1920] dans lequel on assure que la densité $\phi(\llbracket u_n \rrbracket)$ est constante. Ainsi dans le modèle de [Dugdale, 1960a], en supposant que l'ouverture de la fissure est en mode I, *i.e.* le déplacement normale est discontinu. La densité $\phi(\llbracket u_n \rrbracket)$ d'énergie en fonction de déplacement est donnée par l'expression :

$$\phi(\llbracket u_n \rrbracket) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket < 0 \\ \frac{G_c}{l_c} \llbracket u_n \rrbracket & \text{si } 0 \leq \llbracket u_n \rrbracket < l_c \\ G_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket \geq l_c \end{cases} \quad (3.32)$$

où $\llbracket u_n \rrbracket$, dénote le saut de déplacement suivant l'axe $x_2 = 0$, on a :

$$\llbracket u_n \rrbracket(x) = \lim_{x_2 \rightarrow 0^+} u(x_1, x_2) - \lim_{x_2 \rightarrow 0^-} u(x_1, x_2),$$

G_c le taux de l'énergie critique restituée venant du modèle de [Griffith, 1920] et l_c la longueur interne caractéristique des modèles des forces cohésives. Le rapport $\frac{G_c}{l_c}$ décrit la contrainte critique de cohésion sous la forme :

$$\sigma_c = \frac{G_c}{l_c} \quad (3.33)$$

En terme de forces cohésives, la contrainte normal σ_{nn} correspondant à l'interaction entre les lèvres de fissure est égale à σ_c lorsque $0 < \llbracket u_n \rrbracket < l_c$ et s'annule dès que $\llbracket u_n \rrbracket > l_c$.

$$\sigma_{nn} = \begin{cases} \leq \sigma_c & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket = 0 \\ = \sigma_c & \text{si } 0 < \llbracket u_n \rrbracket < l_c \\ = 0 & \text{si } \llbracket u_n \rrbracket > l_c \end{cases} \quad (3.34)$$

Dans ce modèle, les lèvres de la fissure sont divisée en deux zones : une zone cohésive dans laquelle les forces cohésives sont égale à σ_c et une zone non cohésive ou il y a aucune force cohésive, comme le montre les figures ci-dessous.

L'ouverture critique est atteinte lorsque la contrainte $\sigma_\infty = \sigma_r$, elle est définie par l'expression $l_c = \frac{G_c}{\sigma_c^2}$. La taille limitant la zone cohésive ([Laverne, 2004], [Pham *et al.*, 2016], [Pham, 2016], [Rice, 1980] et [Rice et Wang, 1989]) est définie par l'expression :

$$T_{zc} = \frac{\pi}{8(1-\nu^2)} \frac{EG_c}{\sigma_c^2} \quad (3.35)$$

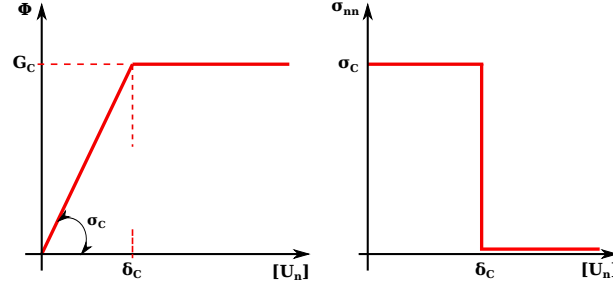


Figure 3.5: Modèle de Dugdale

3.6 Formulation mécanique du problème

La plaque élastique occupe dans la configuration initiale $\overline{\Omega}_P$ un domaine $(\Omega_P/\mathbb{D}) \subset \mathbb{R}^2$ borné régulier, à frontière Γ suffisamment régulière et constituée des parties $\partial_D \Omega_P$ et $\partial_N \Omega_P$ de mesure non nulle.

Soit Γ , la fissure dans $\Omega_P/\mathbb{D}$. Dans la configuration déformée $\overline{\Omega}_P^\varphi$, on a : $\Omega_P/(\mathbb{D} \cup \Gamma)$. La plaque est soumise à des forces surfaciques orthogonales à son plan de densité superficielle $f \in L^2(\Omega_P; \mathbb{R}^3)$. La frontière Γ de $\Omega_P/\mathbb{D}$ comprend deux parties ouvertes disjointes Γ_0, Γ_c , dont le complémentaire Γ est supposé formé d'un nombre fini de points. La plaque est supposée soumise sur Γ_c à des forces de densité linéique $g \in L^2(\Omega_P; \mathbb{R}^3)$. L'état des contraintes de la plaque est entièrement déterminé par un champ de tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}$ d'ordre 2 dans Ω_P . Les déplacements de la plaque sont entièrement déterminés par une fonction scalaire $u : \Omega_P \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x)$ représente le déplacement du point x de Ω_P dans la direction orthogonale à la plaque.

3.6.1 Cadre fonctionnel de résolution du problème

Dans la configuration déformée, le problème revient à trouver $\tilde{\underline{u}} \in \mathbb{C}_{ad}(\tilde{\underline{u}}_d)$ et $\underline{\underline{\sigma}} \in \mathbb{S}_{ad}(\underline{\underline{T}}^d)$, satisfaisant respectivement les équations d'équilibre et de comportement. Afin de résoudre le problème et fixer les idées, nous commençons par rappeler les espaces utilisés dans le cadre fonctionnel où le problème d'élasticité linéaire est résolu. Ces ensembles dépendent à la fois du chargement et de l'état de fissuration de la structure.

3.6.1.1 Ensembles des champs admissibles

Le cadre fonctionnel approprié à la résolution du problème consiste à travailler dans un sous-espace $H_{0,\Gamma}^1(\Omega_P)$ de $H^1(\Omega_P)$ défini par :

$$H_{0,\Gamma}^1(\Omega_P) = \{ \tilde{\underline{u}} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \mid \tilde{\underline{u}} \in H^1(\Omega_P); \quad \tilde{\underline{u}} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma, \quad i = 1, 2 \} \quad (3.36)$$

On introduit aussi le convexe fermé des champs de déplacements cinématiquement admissibles $\mathbb{C}_{ad}$ avec les déplacements imposés $\tilde{u}_d$.

$$\mathbb{C}_{ad}(\tilde{u}_d) = \{\tilde{u} \mid \tilde{u} \in H^1(\Omega_P), \quad \tilde{u} = \tilde{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial_D \Omega_P; \quad \llbracket \tilde{u} \rrbracket \cdot n \geq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\} \quad (3.37)$$

L'espace $H^1(\Omega_P; \mathbb{R}^2) = \{\underline{\sigma} \in L^2(\Omega_P; \mathbb{R}), \quad \text{div} \underline{\sigma} \in L^2(\Omega_P)\}$, est un espace de Hilbert pour la norme $\|\cdot\|_1$. Pour les contraintes, d'après la loi fondamentale de la mécanique ([Duvaut et Lions, 1972] dans [Temam, 1983]), le champ de tenseur $\underline{\sigma}$ doit vérifier les conditions aux limites et les équations d'équilibres dans Ω_P . Cela nous ramène à définir l'ensemble $\mathbb{S}_{ad}(\underline{T}^d)$ des contraintes statiquement admissible avec les efforts imposés ($\underline{T}^d$) défini par :

$$\mathbb{S}_{ad}(\underline{T}^d) = \{\underline{\sigma} \mid \text{div} \underline{\sigma} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_P, \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \quad \text{sur} \quad \Gamma_d, \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \sigma_{nn} \underline{n} \quad \text{sur} \quad \Gamma\} \quad (3.38)$$

Il est utile d'introduire au point $\underline{0} = (0, 0)$ (centre de symétrie où s'initie la fissure cohésive), l'ensemble $\mathbb{C}_{ad}(\underline{0})$ des déplacements cinématiquement admissible à zéro et l'ensemble $\mathbb{S}_{ad}(\underline{0})$ statiquement admissible à zéro définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}_{ad}(\underline{0}) &= \{\tilde{u} \mid \tilde{u} \in H^1(\Omega_P) \quad \tilde{u} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_D \Omega_P, \quad \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma\} \\ \mathbb{S}_{ad}(\underline{0}) &= \{\underline{\sigma} \mid \underline{\sigma} \in L^2(\Omega_P; \mathbb{R}), \quad \text{div} \underline{\sigma} = 0, \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial_T \Omega_P\} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Le vecteur $\tilde{u} \in \mathbb{C}_{ad}$ associe à l'énergie totale de la structure $\varepsilon(\sigma, l_f)$ comme une somme de l'énergie élastique. A l'équilibre du corps fissuré, l'énergie totale est fonction de la charge $\sigma \in C^2(\Omega_P; \mathbb{R})$ et de la position de $u \in C^2(\Omega_P)$ en tête de fissure.

Dans le domaine $\Omega_c^0 = \Omega_P / (\mathbb{D} \cup \Gamma)$, le problème d'élasticité linéaire avec condition de type unilatérale sur la fissure consiste à trouver le champ de déplacement $\tilde{u} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \in \mathbb{R}^2$ et le champ de contrainte $\sigma \in \mathbb{R}^2 = \{\tau \in \mathbb{R}^2 : \tau = \tau^T\}$ satisfaisant les équations suivantes :

$$\Omega_c^0 = \Omega_P / (\mathbb{D} \cup \Gamma); \quad \Gamma = (-l, -d] \times \{0\} \cup [+d, +l) \times \{0\} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \text{div} \sigma_{ij} &= 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_c^0 \\ \sigma_{ij} &= 2\mu \varepsilon_{ij}(u) + \lambda \text{tr} \varepsilon_{ij}(u) \delta_{ij} \quad \text{dans} \quad \Omega_P / \mathbb{D} \\ \sigma_{ij} n_j &= 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega_P \\ \sigma_{ij} e_1 &= 0 \quad \text{sur} \quad (\pm L) \times (-L, +L) \\ \sigma_{ij} e_2 &= \sigma_\infty e_2 \quad \text{sur} \quad (-L, +L) \times (\pm L) \\ \sigma_{ij} e_2 &= \sigma_c e_2 \quad \text{sur} \quad \Gamma \end{aligned} \quad (3.41)$$

La loi gouvernant l'évolution de fissure en tenant compte du chargement est d'écrit par l'énergie totale en fonction de la charge σ et la longueur l_f de fissure. L'énergie totale de surface due aux forces cohésives s'écrit :

$$\varepsilon_{s_T}(\sigma, l_f) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_P / (\mathbb{D} \cup \Gamma)} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\tilde{u}) dx + \int_{\Gamma} \phi(\llbracket \tilde{u}_2 \rrbracket) dx_1 - \int_{\partial \Omega_P} \sigma \tilde{u}_2 n_2 ds \quad (3.42)$$

Le champ de déplacement dans l'intervalle $[d, L)$ minimise l'énergie locale et l_f est supposé être un point stationnaire de la déformation $\varepsilon(\sigma, \cdot)$. Le problème variationnel sous la forme d'une minimisation locale est introduite, on considère aussi la condition de stabilité locale déduite des propriétés du champ de contrainte.

3.6.2 Définition

Le champ $\tilde{u}$, parmi l'ensemble des champs de déplacements cinématiquement admissible $\mathbb{C}_{ad}$, minimise localement l'énergie totale de la structure ε . Formellement, $\tilde{u}$ satisfait les conditions suivantes :

1. - $\tilde{u} \in \mathbb{C}_{ad}$,
2. - $\exists h > 0, \forall \tilde{u} \in \mathbb{C}_{ad} : \tilde{u} \in [d, L), \|\tilde{u} - u\|_1 \leq h$ tel que $\varepsilon_{s_T}(\sigma_\infty, u) \leq \varepsilon_{s_T}(\sigma_\infty, \tilde{u})$.

Le champ des contraintes se calcule grâce à la loi de comportement élastique $\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda \text{tr} \varepsilon_{ij} \delta_{ij}$ et la fissure correspond à l'ensemble des points de discontinuités du champ de déplacement u .

3.7 Évolution de la fissure et méthodologie de résolution du problème

3.7.1 Orientation

Pour la structure, on considère une plaque avec fissure de longueur $2a$ située au centre. La plaque est chargée uniformément en traction sur les deux bords latéraux, les deux autres bords sont libre. Dans la phase élastique (i), la plaque possède un défaut $\mathbb{D}$ au centre et la dans la phase de rupture (ii), une fissure suivant la direction x_1 . La situation est présentée dans les figures 3.5 suivantes :

L'ensemble de la phase élastique (i) à la phase de rupture (ii) s'accompagne des hypothèses de symétrie et de chargement.

3.7.1.1 Hypothèse de régularité

A l'instant t , l'ensemble des points de discontinuités $\mathbb{S}_{u(t)}$ du champ de déplacement $u(t)$ est supposé vide, donc qu'il existe au centre $\underline{0} = (0, 0)$, une longueur $q(t)$ telle que $\mathbb{S}_{u(t)} = (-q(t), q(t)) \times \{0\}$.

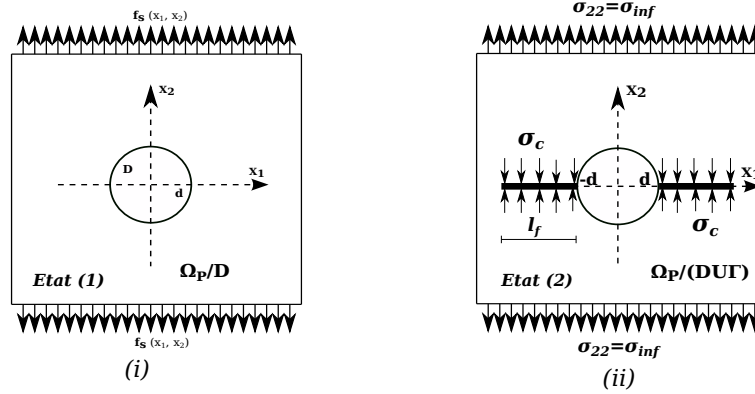


Figure 3.6: État de fissure : (i) phase élastique, (ii) phase de rupture purement cohésive

3.7.1.2 Hypothèse de symétrie et d'uniformité

Pour $\mathbb{S}_u(t)$ non vide, l'ouverture de fissure $\llbracket u_2(t) \rrbracket$ est une fonction continue de x_1 , maximale à $x_1 = 0$ et décroissante à 0 lorsque $|x_1| \mapsto q(t)$.

3.7.1.3 Résolution de la phase purement cohésive

Soit $L_{zc} = [-q, -d] \cup [+d, +q] \times \{0\}$, la longueur de la zone cohésive (voir figure ci-dessus) et $\Gamma_c = \Gamma_c^+ \cup \Gamma_c^-$, sa surface. Sur cette phase de rupture purement cohésive, l'axe $\mathcal{O}x_1$ est soumis à la contrainte cohésive σ_c uniforme. Sur la surface Γ_c^+ où la contrainte est appliquée, on a : $-q \leq t \leq +q$ et $P = \sigma_c$. La surface Γ_c^+ de la zone cohésive est définie par les conditions aux limites $\sigma_{22} = N(t)$ et $\sigma_{21} = T(t)$ où $N(t)$ et $T(t)$ sont des fonctions continues de l'abscisse t lesquelles représentent les contraintes normale et tangentielle. En introduisant deux fonctions analytiques de z , $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$, où la variable complexe s'exprime par $z = x_1 + ix_2$, les contraintes et les déplacements sont donnés par les formules bien connues de Muskhelishvili ([Muskhelishvili, 1954]).

$$\sigma_{22}(x, y) - i\sigma_{12}(x, y) = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \quad (3.43)$$

Les conditions aux limites sont celles utilisées dans [Muskhelishvili, 1954] :

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = N - iT \quad (3.44)$$

ou

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = N + iT \quad (3.45)$$

Dans le cas de forces cohésives, $N = -P$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-q}^{+q} \frac{N - iT}{t - z} dt \quad (3.46)$$

$$\Psi(z) = -\frac{zP}{2\pi i} \int_{-q}^{+q} \frac{dt}{(t-z)^2} \quad (3.47)$$

Après développement on :

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-q}^{+q} \frac{dt}{t-z} = -\frac{P}{2\pi i} \int_{-q}^{+d} \frac{dt}{t-z} - \frac{P}{2\pi i} \int_{-d}^{+q} \frac{dt}{t-z} \quad (3.48)$$

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2\pi i} [\ln(z-t)]_{t=-q}^{t=+d} - \frac{P}{2\pi i} [\ln(z-t)]_{t=+d}^{t=+q} \quad (3.49)$$

d'où

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2\pi i} \ln \frac{z-q}{z+q} \quad (3.50)$$

$$\Psi(z) = -\frac{Pqz}{\pi i(z^2 - q^2)} \quad (3.51)$$

Dans l'équation ci-dessus, le terme $\ln \frac{z-q}{z+q}$ signifie, l'accroissement de la fonction $\ln(z-t)$ pour un chargement continue de t à $-q$ et $+q$. Plus clairement $z-t = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho = |z-t|$ et θ l'angle mesuré entre les vecteurs à partir de t jusqu'à z dans l'axe $\mathcal{O}x$ qui se trouve entre 0 et π mesuré dans l'axe $\mathcal{O}x$ dans le sens horaire. $\ln(z-t) = \ln \rho - i\theta$, $\ln \frac{z-q}{z+q} = \ln \frac{\rho_1}{\rho_2} - i(\theta_1 - \theta_2)$. où $(\theta_1 - \theta_2)$ est l'angle substitué de z par le chargement du segment Γ_c^+ suivant l'axe $\mathcal{O}x_1$.

Les composantes des contraintes seront calculées à partir des relations :

$$\sigma_{11}(x, y) + \sigma_{22}(x, y) = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] = 4R\Phi(z) = -\frac{2P}{\pi}(\theta_1 - \theta_2) \quad (3.52)$$

$$\sigma_{22}(x, y) - \sigma_{11}(x, y) + 2i\sigma_{12}(x, y) = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] = \frac{2Pq}{\pi i} \frac{\bar{z} - z}{z^2 - q^2} = -\frac{4Pqy}{\pi(z^2 - q^2)} \quad (3.53)$$

finalemt on a :

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x, y) &= -\frac{P}{\pi}(\theta_1 - \theta_2) + \frac{2Pqy(x^2 - y^2 - q^2)}{\pi[(x^2 + y^2 - q^2)^2 + 4q^2y^2]} \\ \sigma_{22}(x, y) &= -\frac{P}{\pi}(\theta_1 - \theta_2) - \frac{2Pqy(x^2 - y^2 - q^2)}{\pi[(x^2 + y^2 - q^2)^2 + 4q^2y^2]} \\ \sigma_{21}(x, y) &= \frac{4Pqxy^2}{\pi[(x^2 + y^2 - q^2)^2 + 4q^2y^2]} \end{aligned} \quad (3.54)$$

La loi de distribution des contraintes plus simple devient, si on écrit le terme $(z^2 - q^2)$ sous la forme :

$$z^2 - q^2 = \rho_1 \rho_2 e^{-i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (3.55)$$

puis

$$\sigma_{22}(x, y) - \sigma_{11}(x, y) + 2i\sigma_{12}(x, y) = -\frac{4Pqy}{\rho_1\rho_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \quad (3.56)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \sigma_{11}(x, y) &= -\frac{P}{\pi}(\theta_1 - \theta_2) + 2Pq \frac{y(\cos(\theta_1 - \theta_2))}{\rho_1\rho_2} \\ \sigma_{22}(x, y) &= -\frac{P}{\pi}(\theta_1 - \theta_2) - 2Pq \frac{y\cos(\theta_1 - \theta_2)}{\rho_1\rho_2} \\ \sigma_{21}(x, y) &= -2Pq \frac{y\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\rho_1\rho_2} \end{aligned} \quad (3.57)$$

Les formules montrent que les composantes sont continus jusqu'à la frontière, si les points $t = \pm q$ sont exclus. A ces points, la fissure cesse d'être continues mais reste liée, les conditions aux limites sur la frontière sont satisfaisantes. Les composantes du déplacements sont également calculés, il demeurent continu jusqu'à la frontière des points $t = \pm q$.

3.7.2 Scénario de fissuration et méthodologie de résolution

Il s'agit d'un modèle de fissure de longueur finie dans une plaque soumise aux efforts de tractions uniforme $\sigma_{22} = \sigma_\infty$. Le modèle est caractérisé par la présence des forces de cohésions d'intensité constante en pointe de fissure, voir dans [Bui, 1978] où une solution détaillée du problème est donnée.

3.7.2.1 Configuration initiale : phase élastique (étape : 1)

(i) A l'état initial ou phase élastique, la structure (étape (1)) présente un défaut $\mathbb{D}$. La fissure Γ est absente *i.e.*, $q(t) = 0$ et $\mathbb{S}_{u(t)} = 0$. La réponse de la structure est purement élastique, donc l'ensemble de l'état de fissuration de cette phase satisfaisant à la condition de stabilité locale qui définit la branche élastique.

3.7.2.2 Configuration déformée : phase de rupture (étape : 2)

(ii) La déformation de la structure après fissuration, est la phase de rupture proprement dite. La réponse de la structure n'est plus élastique, la rupture apparaît aux points $(\pm d, 0)$ où il y a des fortes concentrations des contraintes. La fissure se propage symétriquement suivant la direction de l'axe x_1 . Cette phase de rupture possède des solutions. La méthodologie amenant à l'obtention de ses différentes solutions est expliquée à partir des cas particuliers.

3.7.3 Cas particuliers importants

3.7.3.1 Orientation

Dans la phase de rupture avec cohésion étape (2), Il convient de particulariser ce qui précède en distinguant deux cas importants :

(ii)₁ un premier cadre où l'étape (2) avec fissure est maintenant notée étape (2.1). Cet étape (2.1) se subdivise en deux sous-phases non-cohésive (2.1a) où la contrainte de cohésion est nulle et en sous-phase purement cohésive (2.1b) où il y a la présence des forces cohésives, voir les figures ci-dessous. La superposition de ces deux sous-phases donne l'étape principal de rupture (2.1).

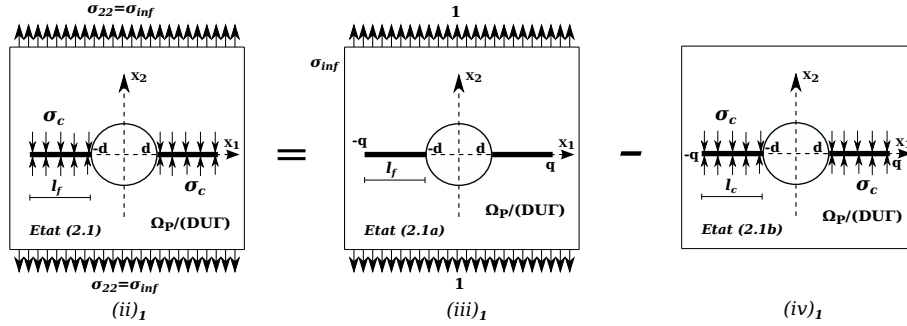


Figure 3.7: (ii)₁ Évolution et répartition des forces cohésives : (iii)₁ fissure non-cohésive, (iv)₁ fissure purement cohésive

(ii)₂ un deuxième cadre où l'étape (2) avec fissure est maintenant notée étape (2.2). Cet étape (2.2) se subdivise également en deux sous-phases non-cohésive (2.2a) avec une contrainte de cohésion nulle sur toute la longueur de la fissure, comme dans la première phase (2.1a) et une autre sous-phase (2.2b) constituée de l'addition de la partie cohésive et de la partie non-cohésive. En conséquence, la sous-phase (2.2b) est partiellement cohésive. On distingue pour cette sous-phase, la zone partiellement cohésive et la zone non-cohésive.

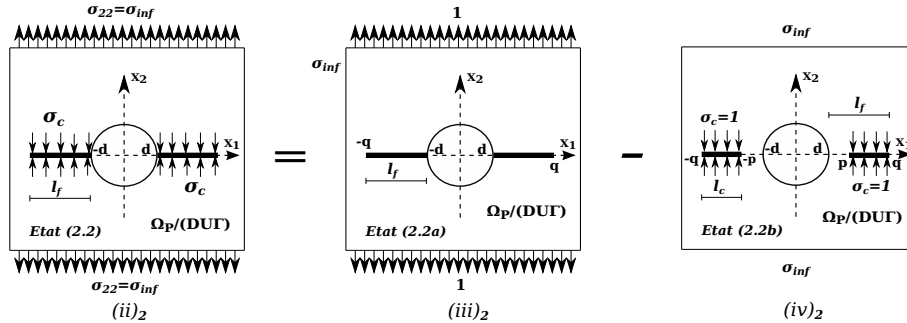


Figure 3.8: (ii)₂ Évolution et répartition des forces cohésives : (iii)₂ fissure non-cohésive, (iv)₂ fissure partiellement cohésive

3.7.4 Remarque

La phase de rupture de l'étape (2.1) est bien sûr identique à la phase de rupture de l'étape (2.2).

(iii)₁ Dans la sous-phase (2.1a), on impose la valeur de contrainte à l'unité, la fissure est libre sans forces de cohésion en pointe $p(t)$. Le Facteur d'Intensité des Contraintes FIC est fonction de la longueur de la fissure $K_I^f(l_f)$.

(iv)₁ Dans cette sous-phase (2.1b), la plaque présente une fissure que nous définissons de purement cohésive. Toute la lèvres de la fissure est supposée être soumise à la contrainte de cohésion σ_c . L'ouverture de la fissure à lieu a $x_1 = \pm d$ est inférieure à la valeur critique δ_c du modèle de Dugdale *i.e.*, $q(t) > 0$ et $\llbracket u_2(t) \rrbracket(d) \leq \delta_c$

(iii)₂ La sous-phase (2.2a) est identique à la sous-phase (2.1a) vu à la section (iii)₁. Les caractéristiques et les hypothèses sont partout les mêmes.

(iv)₂ Dans la sous-phase notée (2.2b), il existe dans la plaque une fissure dont l'ouverture à $x_1 = \pm d$ est supérieure à δ_c , *i.e.* $q(t) > 0$ et $\llbracket u_2(t) \rrbracket(d) \geq \delta_c$. Dans ce cas, l'ouverture de fissure est une fonction constante de $|x_1|$ et décroissante à $(\pm d)$. Le chargement et la géométrie de la plaque étant tous deux symétriques, il existe deux points $(-p(t), 0)$ et $(p(t), 0)$ pour $0 < p(t) < q(t)$ aux quels $\llbracket u_2(t) \rrbracket(-p(t)) = \delta_c$ et $\llbracket u_2(t) \rrbracket(p(t)) = \delta_c$ respectivement. En conséquence, la longueur de fissure se divise en deux parties que son la zone cohésive où la contrainte de cohésion est égale à la contrainte critique cohésive du modèle de Dugdale σ_c et la zone non-cohésive où la contrainte de cohésion s'annule. La formulation mathématique synthétisant la sous-phase (2.2b) partiellement cohésive est la suivante :

$$\left| \begin{array}{ll} \llbracket u_2 \rrbracket(x_1) > \delta_c, & \sigma_{22}(x_1, 0) = 0, \quad \text{si } |x_1| < p(t) \\ 0 < \llbracket u_2 \rrbracket(x_1) < \delta_c, & \sigma_{22}(x_1, 0) = \sigma_c, \quad \text{si } p(t) < |x_1| < q(t) \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Les forces de cohésion ont une amplitude constante égale à la limite élastique du modèle de Dugdale. L'évolution des pointes de la zone cohésive $q(t)$ et de la zone non cohésive $p(t)$ font l'objet d'une identification particulière dans cette étude. La propagation (symétrique) des 2 fissures cohésives, leur longueur est telle qu'il n'y ait pas de singularité aux pointes $p(t)$ et $q(t)$.

3.7.5 Proposition en pointes de la zone cohésive $l_c \in [-q(t); q(t)]$

3.7.5.1 Facteur d'Intensité de Contraintes FIC

On se situe dans le cas de l'élasticité plane, où la déformation est caractérisée par le fait que l'une des composantes cartésiennes du déplacement $u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$

et $u_3 = 0$ est nulle et que les deux autres ne dépendent pas de la variable d'espace correspondant à la composante nulle.

En pointe de fissure de la zone cohésive aux points $(\pm q(t), 0)$, la continuité des déplacements impose en mode I que le FIC $K_I = 0$, *i.e.*, la singularité n'est pas autorisée en pointe. Le FIC s'obtient par application du principe de superposition associant le chargement extérieur en fonction de la longueur de la fissure $K_I^f(l_f)$ à la distribution des forces de cohésions en fonction de la longueur cohésive $K_I^c(l_c)$, avec $l_c \sim l_f$.

$$K_I = K_I^f(l_f) + K_I^c(l_c \sim l_f) \quad (3.59)$$

3.7.5.2 Démonstration

Désignons par $\sigma_{2i}(x_1, 0)$ avec $i = 1, 2$, la contrainte sur la ligne droite occupée par la fissure. Au voisinage des pointes de la fissure cohésive $(\pm q(t), 0)$, le champ de déplacement $u(t)$ et le champ de contrainte $\sigma_{2i}(x_1, 0)$ doit satisfaire la relation de comportement et les conditions aux limites $\sigma_{2i}(x_1, 0) = \sigma_{2i}^0(x_1, 0)e_2$ sur les lèvres de la fissure et $\sigma_{ij} \mapsto 0$ à l'infini. Les détails de la solution sont donnés dans [Bui, 1978]. Le taux d'énergie restituée dû à la croissance de la fissure doit être nul. Ce critère énergétique fait disparaître la singularité en pointe. La singularité est alors semblable à celle d'une fissure non-cohérente ou le champ de déplacement $u(t)$ au voisinage de la pointe $(q(t), 0)$ est de la forme :

$$u(x) = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} u(\theta) + \bar{u}(x) \quad (3.60)$$

avec $u(\theta) = (3 - 4\nu - \cos \theta)(\cos \frac{\theta}{2} e_1 + \sin \frac{\theta}{2} e_2)$, (r, θ) dénote les coordonnées polaires et $\bar{u}(x)$, la partie régulière du champ de déplacement singulier correspondant au mode I. Le saut normale de déplacement en pointe de la zone cohésive $(q(t), 0)$ est de la forme :

$$[[u_2(t)]](x_1) = \frac{8(1 - \nu^2)K_I}{E} \sqrt{\frac{q(t) - x_1}{2\pi}} \quad (3.61)$$

Le saut $[[u_2(t)]](x_1) \geq 0$ ainsi que le FIC $K_I \geq 0$, ce qui veut dire que la contrainte normale $\sigma_{22}(t, 0)$ sur $\theta = 0$ au point $(q(t), 0)$ devient :

$$\sigma_{22}(t)(x_1, 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi(x_1 - q(t))}} \quad (3.62)$$

Si $\sigma_{22}(t)(x_1, 0) \leq \sigma_c$, le FIC K_I non positif, on a par conséquent $K_I = 0$.

3.7.6 Ouverture de la fissure en pointes de la zone non-cohérente

3.7.6.1 Proposition

La position $p(t)$ de la pointe de la zone non-cohérence, devrait satisfaire à la condition suivante concernant l'ouverture de la fissure $[[u_2(t)]](\pm p(t)) = \delta_c$.

3.7.6.2 Démonstration

Soit q_φ , la position arbitraire de la pointe de fissure de la zone cohésive et p_φ , la position arbitraire de la pointe de fissure de la zone non-cohésive. Le couple (p_φ, q_φ) respecte les conditions : $0 < p_\varphi < q_\varphi$, avec $(q_\varphi, 0) \in \Gamma$ et $(p_\varphi, 0) \in \Gamma$. Soit $u^\varphi \in \mathbb{C}_{ad}$ un champ de déplacement cinématiquement admissible. Les zones cohésive et non-cohésive de la fissure sont respectivement définies :

$$\begin{cases} \Gamma_{zc}^\varphi = \{x \in \Omega_P / \mathbb{D} \mid 0 < \llbracket u^\varphi \rrbracket(x_1) < \delta_c\} = (-q_\varphi, -p_\varphi) \cup (p_\varphi, q_\varphi) \times \{0\} \\ \Gamma_{znc}^\varphi = \mathbb{S}_{u^\varphi} / \Gamma_{zc} = (-p_\varphi, p_\varphi) \cup \{0\} \end{cases} \quad (3.63)$$

Sur la zone cohésive; σ_{coh} est la contrainte de cohésion qui s'annule sur la zone non-cohésive. L'énergie totale de la structure a près déformation fonction du champ de déplacement u^φ et de longueurs cohésive $(-q_\varphi, q_\varphi)$ et non-cohésive (p_φ, p_φ) s'exprime par la relation.

$$\varepsilon_{to}(u^\varphi, p_\varphi, q_\varphi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_P / (\mathbb{D} \cup \mathbb{S}_{u^\varphi})} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(u^\varphi) dx + \int_{\Gamma_{zc}^\varphi} \sigma_{coh} \llbracket u_2^\varphi \rrbracket dx_1 + \int_{\Gamma_{znc}^\varphi} G_c dx_1 - \int_{\partial_N \Omega_P} F u^\varphi ds \quad (3.64)$$

Dans cette expression, G_c est la valeur critique du taux de restitution d'énergie de Griffith. L'évolution de la fissure en pointe de la zone cohésive q_φ et non-cohésive p_φ doit être tels qu'un minimum local de déformation $\varepsilon_{to}(u^\varphi, p_\varphi, q_\varphi)$ est donné sous la forme :

$$\begin{cases} \exists h(t) > 0, \quad u^\varphi \in \mathbb{C}_{ad}, \quad \forall (u^\varphi, p_\varphi, q_\varphi), \quad d \leq p_\varphi \leq q_\varphi \leq L, \quad \|u^\varphi - u(t)\| \leq h(t) \\ |q_\varphi - q(t)| + |p_\varphi - p(t)| \leq h(t), \quad \varepsilon_{to}(u(t), q(t), p(t)) \leq \varepsilon_{to}(u^\varphi, q_\varphi, p_\varphi) \end{cases} \quad (3.65)$$

Les déplacements u^φ et les points arbitraires q_φ et p_φ respectivement dans la zone cohésive et non-cohésive sont choisis tels que $u^\varphi = u(t)$, $q_\varphi = q(t)$ et $p_\varphi = p(t) + h\zeta$: avec $h > 0$, pouvant être arbitrairement petit. Dans ce cas, la condition de stabilité d'énergie de déformation totale devient égale à : $\varepsilon_{to}(u^\varphi, q_\varphi, p(t) + h\zeta) - \varepsilon_{to}(u(t), p(t), q(t)) \geq 0$. Au point $x_1 = \pm p(t)$, le champ de déplacement n'est pas singulier et le chargement est discontinu. Le taux d'énergie totale restituée dû à la propagation est de la forme :

$$-\frac{\partial \varepsilon_{to}}{\partial p(t)}(u^\varphi, q(t), p(t)) = 2\sigma_c \llbracket u_2(t) \rrbracket(p(t)) - 2G_c \quad (3.66)$$

comme $\frac{\partial \varepsilon_{to}}{\partial p(t)}(u^\varphi, q(t), p(t)) = 0$, $\rightsquigarrow 2\sigma_c \llbracket u_2(t) \rrbracket(p(t)) - 2G_c = 0$. En tenant compte de l'état d'équilibre de déformation on peut écrire : $2\sigma_c \llbracket u_2(t) \rrbracket(p(t))\zeta - 2G_c\zeta \geq 0$. Le critère de propagation de la fissure est donc équivalent au critère d'ouverture $\llbracket u_2(t) \rrbracket(p(t)) = \delta_c$ avec $\delta_c = \frac{G_c}{\sigma_c}$. La proposition est démontrée.

Table 3.1: Paramètres géométriques de la plaque

Matériau	Acier
Module d'Young E (GPa)	210
Coefficient de Poisson ν	0.30
Longueur = Largeur L (m)	0.20
Épaisseur e_p (mm)	0.04

3.8 Évolution de la fissuration : effet d'échelle

Selon [Marigo, 2010], les effets d'échelles sont automatiquement présent dans un système quelconque subissant une procédure d'évolution de la fissuration. En sachant que le critère de propagation de Griffith est basé sur la comparaison entre l'énergie potentielle d'une structure qui est volumique et l'énergie de fissuration qui elle est surfacique. De ces deux considérations énergétiques naît la longueur interne.

Soit l_f la longueur de la fissure définie telle que $l_f = f(I)$, $f : I \rightarrow \Omega_P/\mathbb{D}$, I : intervalle compacte de $\mathbb{R}$, une fissure droite dans la configuration initiale. Dans la configuration déformée, $l_f^\varphi = \varphi(l_f)$ avec $l_f^\varphi = T_{zc}$ écrit ultérieurement. La longueur caractérisant la taille de la zone cohésive T_{zc} est autant plus petite que la longueur de la fissure l_f et est aussi beaucoup plus petite que la taille L de la structure. On peut écrire : $T_{zc} \ll L$ et $l_f \ll L$. Dans la suite de cette étude, l'effet d'échelle est pris en compte pendant la procédure d'évolution de la fissuration.

3.8.1 Étude de la phases élastique $0 \leq \sigma_\infty \leq \sigma_e$

L'exploitation des symétries du problème suivant les axes permet de réduire le maillage éléments finis au quart de la plaque. Des éléments triangulaire fins sont utilisés au droit de la fissure et en point de celle-ci. Les calculs sont effectués pour une fissure au centre. La plaque est carrée avec une cavité circulaire $\mathbb{D}$ et une charge σ_∞ uniformément répartie. Les paramètres géométriques définis dans le tableau 3.1 sont ceux utilisés dans le problème analytique par [Ferdjani *et al.*, 2007].

Les conditions aux limites suivantes sont appliquées à la plaque : une face latérale est bloqué dans la direction x_1 , le ligament non fissurée est bloqué suivant la direction x_2 et la plan de symétrie vertical de l'éprouvette est bloqué suivant x_1 . Les lois de comportement utilisées sont celles qui ont été identifiées analytiquement. Cette phase élastique est caractérisée par la concentration des contraintes aux points $(\pm d, 0)$. Le problème revient de trouver le champ de déplacement u et de contraintes σ vérifiant les relations :

$$\begin{cases}
div \sigma_{ij} = 0 & \text{dans } \Omega_P / \mathbb{D} \\
\sigma_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij}(u) + \lambda tr \varepsilon_{ij}(u) \delta_{ij} & \text{dans } \Omega_P / \mathbb{D} \\
\sigma_{ij} n_j = 0 & \text{sur } \partial_N \Omega_P \\
\underline{u} = \underline{u}_d & \text{sur } \partial_D \Omega_P \\
\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) & \text{dans } \Omega_P
\end{cases} \quad (3.67)$$

La distribution de contrainte normale le long de la fissure Γ est donnée par l'expression $\sigma_{22}(x_1, 0)$.

3.8.2 Étude de la phase purement cohésive

La fissure de longueur $l_f = 2a$ est supposée purement cohésive avec $l_f > 0$ à l'instant $t > 0$. Soient $(-q(t), 0)$ et $(+q(t), 0)$, les points définissant les pointes de la longueur cohésive à l'instant t . Les équations d'équilibres de la structure fissurée soumise à la contrainte de cohésion uniforme sur les lèvres de la fissure sont :

$$\begin{cases}
div \sigma_{ij}[t, q(t)] = 0 & \text{dans } \Omega_P / (\mathbb{D} \cup ([-q(t), q(t)] \times \{0\})) \\
\sigma_{ij}[t, q(t)] = 2\mu \varepsilon_{ij}(u[t, q(t)]) + \lambda tr \varepsilon_{ij}(u[t, q(t)]) \delta_{ij} & \text{dans } \Omega_P / (\mathbb{D} \cup ([-q(t), q(t)] \times \{0\})) \\
\underline{u}[t, q(t)] = t \underline{u}_d & \text{sur } \partial_D \Omega_P \\
\sigma_{ij}[t, q(t)] n_j = t T & \text{sur } \partial_N \Omega_P \\
\sigma_{ij}[t, q(t)] e_2 = \sigma_c e_2 & \text{sur } [-q(t), q(t)] \times \{0\}
\end{cases} \quad (3.68)$$

Le champ associé de déplacement $u[t, q(t)]$ et de contrainte $\sigma_{ij}[t, q(t)]$ sont solution du système. Il est important de noter que les hypothèses de symétries utilisées dans la partie élastique restent aussi valables pour la phase de fissuration avec cohésion. La longueur de la fissure étant beaucoup plus petite par rapport aux dimensions de la structure $l_f \ll L$ voir [Pham *et al.*, 2016], la perturbation se situe seulement au niveau du champ élastique au voisinage du point $(\pm d, 0)$ du début de la fissure. La différence entre la solution cohésive et la solution non-cohésive donne :

$$\begin{cases}
\Delta \sigma[t, q(t)] = \sigma[t, q(t)] - \sigma(t) = \sigma[t, q(t)] - t \sigma \\
\Delta u[t, q(t)] = u[t, q(t)] - u(t) = u[t, q(t)] - t u \\
\Delta \sigma_{22}[t, q(t)] = \sigma_c - \Sigma(x_1) = \sigma_c - t \Sigma(x_1, 0)
\end{cases} \quad (3.69)$$

La fonction $\Delta \sigma[t, q(t)](x) \mapsto 0$ lors que $|x| > q(t)$. Sur la fissure, la différence de contrainte normale vérifie la condition $\Delta \sigma_{22}[t, q(t)](x_1) = \sigma_c - t \Sigma(x_1, 0)$ donnée par l'expression :

$$\Delta\sigma_{22}[t, q(t)](x_1) = \sigma_c \left(1 - \frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{l^2} \right) e_2 + 0(x_1^2) \quad \text{pour } |x_1| < q(t) \quad (3.70)$$

Dans le cas où $q(t) = L$ ou $q(t) \ll L$, le terme $0(x_1^2)$ définissant le reste dans l'équation de développement limité devient négligeable. En conséquence, le problème revient à écrire le champ des différences $(\Delta u[t, q(t)], \Delta \sigma[t, q(t)])$ solution du système dans un voisinage proche du point où démarre la fissuration sous la forme :

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{div} \Delta \sigma_{ij}[t, q(t)] = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 / ([-q(t), q(t)] \times \{0\}) \\ \Delta \sigma[t, q(t)] = 2\mu \varepsilon_{ij}(u[t, q(t)]) + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon_{ij}(u[t, q(t)]) \delta_{ij} \quad \text{dans } \mathbb{R}^2 / ([-q(t), q(t)] \times \{0\}) \\ \Delta \sigma[t, q(t)](x) \rightarrow 0 \quad \text{pour } |x| \rightarrow \infty \\ \Delta \sigma_{22}[t, q(t)](x_1, 0) e_2 = \sigma_c \left(1 - \frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{l^2} \right) e_2 \quad \text{pour } x_1 \in [-q(t), +q(t)] \end{array} \right. \quad (3.71)$$

Pour résoudre le système analytiquement, des simplifications ont été prises en compte. La contrainte normale associée à la résolution du système est donnée par la relation :

$$\sigma_{22}[t, q(t)](x_1, 0) = \sigma_c \left(1 - \frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{l^2} \right) \quad (3.72)$$

Il est important d'insister sur le fait que les équations ne sont seulement valables que dans le cadre des hypothèses suivantes : élasticité linéaire, milieu plan, chargement quasi-statique et mode I de fissuration. On se place dans la zone proche de la fissuration $r \rightarrow 0$. La zone cohésive est définie comme un milieu bidimensionnel fini sollicité en mode I. Le FIC est proportionnel à la différence des charges $\Delta \sigma_{22}[t, q(t)](x_1, 0)$ et à la racine carrée de la longueur de la fissure $K_I = \Delta \sigma_{22}[t, q(t)](x_1) \sqrt{\pi q(t)}$. En sachant que, $\Delta \sigma_{22}[t, q(t)] = \sigma_c \left(1 - \frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{l^2} \right)$. On pointe de la zone cohésive, le FIC se calcul comme suivant :

$$K_I[t, q(t)] = \sigma_c \sqrt{\pi q(t)} \left(1 - \frac{t}{t_e} + 2\frac{t}{t_e} \frac{x_1^2}{l^2} \right) \quad (3.73)$$

Aux points $(-q(t), 0)$ et $(+q(t), 0)$, la longueur de la zone cohésive s'ajuste pour que les contraintes en ces points ne soient pas singulières. En conséquence $K_I(\pm q(t)) = 0$.

$$q(t) = l \left(1 - \frac{t_e}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.74)$$

Les figures ci-dessous donnent les courbes d'évolutions des zones cohésives :

3.8.3 Étude de la phase partiellement cohésive

Dans cette phase, marquée par la présence des forces de cohésion particulières, d'intensité constante comme dans le modèle de Dugdale (voir dans [Bui, 1978]). Nous désignons

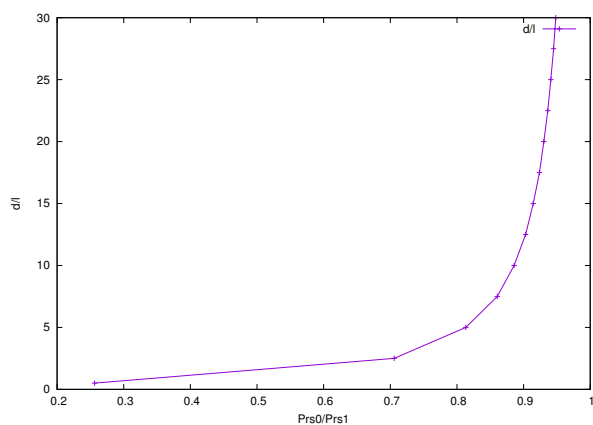


Figure 3.9: Courbe d'évolution de la zone cohésive

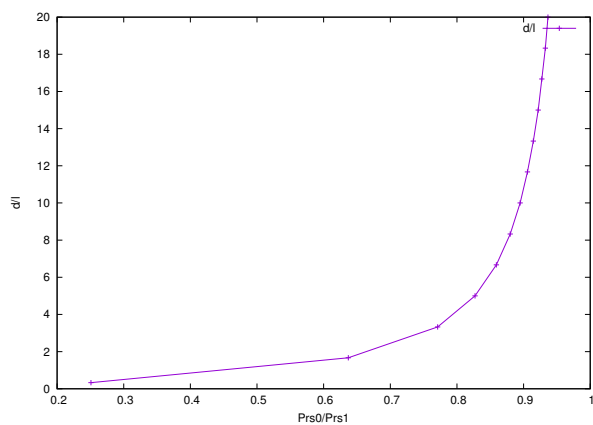


Figure 3.10: Courbe d'évolution de la zone cohésive

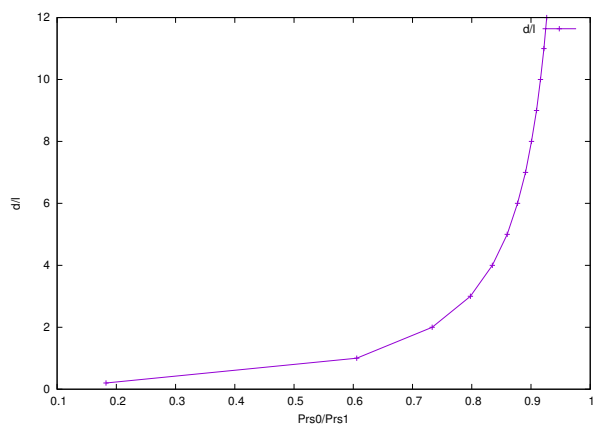


Figure 3.11: Courbe d'évolution de la zone cohésive

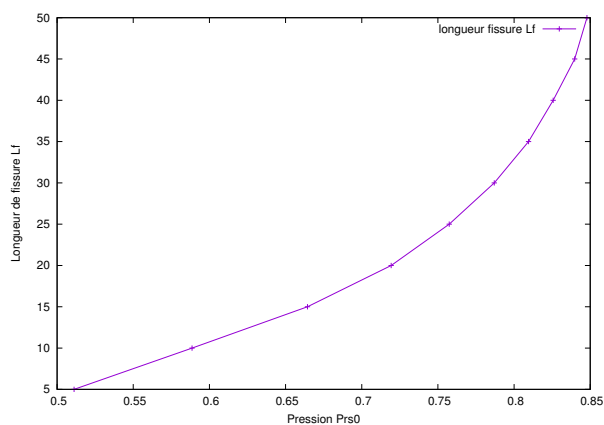


Figure 3.12: Courbe de chargement : cas purement cohésif

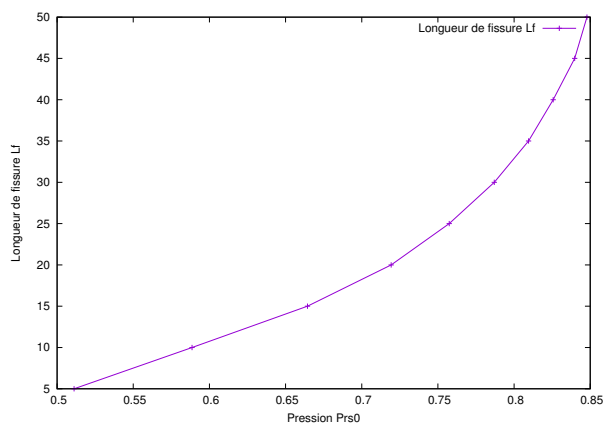


Figure 3.13: Courbe de chargement : cas purement cohésif

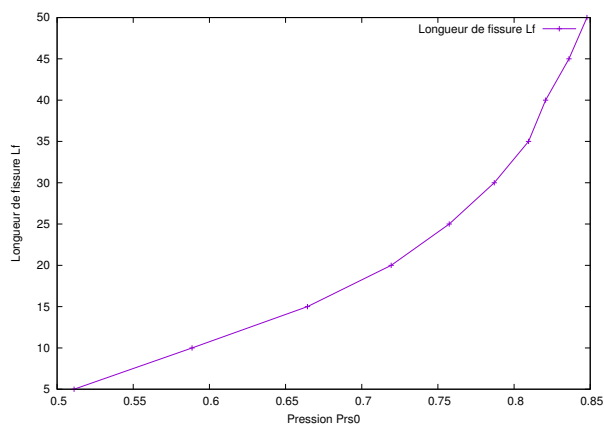


Figure 3.14: Courbe de chargement : cas purement cohésif

par $2q$, la longueur totale de la fissure et par $2p$ l'intervalle non-cohésive où les tractions sont identiquement nulles. La fissure réelle se limite à l'intervalle $2p$. A l'instant $t > 0$ partiellement non-cohésive, les pointes cohésives se situent à $(\pm q(t), 0)$ et celles non-cohésives aux points $(\pm p(t), 0)$. On a : $0 < p(t) < q(t)$. On définit les champs de déplacement $u[t, q(t), p(t)] \in H^1(\Omega_P)^3$ et de contrainte $\sigma[t, q(t), p(t)] \in L^2(\Omega_P, \mathbb{R})$ associés comme solution unique du problème élastique linéaire. La contrainte cohésive sollicitant la structure est non-uniforme sur toutes les lèvres de fissure.

$$\Omega_c^0 = \Omega_P / (\mathbb{D} \cup \Gamma); \quad \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_c \quad (3.75)$$

avec :

$$\left| \begin{array}{l} \Gamma_c = [-q(t), -p(t)] \times \{0\} \cup [+p(t), +q(t)] \times \{0\} \\ \Gamma_0 = [-p(t), -d] \times \{0\} \cup [+d, +p(t)] \times \{0\} \end{array} \right. \quad (3.76)$$

Γ_0 , partie non-cohésive décrivant l'initiation de la fissure et Γ_c , la partie cohésive.

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{div} \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_c^0 \\ \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] = 2\mu \varepsilon_{ij}(u[t, q(t), p(t)]) + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon_{ij}(u[t, q(t), p(t)]) \delta_{ij} \quad \text{dans} \quad \Omega_c^0 \\ \underline{u}[t, q(t), p(t)] = t \underline{u}_d \quad \text{sur} \quad \partial_D \Omega_P \\ \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] n_j = t T \quad \text{sur} \quad \partial_N \Omega_P \\ \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] e_2 = 0 \quad \text{sur} \quad [-p(t), -d] \cup [+d, +p(t)] \times \{0\} \\ \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] e_2 = \sigma_c e_2 \quad \text{sur} \quad [-q(t), -p(t)] \cup [+p(t), +q(t)] \times \{0\} \end{array} \right. \quad (3.77)$$

Les champs u et σ solutions du problème considéré doivent appartenir respectivement à $\mathbb{C}_a$ et $\mathbb{S}_a$. Le problème est symétrique ainsi que la solution, les hypothèses de symétrie sont les mêmes que celles du problème de référence *i.e.* celle de la phase élastique.

$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{div} \Delta \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_c^0 \\ \Delta \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] = 2\mu \varepsilon_{ij}(u[t, q(t), p(t)]) + \lambda \operatorname{tr} \varepsilon_{ij}(u[t, q(t), p(t)]) \delta_{ij} \quad \text{dans} \quad \Omega_c^0 \\ \Delta \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)](x) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad |x| \rightarrow \infty \\ \Delta \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] e_2 = \sigma_{22}(x_1) e_2 \quad \text{sur} \quad [-q(t), +q(t)] \times \{0\} \end{array} \right. \quad (3.78)$$

La différence des deux solutions, entre la phase partiellement cohésive et la phase élastique s'exprime telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \Delta u[t, q(t), p(t)] = u[t, q(t), p(t)] - t u \\ \Delta \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] = \sigma_{ij}[t, q(t), p(t)] - t \sigma \end{array} \right. \quad (3.79)$$

En tenant compte des conditions aux limites, la contrainte uniforme normale sur la ligne de fissure s'écrivent :

$$\sigma_{22}[t, q(t), p(t)](x_1, 0) = \begin{cases} -\frac{t}{t_e}\sigma_c + 2\frac{t}{t_e}\frac{x_1^2}{t_e}\sigma_c & |x_1| < p(t) \\ \sigma_c - \frac{t}{t_e}\sigma_c + 2\frac{t}{t_e}\frac{x_1^2}{t_e}\sigma_c & p(t) < |x_1| < q(t) \end{cases} \quad (3.80)$$

tandis que au loin $\sigma_{22}[t, q(t), p(t)](x_1, 0) = 0(|\vec{x}|^{-2})$.

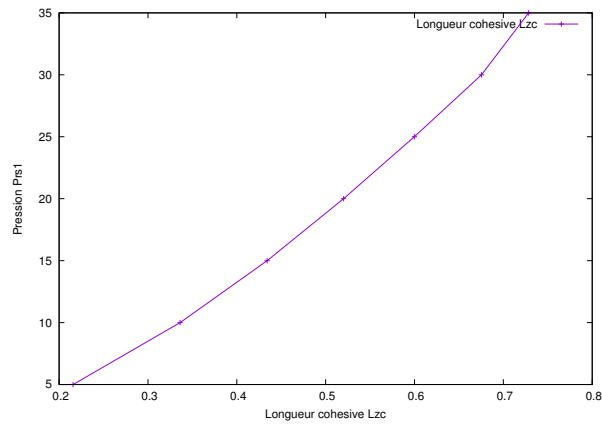


Figure 3.15: Courbe de chargement : cas partiellement cohésif

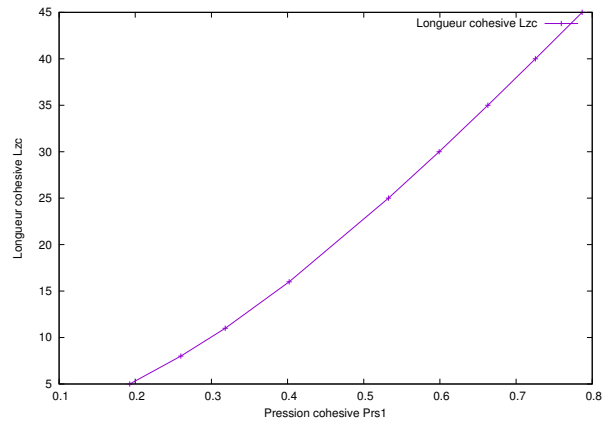


Figure 3.16: Courbe de chargement : cas partiellement cohésif

Pendant la propagation de la fissure, une partie d'énergie stockée dans la structure est libérée et absorbé dans le processus de fissuration. Dans la configuration déformé $\bar{\Omega}_P^\varphi$, le taux d'énergie restituée est défini comme l'opposé de la dérivé de l'énergie potentielle de la structure ([Marigo, 2010],[Destuynder *et al.*, 1983]).

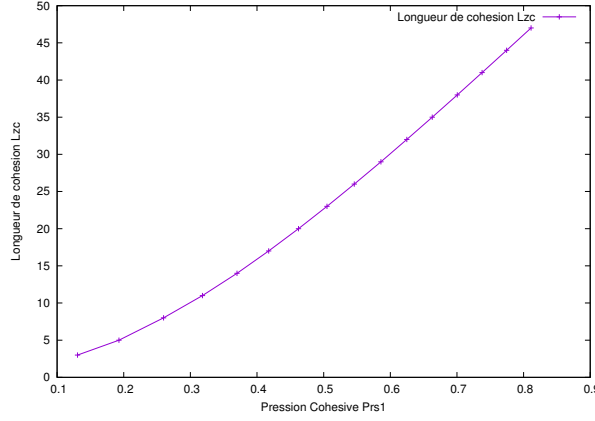


Figure 3.17: Courbe de chargement : cas partiellement cohésif

$$W(u(\bar{\Omega}_P^\varphi), \bar{\Omega}_P^\varphi) = \int_{\bar{\Omega}_P^\varphi} \frac{1}{2} \sigma^\varphi(u) : \varepsilon(u) d\bar{\Omega}_P^\varphi - \int_{\bar{\Omega}_P^\varphi} f^\varphi u^\varphi d\bar{\Omega}_P^\varphi - \int_{\Gamma_P^\varphi} g^\varphi u d\Gamma^\varphi \quad (3.81)$$

L'énergie de Griffith G est donnée par la relation $G = -\frac{dW}{d\bar{\Omega}_P^\varphi}$ ([Marigo, 2010], [Destuynder *et al.*, 1983]). D'après Griffith, cette énergie doit être fournie pour provoquer la rupture par unité de surface de la nouvelle fissure avec le critère de propagation :

$$\begin{aligned} G &< G_c && \text{pas de propagation} \\ G &= G_c && \text{propagation} \end{aligned} \quad (3.82)$$

Pour la rupture de la structure, la propagation de la fissure est stable si l'augmentation de la longueur l_f tend à diminuer l'énergie G , la charge étant maintenue constante. Ceci est traduit par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial l_f} &< 0 && \text{propagation possible} \\ \frac{\partial G}{\partial l_f} &> 0 && \text{propagation instable} \end{aligned} \quad (3.83)$$

La loi de comportement est :

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}(u) + \lambda \text{tr}\varepsilon_{ij}(u)\delta_{ij} \quad (3.84)$$

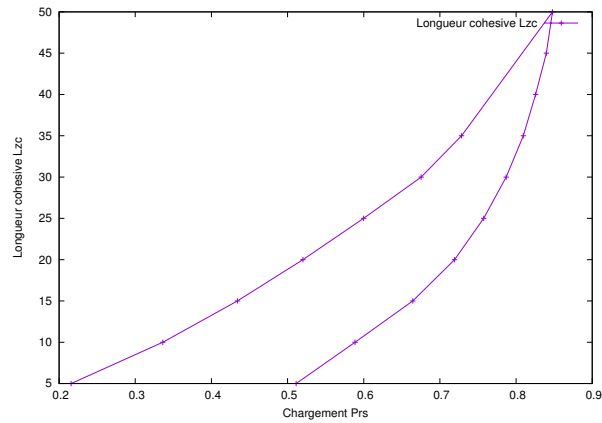


Figure 3.18: Courbe de superposition de chargement : cas purement et partiellement cohésive

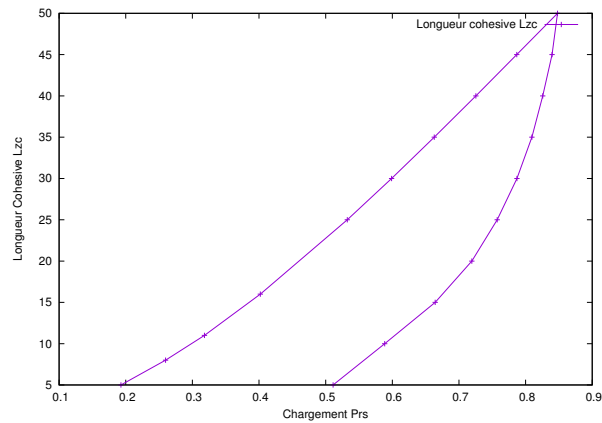


Figure 3.19: Courbe de superposition de chargement : cas purement et partiellement cohésive

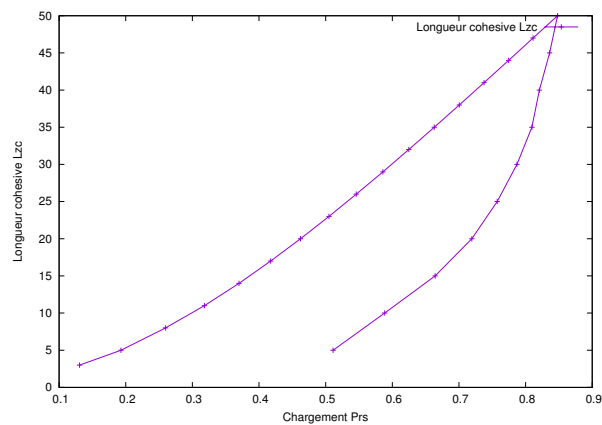


Figure 3.20: Courbe de superposition de chargement : cas purement et partiellement cohésive

3.9 Écartement de fissure

De nombreux problèmes ont été rencontrés pour la définition exacte du lieu où s'applique la définition de ce concept. Pendant le chargement, la fissure s'émousse et avance d'une quantité équivalente à environ la moitié de l'ouverture [Labbens, 1980]. L'évolution de la géométrie de fond fissure a été mise en évidence par des nombreux travaux de recherches : méthodes expérimentales [Kassir et Riedel, 1981]. [Wells, 1963] a considéré que le lieu de définition de l'écartement de fissure est l'intersection de la fissure réelle avec la zone plastique supposée circulaire [Pluvinage, 1989]. [Burdekin et Stone, 1966] ont proposés de prendre le sommet de la fissure réelle du faite que dans le modèle de Dugdale, les déplacements en ce point sont finis. [Tracey, 1976] suggère de définir l'écartement de fissure à l'intersection de deux lignes à 45° de l'axe de fissure et issue de sa pointe. [Hayes et Turner, 1974] ont considéré que la pointe de la fissure quitte d'une zone significative de profil. [Kassir et Riedel, 1981], partent des considération expérimentales et indique qu'il est préférable de prendre une ligne à 30° de l'axe de la fissure. En 1963, Wells suggère d'utiliser l'écartement comme un critère de rupture en posant la condition : $\delta = \delta_c$. Le lieu géographique de l'écartement est défini de la zone plastique par :

$$\delta = 2[u](x = r_y) \quad (3.85)$$

$[u]$ es le déplacement dans la direction y et t_y , le rayon de la zone plastique supposée circulaire. L'écartement critique de fissure s'écrit :

$$\delta_c = \frac{4}{\pi} \frac{G_c}{R_e} \quad (3.86)$$

Par des considérations énergétiques [Wells, 1963] remplace le rapport $\frac{4}{\pi}$ par une valeur unitaire, ce qui revient à écrire :

$$G_c = R_e \delta_c \quad (3.87)$$

[Burdekin et Stone, 1966], en utilisant le modèle de Dugdale et de Westergaard défini la pointe de fissure réelle par l'expression :

$$\delta = (8 \frac{R_e l_f}{\pi E}) \ln \left[\sec \left(\pi \frac{\sigma_g}{2 R_e} \right) \right] \quad (3.88)$$

Le développement au premier ordre de cette expression permet d'écrire :

$$\delta_c = \frac{[\pi (\sigma_g^c)^2 l_f]}{R_e E} \quad (3.89)$$

Le modèle de Dugdale ne s'applique qu'au matériau parfaitement plastique. Pour les matériaux écrouissable, [Shih, 1981] demande d'exprimer l'écartement de la fissure en fonction de l'intégrale J sous la forme :

$$\delta = \mu \frac{J}{R_e} \quad \text{avec} \quad \mu \in [0.4; 0.8] \quad (3.90)$$

La fonction permettant la prévision de la taille de défaut admissible en fonction de la déformation globale normalisée est donnée par [Burdekin et Stone, 1966] $f(\varepsilon_g/\varepsilon_{g,y}) = \frac{\delta}{2\pi\varepsilon_y l_f} : \varepsilon_{g,y}$, est la déformation globale à la perte de la linéarité.

En se basant sur la mécanique linéaire de la rupture, Wells a calculé le déplacement des lèvres de la fissure à la distance r_y par l'expression :

$$r_y = \frac{K_{1c}^2}{2\pi R_e^2} \quad (3.91)$$

Le déplacement normale dans le plan de la fissure est égale à :

$$[u] = 2\sigma_g \sqrt{(l_f^2 - x^2)} \quad (3.92)$$

avec les considérations suivantes : pour $x \ll l_f$, on a $[u] = 2\sigma_g \sqrt{2l_f x}$, avec $\delta = 2[u]$ par définition, on a

$$\sigma_g = 2\sigma_g \sqrt{\frac{EG}{\pi l_f}} \quad \text{et} \quad \delta = \frac{4}{E} \sqrt{\frac{2rEG}{\pi}} \quad (3.93)$$

pour $r = r_y$:

$$\delta = \frac{4}{E} \sqrt{\frac{EGK_{1c}^2}{\pi^2 R_e^2}} = \frac{4}{\pi} \frac{GE}{ER_e} \quad (3.94)$$

ce qui peut se mettre sous la forme :

$$G = \frac{\pi}{4} R_e \quad (3.95)$$

Pour des considérations énergétiques, on a :

$$G = R_e \delta \quad (3.96)$$

3.10 Solution élémentaire des problèmes de fissure

3.10.1 Résolution du problème par l'analyse complexe

3.10.2 Problème de Hilbert

Soit $f(t)$ une fonction à valeur complexe, continue par morceau sur L_f . Le problème revient de trouver une fonction analytique $F(z)$ nulle à l'infinie et satisfaisant sur la ligne L_f de fissure à l'équation :

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + f(t) \quad \text{sur} \quad L_f \quad (3.97)$$

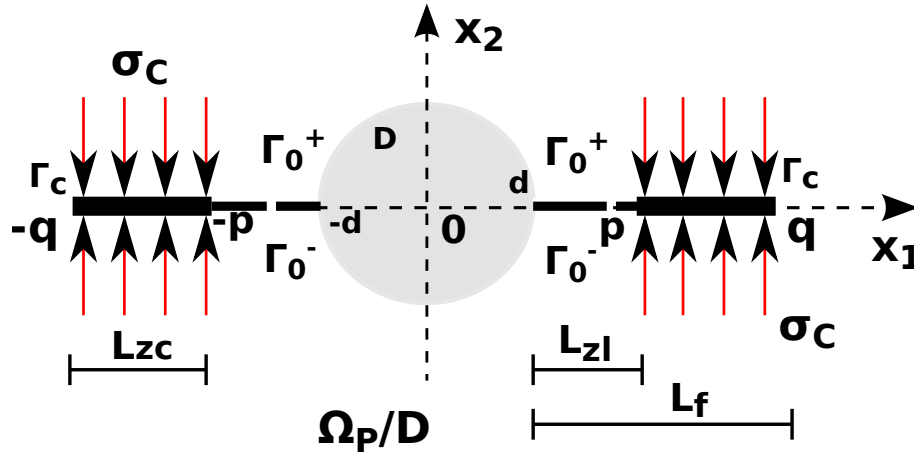


Figure 3.21: Fissure partiellement cohésive

L_f , est une ligne droite avec des points $(-q(t), 0)$ et $(+q(t), 0)$ aux l'extrémité .

Soit U le champ de déplacement satisfaisant l'équation de l'espace $\Omega_P/(\mathbb{D} \cup \Gamma)$.

$$\Delta U = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_P/(\mathbb{D} \cup \Gamma) \quad (3.98)$$

Sur la ligne de fissure $\Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-$, on a la condition de Neumann qui est une fonction de x_1 .

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-, \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = f(x_1) \quad \Gamma_c \quad (3.99)$$

A l'infinie, la condition du champ de déplacement est : $U \mapsto C \sqrt{\sin \frac{\theta}{2}}$ à l'infinie. Dans le plan complexe $z = x_1 + ix_2$, la fonction $f(z) = U(x_1, x_2) + iV(x_1, x_2)$, avec $V(x_1, x_2)$ la partie imaginaire de la onction holomorphe.

3.10.3 Rappels mathématiques

3.10.3.1 Intégrales de Cauchy : Formule de Plemelj

Si L_f est une ligne de fissure orientée, l'intégrale de Cauchy sera définie à partir d'une densité complexe $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ continu par morceau sur L_f et satisfaisant à la relation :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{f(t)dt}{t-z} \quad (3.100)$$

Sur la ligne d'intégration, une distinction est faite entre les valeurs limites, *i.e.*, entre les limites de $F(z) \mapsto 0$ sur L_f à gauche et droite de t . Les valeurs limites de $F(z)$ quand $z \mapsto 0$ à gauche ou à droite s'écrit respectivement $F^+(t)$ et $F^-(t)$.

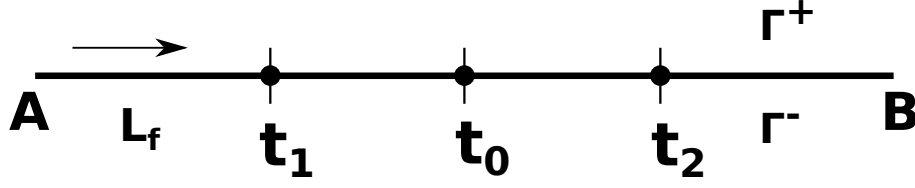


Figure 3.22: Ligne de fissure orientée

Dans cette expression, t dénote le point de coordonnées : $t = x + iy$, $f_1(t)$ et $f_2(t)$ sont des fonctions réelles de t sur L_f . La fonction $f(t)$ satisfait sur L_f la condition de Hölder :

$$|f(t_2) + if(t_1)| \leq A|t_2 - t_1|^\mu, \quad 0 < \mu \leq 1 \quad (3.101)$$

où A est une constante positive de Hölder et μ l'indice de Hölder.

3.10.3.2 Proposition

Si $f(t)$, une fonction donnée sur L_f satisfait la condition de Hölder à proximité d'un point t_0 de L_f , autre qu'une de ses extrémités, l'intégrale $F(z)$ est continue sur L_f à gauche ou à droite, *i.e.*, les valeurs limites $F^+(t_0)$ et $F^-(t_0)$ existent.

La condition de Hölder est seulement satisfaisant pour les points de ligne de fissure L_f proche de t_0 . La formule de Plemelj ([Muskhelishvili, 1963]) est donnée par l'expression :

$$F^+(t_0) - F^-(t_0) = f(t_0) \quad (3.102)$$

$$F^+(t_0) + F^-(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_f} \frac{f(t)dt}{t - t_0} \quad (3.103)$$

Sur la face Γ_0^+ , les valeurs limites sont obtenues par addition autour du point $(t_0, 0)$ sous la forme :

$$F^+(t_0) = \frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{f(t)dt}{t - t_0} \quad (3.104)$$

et sur la face Γ_0^- , on :

$$F^-(t_0) = -\frac{1}{2}f(t_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{f(t)dt}{t - t_0} \quad (3.105)$$

La proposition suivante est vraie :

3.10.3.3 Proposition

Si la fonction $f(t)$, satisfait la condition de Hölder sur une certaine partie L'_f de L_f , les valeurs limites de $F^+(t_0)$ et $F^-(t_0)$ remplissent également la condition de Hölder sur L'_f , excepté dans les voisinages arbitrairement proche de L'_f .

Le problème suivant sera considéré : soit $L_f \in \Gamma$ une ligne orientée décrivant la fissure et $G(t)$ une fonction à valeur complexe continue par morceau sur L_f .

$$F^+(t) = G(t)F^-(t) + f(t) \quad \text{sur } L_f \quad (3.106)$$

où $G(t)$ et $f(t)$ des fonctions données sur la ligne de fissure et $G(t) \neq 0$ partout sur L_f . On suppose que les fonctions $G(t)$ et $f(t)$ remplissent la condition de Hölder, *i.e.* $F^+(t_0) = F^-(t_0) = 0$, si t_0 est une extrémité, alors la disparition de $F(z)$ à t_0 implique que $F(z) \mapsto 0$ quand $z \mapsto 0$. Le cas le plus simple se produit quand $G(t) = 1$. Alors le problème se réduit à la détermination de la fonction holomorphe $F(z)$ pour la discontinuité $f(t)$ donnée.

$$F^+(t) - F^-(t) = f(t) \quad \text{sur } L_f \quad (3.107)$$

La solution de ce problème peut être obtenue immédiatement en considérant l'intégrale de Cauchy :

$$F_0(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{f(t)dt}{t - z} \quad (3.108)$$

$F_0(z)$ est une fonction holomorphe qui disparaît à l'infini et pour laquelle :

$$F_0^+(t) - F_0^-(t) = f(t) \quad \text{sur } L_f \quad (3.109)$$

$F_0(z)$ satisfait à la condition : $|F(z)| < \frac{A}{|z-c|^\mu}$; $0 \leq \mu < 1$ et A une constante positive ($A > 0$). Par conséquent $F_0(z)$ est une des solution du problème considéré après la différence $F(z) - F_0(z) = F_*(z)$, où $F(z)$ est une solution inconnue :

$$F_*^+(t) - F_*^-(t) = 0 \quad \text{sur } L_f \quad (3.110)$$

Ainsi, sur la base de propriétés connues des fonctions d'une variable complexe, les valeurs de $F_*^+(z)$ à gauche et à droite de L_f sont continue analytiquement. Donc, si on prescrit pour la fonction $F_*^+(z)$ les valeur appropriées sur L_f , cette fonction serons holomorphe dans toute la surface entière, excepté aux points $(-q(t), 0)$ et $(+q(t), 0)$ de L_f . En conséquence, par le théorème de Liouville $F_*(z) = \text{const}$. La solution générale du problème est donnée par : $F(z) = F_0(z) + C$ avec :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{f(t)dt}{t - z} + C \quad (3.111)$$

où C est une constante arbitraire et $f(t)$ dénote la discontinuité de $F(z)$ sur la ligne L_f , *i.e.*, $f(t) = F^+(t) - F^-(t)$.

3.10.4 Solution du problème $F^+(t) = G(t)F^-(t) + f(t)$

Considérons les données suivantes : $G(t) = g$ avec $g \neq 1$ un complexe. Les conditions aux limites s'écrivent :

$$F^+(t) - gF^-(t) = f(t) \quad \text{sur} \quad L_f \quad (3.112)$$

Cette équation est valable sauf aux points $(-q(t), 0)$ et $(q(t), 0)$ de L_f de la fissure. Le problème homogène s'écrit

$$F^+(t) - gF^-(t) = 0 \quad \text{pour} \quad t \in \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^- \quad (3.113)$$

La solution particulière $X_0(z)$ du problème est de la forme :

$$X_0(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-\gamma} (z - b_j)^{\gamma-1} \quad (3.114)$$

où $\gamma = \alpha + i\beta$ est une constante. $X_0(z)$ est holomorphe dans S_f i.e., dans la section de la fissure le long de L_f . Au point singulier $(p(t), 0)$ on a :

$$(z - p(t))^{-\gamma} = e^{-\gamma \ln(z-p(t))} = e^{-\gamma [\ln|z-p(t)| + i\theta]} = e^{-\gamma \ln|z-p(t)|} e^{i\gamma\theta} \quad (3.115)$$

$|z - p(t)|$ est vraie de sorte que $(z - p(t))^{-\gamma} = |z - p(t)|^{-\gamma} e^{-i\gamma\theta}$

où $\theta = \arg(z - p(t))$ et $|z - p(t)|^{-\gamma}$. A gauche de L_f autour du point $(p(t), 0)$, quand z varie, θ croît de $(+2\pi)$, et par conséquent $(-i\gamma\theta)$ pour $(-2\pi i\gamma\theta)$. A droite de L_f autour du point $(q(t), 0)$, $\theta = \arg(z - q(t))$ croît de (-2π) et $(z - p(t))^{\gamma-1} = |z - q(t)|^{\gamma-1} e^{i(\gamma-1)\theta}$ peut être multiplié par $e^{-2\pi i(\gamma-1)} = e^{-2\pi i\gamma}$, comme dans le premier cas, $e^{-2\pi i} = 1$.

$X_0(z)$ satisfait aux conditions limites :

$$\gamma = \alpha + i\beta = \frac{\ln(-1)}{2\pi i} = \frac{1}{2} \quad (3.116)$$

Soit $X_0(z)$ la solution du problème homogène satisfaisant la relation $X_0^+(t) = gX_0^-(t)$ sur L_f :

$$g = \frac{X_0^+(t)}{X_0^-(t)} \quad \text{sur} \quad L_f \quad (3.117)$$

En remplaçant g dans le problème homogène on obtient l'expression :

$$\frac{F^+(t)}{X_0^+(t)} - \frac{F^-(t)}{X_0^-(t)} = 0 \quad \text{sur} \quad L_f \quad (3.118)$$

ou

$$F_*^+(t) - F_*^-(t) = 0 \quad \text{sur} \quad L_f \quad (3.119)$$

$F_*^+(z)$ dénote une fonction holomorphe de la section de $\frac{F(z)}{X_0(z)}$. Suivant la relation précédente, $F_*^+(z)$ est holomorphe sur toute la surface excepté au point $z = \infty$. Le théorème généralisé de Liouville : $F(z) = X_0(z)P(z)$, ou $P(z)$ est un polynôme arbitraire.

Le problème non-homogène, s'écrit :

$$\frac{F^+(t)}{X_0^+(t)} - \frac{F^-(t)}{X_0^-(t)} = \frac{f(t)}{X_0^+(t)} \quad (3.120)$$

ou

$$F_*^+(t) - F_*^-(t) = f_*(t) \quad (3.121)$$

où $F_*(z) = \frac{F(z)}{X_0(z)}$; $f_*(t) = \frac{f(t)}{X_0^+(t)}$. En utilisant les résultats précédent, on trouve :

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{f(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z)P(z) \quad (3.122)$$

C'est la solution générale du problème, admettant un point à l'infini. En utilisant $X_0(z) = \frac{1}{X(z)}$, la solution générale revient à écrire :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{L_f} \frac{X^+(t)f(t)dt}{t-z} + \frac{P(z)}{X(z)} \quad (3.123)$$

Dans cette relation, $X(z)$ est déterminé par l'expression : $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ et $P(z)$, est un polynôme arbitraire. Aux extrémités, la solution est obtenue à partir de la formule générale 110.20 pour $p = 2n$ et $X_p(z)$ déterminé par 110.31.

$$F(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{f(t)dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)P(z) \quad (3.124)$$

$X^+(t)$, est la valeur de la fonction $X(z)$ à prendre sur la face supérieure de la fissure L_f .

3.10.5 Problème auxiliaire

On considère une fonction à variables complexes $z = x_1 + ix_2$ et $\bar{z} = x_1 - ix_2$ sont conjugués. Soit $f(x_1, x_2)$ une fonction analytique à valeurs complexes. $P(x_1, x_2)$, la partie réelle et $Q(x_1, x_2)$ la partie imaginaire. $f(x_1, x_2)$ est dite analytique si dans le changement de variable x_1, x_2 en $z, \bar{z}$, la fonction $f(z, \bar{z})$ ne dépend pas explicitement de $\bar{z}$, i.e., $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ avec $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2})$. P et Q sont harmoniques dans le cas où elles satisfont aux conditions de Cauchy-Riemann i.e.,

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = -\frac{\partial Q}{\partial x_1} \quad (3.125)$$

La fonction $f(z) = P(x_1, x_2) + iQ(x_1, x_2)$ représente la variable complexe, holomorphe à Γ , la région occupée par la fissure. En outre, $\phi(z) = p + iq = \frac{1}{4} \int f(z) dz$ et $\phi'(z) = \frac{\partial p}{\partial x_1} + i \frac{\partial q}{\partial x_1} = \frac{1}{4}(P + iQ)$

3.10.6 Représentation complexe des contraintes et de déplacements

Soit $U(x_1, x_2)$, une fonction biharmonique à deux variables x_1, x_2 , représentée à l'aide de deux fonctions de la variable complexe $z = x_1 + ix_2$.

$$f((x_1, x_2)) = \frac{\partial U}{\partial x_1} + i \frac{\partial U}{\partial x_2} = \phi(z) + \overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)} \quad (3.126)$$

Les déplacements sont donnés par les expressions :

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x_1} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} p, \quad 2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial x_2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} q \quad (3.127)$$

Multipliant par i la seconde équation et additionnant avec la première équation, nous obtenons la formule donnons les déplacements sous la forme :

$$2\mu[u_1(x_1, x_2) + iu_2(x_1, x_2)] = k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad (3.128)$$

avec k la constance de Kolosov [Kolosov et Muskhelishvili, 1915] Kolosov, Muskhelishvili

Trouver l'expression de forces agissantes sur le segment de droite de fissure situé dans le plan $\mathcal{O}xy$. Soit AB le segment de droite de fissure. Elle est positive dans la direction A vers B , de normale $\vec{n}$ et de tangente $\vec{t}$ positive orientée dans le sens de AB .

La force $(X_n ds, Y_n ds)$ agissant sur l'élément ds de la droite AB , est une force normale exercée du côté de la normale positive, on a :

$$\begin{aligned} X_n &= X_x \cos(n, x_1) + X_y \cos(n, x_2) = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \cos(n, x_1) - \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \cos(n, x_2) \\ Y_n &= Y_x \cos(n, x_1) + X_y \cos(n, x_1) = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \cos(n, x_2) + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \cos(n, x_1) \end{aligned} \quad (3.129)$$

avec

$$\begin{aligned} \cos(n, x_1) &= \cos(t, x_2) = \frac{dx_2}{ds} \\ \cos(n, x_2) &= -\cos(t, x_1) = -\frac{dx_1}{ds} \end{aligned} \quad (3.130)$$

où $\vec{t}$ est la direction positive de la tangente prie sur la ligne de fissure L_f . Introduisons ces valeurs dans les formules précédentes, on trouve :

$$X_n = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x_2} \right), \quad Y_n = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} \right) \quad (3.131)$$

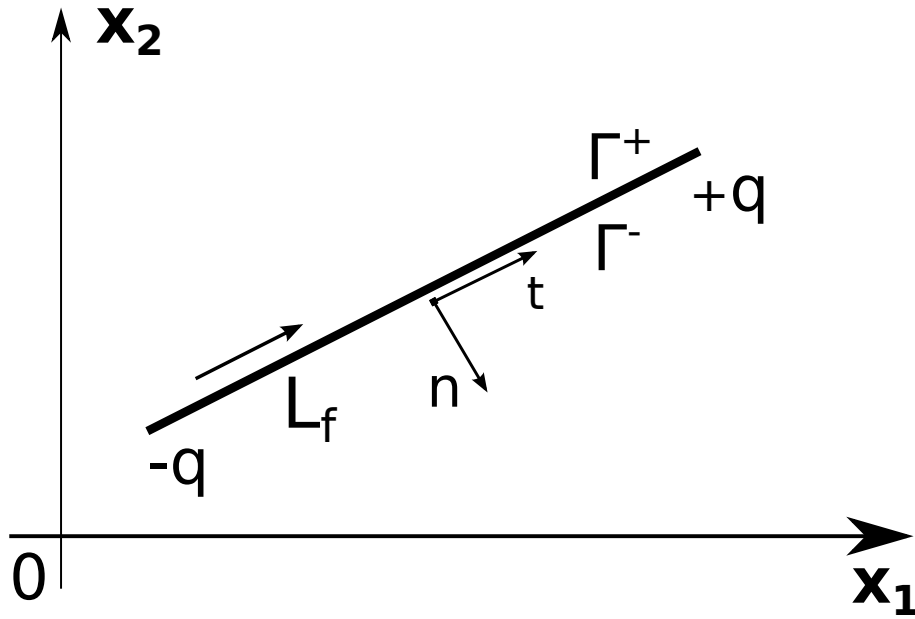


Figure 3.23: Ligne de fissure entre les points $(-q(t), 0)$ et $(+q(t))$

sous forme complexe :

$$X_n + iY_n = \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x_2} - i \frac{\partial U}{\partial x_1} \right) = -i \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + i \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) \quad (3.132)$$

ou

$$(X_n - iY_n)ds = -id \left(\frac{\partial U}{\partial x_1} + i \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) \quad (3.133)$$

après substitution, on a :

$$(X_n + iY_n)ds = -id\{\phi(z) + z\overline{\phi'(z)} + \overline{\psi(z)}\} \quad (3.134)$$

Dans la direction Oy , l'élément ds devient : $ds = dy$, $dz = idy$, $d\bar{z} = -idy$ et $X_n = \sigma_{11}$, $Y_n = \sigma_{12}$

$$\sigma_{11}(x_1, x_2) + i\sigma_{12}(x_1, x_2) = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} - z\overline{\phi''(z)} - \overline{\psi'(z)} \quad (3.135)$$

Dans la direction ox , l'élément $ds = dx$ devient : $dz = d\bar{z} = dx$ et $X_n = -\sigma_{12}$, $Y_n = -\sigma_{22}$ après multiplication par i , on a :

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) - i\sigma_{12}(x_1, x_2) = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + z\overline{\phi''(z)} + \overline{\psi'(z)} \quad (3.136)$$

Introduisons deux fonctions analytiques de z , $\phi(z)$ et $\psi(z)$, où la variable complexe s'exprime par $z = x_1 + ix_2$. Les contraintes et déplacements sont donnés par les formules bien connues de Kolosov, Muskhelishvili ([Muskhelishvili, 1963], [Bui, 1978]).

$$\left| \begin{array}{l} \sigma_{11}(x_1, x_2) + \sigma_{22}(x_1, x_2) = 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] \\ \sigma_{22}(x_1, x_2) - \sigma_{11}(x_1, x_2) + 2i\sigma_{12}(x_1, x_2) = 2[\bar{z}\phi''(z) + \overline{\psi'(z)}] = 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] \\ u_1(x_1, x_2) + iu_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\mu}[k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \end{array} \right. \quad (3.137)$$

où $\Phi(z) = \phi'(z)$ et $\Psi(z) = \psi'(z)$

Soit $F(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ la fonction complexe et $\overline{F}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ sont conjuguée que nous représentons par $\overline{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$ ou par $\overline{F}(z) = \overline{F}(\bar{z})$. La fonction $F(z)$ est définie sur la ligne de fissure L_f à la surface Γ^+ et Γ^- , dans laquelle le plan z est divisée par l'axe réel. De plus la fonction $F(z)$ sera définie par $\overline{F}(z)$ dans la région Γ^- et il existe une valeur limite $F^+(t)$ pour cette région où t est un point de l'axe réel de la fissure. Il suit immédiatement que la valeur limite $\overline{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$ et que $\overline{F}^-(z) = \overline{F^+(t)}$, quand $z \rightarrow t$ dans Γ^- et quand $z \rightarrow t$ dans Γ^+ , le rôle de Γ^+ et Γ^- peut changer, dans ce cas on a : $\overline{F}^+(z) = \overline{F^-(t)}$.

$$\overline{F^-(t)} = \overline{F^+}(t), \quad \overline{F^+(t)} = \overline{F^-}(t) \quad (3.138)$$

Γ^+ et Γ^- sont respectivement continues dans L_f , de plus $F_1(z) = F_2(z)$ sur L_f . La fonction $F(z)$, est définie par :

$$F(z) = \left| \begin{array}{ll} F_1(z) & \text{pour } z \text{ dans } \Gamma^+ \text{ sur } L_f \\ F_1(z) & \text{pour } z \text{ dans } \Gamma^- \text{ sur } L_f \end{array} \right. \quad (3.139)$$

Les composantes σ_{11} , σ_{22} et σ_{12} sont non nulles et $k = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ la constante de Kolosov.

3.10.7 Problème aux limites sur la ligne de fissure

3.10.7.1 Problème I de Muskhelishvili

Considérons la solution du problème fondamental, *i.e.*, les valeurs des contraintes sur L_f à donner du côté positif (+) et négatif (-).

Les composants d'efforts sont exprimées en termes de fonctions $\Phi(z), \Psi(z)$, on peut les exprimées en termes de $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$. En particulier, on a par :

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) - i\sigma_{12}(x_1, x_2) = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)} \quad (3.140)$$

De même, on peut exprimer les composants du déplacement par l'introduction de la fonction $\psi(z)$.

$$\omega(z) = \int \Omega(z)dz = z\overline{\Phi}(z) + \overline{\psi}(z) + Const \quad (3.141)$$

Comme les fonctions $\phi(z)$, $\psi(z)$, sont déterminées par $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, indépendamment de la constante. Ainsi $f(x_1, x_2)$ prend la forme :

$$u_1(x_1, x_2) + iu_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\mu} [k\phi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)}] \quad (3.142)$$

On suppose que $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ sont holomorphe. La fonction est continue sur toute la section Γ de la fissure, elle est continue à gauche et à droite du point t de la ligne de fissure L_f entre les ponts extrémités et respecte la condition de Hölder près des extrémités de L_f .

$$\Phi(z) = \frac{A}{|z - c|^\alpha}, \quad |\Omega(z)| = \frac{A}{|z - c|^\alpha}, \quad 0 \leq \alpha < 1 \quad (3.143)$$

où $A > 0$ et c dénote la correspondance avec l'extrémité de la fissure. Pour la notation usuelle, introduisant les fonctions $\Omega(z)$ et $\Psi(z)$

avec

$$\begin{cases} \Omega(z) = \overline{\Phi}(z) + z\overline{\Phi'}(z) + \overline{\Psi}(z) \\ \Psi(z) = \overline{\Omega}(z) - \Phi(z) - z\Phi' \end{cases} \quad (3.144)$$

Les conditions aux limites prennent la forme sur la fissure L_f

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) + \Omega^-(t) &= \sigma_{22}^+(t) - i\sigma_{12}^+(t) \\ \Phi^-(t) + \Omega^+(t) &= \sigma_{22}^-(t) - i\sigma_{12}^-(t) \end{aligned} \quad (3.145)$$

Sur la ligne de fissure L_f , après addition et soustraction, on obtient :

$$\begin{aligned} [\Phi^+(t) + \Omega^+(t)] + [\Phi^-(t) + \Omega^-(t)] &= 2p(t) \\ [\Phi^+(t) - \Omega^+(t)] + [\Phi^-(t) - \Omega^-(t)] &= 2q(t) \end{aligned} \quad (3.146)$$

où $p(t)$ et $q(t)$ sont des fonctions données sur la longueur de fissure L_f .

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{1}{2}[\sigma_{22}^+(t) + \sigma_{22}^-(t)] - \frac{i}{2}[\sigma_{21}^+(t) + \sigma_{21}^-(t)] \\ q(t) &= \frac{1}{2}[\sigma_{22}^+(t) - \sigma_{22}^-(t)] - \frac{i}{2}[\sigma_{21}^+(t) - \sigma_{21}^-(t)] \end{aligned} \quad (3.147)$$

Les fonction $p(t)$ et $q(t)$ remplissent les conditions de Hölder sur la ligne L_f .

$\Phi(\infty) - \Omega(\infty) = \overline{\Gamma'}$, la solution générale du problème aux limites est donnée par

$$\Phi(z) - \Omega(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{L_f} \frac{q(t)dt}{t - z} - \overline{\Gamma'} \quad (3.148)$$

De plus :

$$X(z) = \prod_{k=1}^n (z - a_k)^{\frac{1}{2}} (z - b_k)^{\frac{1}{2}} \quad (3.149)$$

et après quelques arrangement, on obtient la solution générale de la frontière, à l'infinie.

$$\Phi(z) + \Omega(z) = \frac{1}{\pi i X(z)} \int_{L_f} \frac{X(t)p(t)dt}{t-z} + \frac{2P_n(z)}{X(z)} \quad (3.150)$$

où $P_n(z)$ est un polynôme de degré supérieure à n , donné par l'expression : $P_n(z) = C_0 z^n + C_1 z^{n-1} + \dots + C_n$. $X(t)$, la valeur prise à gauche de L_f . On a :

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \Phi_0(z) + \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{1}{2} \overline{\Gamma'} \\ \Omega(z) &= \Omega_0(z) + \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{1}{2} \overline{\Gamma'} \end{aligned} \quad (3.151)$$

où

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{L_f} \frac{X(t)p(t)dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{q(t)dt}{t-z} \quad (3.152)$$

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{L_f} \frac{X(t)p(t)dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{q(t)dt}{t-z} \quad (3.153)$$

$$\phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{(-\sigma_{22}^+(t, 0) - i\sigma_{12}^+(t, 0))dt}{X^+(t)(t-z)} + CX(z) \quad (3.154)$$

C'est la solution générale du problème, admettant un point à l'infini. En utilisant $X_0(z) = \frac{1}{X(z)}$, la solution générale revient à écrire :

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i X(z)} \int_{L_f} \frac{X(z)f(t)dt}{X_0^+(t)(t-z)} + \frac{P(z)}{X(z)} \quad (3.155)$$

Dans cette relation, $X(z)$ est déterminé par l'expression : $X(z) = \sqrt{(z-a)(z-b)}$ et $P(z)$, un polynôme arbitraire.

3.11 Application à la fissure centrale dans une plaque en présence des forces cohésives

Désignons par $\sigma_{2i}(x_1, 0)$, $i = 1, 2$ la contrainte sur la ligne droite $L_f = pq$. Trouver la solution du problème mécanique dans lequel les conditions aux limites sont $\sigma_{2i}(x_1, 0) = -\sigma_{2i}^0(x_1, 0)$ sur L_f .

En tout point de la fissure L_f , la solution du problème de Hilbert est régulière, donc les facteurs d'intensité correspondants sont nuls. D'après l'addition de deux premières équations en contraintes on a :

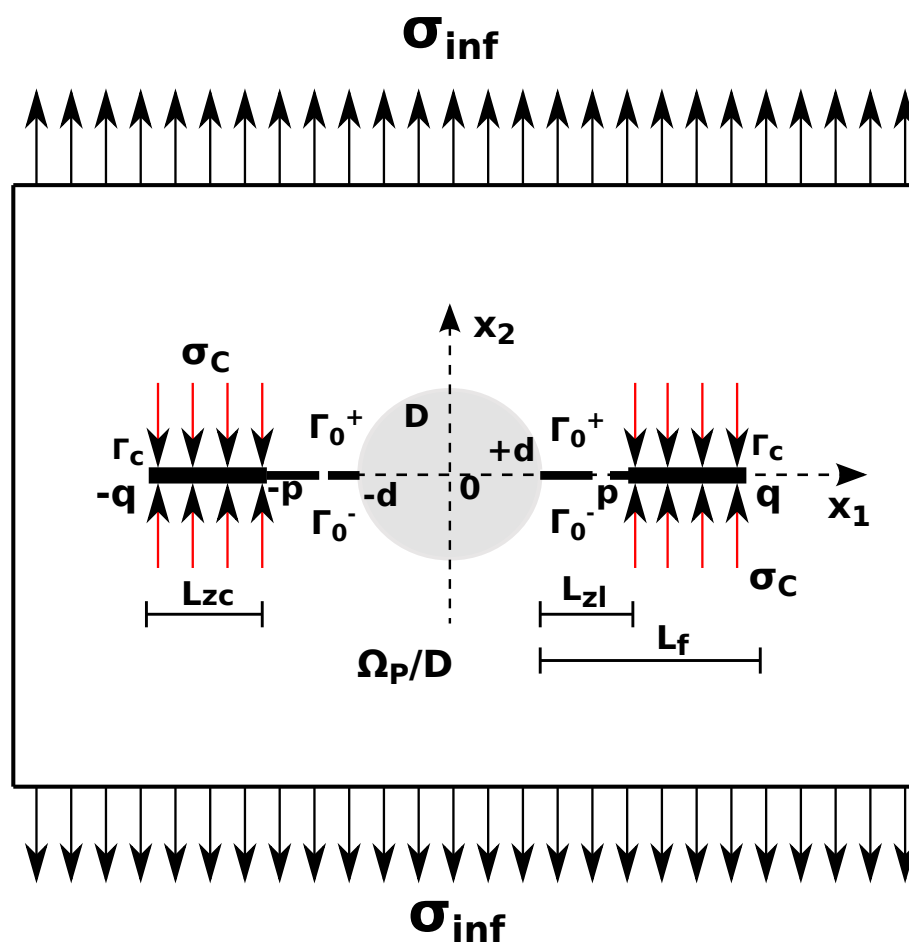


Figure 3.24: Plaque fissurée partiellement cohésives

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}(x_1, x_2) + \sigma_{22}(x_1, x_2) = 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}] \\ \sigma_{22}(x_1, x_2) - \sigma_{11}(x_1, x_2) + 2i\sigma_{12}(x_1, x_2) = 2[\bar{z}\phi''(z) + \overline{\psi'(z)}] \end{array} \right. \quad (3.156)$$

$$\sigma_{22}(x_1, x_2) - i\sigma_{12}(x_1, x_2) = \phi'(z) + \overline{\phi'(z)} + \bar{z}\phi''(z) + \overline{\psi'(z)} \quad (3.157)$$

posons $\Omega(z) = z\phi'(z) + \psi(z)$. A toute fonction analytique correspond la fonction que nous notons $\bar{F}(z)$ telle que : $\bar{F}(z) = \overline{F(\bar{z})}$. On remplace dans $\bar{F}(z)$, z par $\bar{z}$. $\bar{F}(z)$ est une fonction analytique dans le plan de la fissure. Sur l'axe réel de la fissure on a : $z = \bar{z}$.

$$u_1(x_1, x_2) + iu_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\mu}[k\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}] \quad (3.158)$$

Soient t^+ et t^- les points de fissure, faces supérieure et inférieure, d'abscisse t , plus précisément : $\overline{F^-(t)} = \bar{F}^+(t)$ et $\overline{F^+(t)} = \bar{F}^-(t)$. Les conditions aux limites s'écrivent d'après [Bui, 1978] :

$$\begin{aligned} [\Phi^+(t) + \Omega^-(t)] &= -\sigma_{22}^0(t, 0) - i\sigma_{12}^0(t, 0) \\ [\Phi^-(t) + \Omega^+(t)] &= -\sigma_{22}^0(t, 0) - i\sigma_{12}^0(t, 0) \end{aligned} \quad (3.159)$$

Par soustraction :

$$[\Phi^+(t) + \Omega^-(t)] - [\Phi^-(t) + \Omega^+(t)] = 0 \quad \text{sur } L_f \quad (3.160)$$

la fonction $\Phi^-(t) + \Omega^+(t)$ est continue sur L_f , elle est uniforme sur toute la longueur de coupure, ainsi que les déplacements, donc holomorphe dans tout le plan. En posant :

$$\Phi^+(z) = \Omega^+(z), \quad \Phi^-(z) = \Omega^-(z) \quad (3.161)$$

Les conditions aux limite C L sur la fissure devient

$$[\Phi^+(t) - \Phi^-(t)] = -\sigma_{22}^0(t, 0) + i\sigma_{12}^0(t, 0) \quad \text{sur } L_f \quad (3.162)$$

Il s'agit de trouver $\Phi^+(z)$ nulle à l'infinie et satisfaisant à l'équation 1.45 sur la fissure, L_f . C'est le problème de Hilbert dont la solution est de la forme :

$$\phi^+(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{L_f} \frac{(-\sigma_{22}^+(t, 0) - i\sigma_{12}^+(t, 0))dt}{X^+(t)(t - z)} + CX(z) \quad (3.163)$$

$$X(z) = \prod_{j=1}^n (z - a_j)^{-\gamma} (z - b_j)^{\gamma-1} \quad (3.164)$$

avec

$$\gamma = \alpha + i\beta = \frac{\ln(-1)}{2\pi i} = \frac{1}{2} \quad (3.165)$$

Dans l'équation ci-dessus, la constante ($C = 0$) est nulle.

$$\psi'(z) = \overline{\phi'}(z) - \phi'(z) - z\phi'(z) - z\phi''(z) \quad (3.166)$$

Les conditions aux limites sont tels que $\Gamma_0 = X = Y = 0$.

3.11.1 Le Facteur d'Intensité des Contraintes FIC

Formellement le facteur d'intensité des contraintes K_I et K_{II} à l'extrémité z_0 d'une fissure, portée par l'axe réel, est défini dans [Bui, 1978] par l'expression :

$$K_I(z_0) - iK_{II}(z_0) = 2\sqrt{2\pi} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^{\frac{1}{2}} \phi^+(z) \quad (3.167)$$

Cette expression est valable que si l'axe $\mathcal{O}x_1$ est tourné vers le ligament et si l'origine est à la pointe de la fissure.

A droite, le FIC s'écrit :

$$K_I(q) - iK_{II}(q) = \left[\frac{2}{\pi(q-p)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_p^q (\sigma_{22}^0(t, 0) - i\sigma_{12}^0(t, 0)) \left[\frac{t-p}{q-t} \right]^{\frac{1}{2}} dt \quad (3.168)$$

Pour les FIC à gauche, il convient de faire la rotation d'angle π des axes afin que le sommet de la fissure soit orienté vers le point $z = p(t)$. Pour obtenir les facteurs d'intensité au point $p(t)$, nous remplaçons la distribution de contraintes $\sigma_{12}^0(t, 0)$ par $\sigma_{2i}^0(-t, 0)$ d'où :

$$K_I(p) - iK_{II}(p) = \left[\frac{2}{\pi(q-p)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_p^q (\sigma_{22}^0(-t, 0) - i\sigma_{12}^0(-t, 0)) \left[\frac{q-t}{t-p} \right]^{\frac{1}{2}} dt \quad (3.169)$$

Le facteur K_I , ne dépend que de la contrainte normale du mode I, tandis que K_{II} dépend de la contrainte de cisaillement.

3.11.2 Condition d'ouverture de fissure

Les équations (Équation (3.168)) et (Équation (3.169)) ne sont valables que si le facteur d'intensité est positif ($K_I > 0$). C'est la condition cinématique de l'ouverture de la fissure. Sur l'intervalle $(-p(t), +p(t))$ de la zone non cohésive, la contrainte normale $\sigma_{22}(x_1, 0)$ est telle que, les deux équations permettent décrire : $K_I(-p(t)) < 0$ et $K_I(+p(t)) > 0$.

Dans le voisinage de $z = -p(t)$, il y a pénétration des deux lèvres de la fissure. Soit $(p(t), 0)$, l'abscisse du point où la fissure s'ouvre. La fissure se referme partiellement sur une certaine largeur $(-p(t), q(t))$ mais, ne se recolle pas, il y a simplement contact entre les deux faces, qui se traduit cinématiquement par la continuité de la dérivée $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}(x_1, 0)$ au point $(q(t), 0)$, ou statiquement par l'absence de singularités des contraintes au point $(q(t), 0)$. On ce point $(q(t), 0)$, la condition $K_I(q(t)) = 0$ permette décrire :

$$- \left[\frac{2}{\pi(p-q)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_q^p \sigma_{22}^0(-t, 0) \left[\frac{p-t}{t-q} \right]^{\frac{1}{2}} dt = 0 \quad (3.170)$$

Le FIC au point p

$$K_I(p) = \left[\frac{2}{\pi(p-q)} \right]^{\frac{1}{2}} \int_p^q \sigma_{22}^0(t, 0) \left[\frac{t-q}{p-t} \right]^{\frac{1}{2}} dt \quad (3.171)$$

$K_1(q) = 0$, traduit la discontinuité normale au point $(q(t), 0)$ de l'ordre de $O(r^{\frac{3}{2}})$. La dérivée $\frac{\partial w_2}{\partial x_1}(x_1, 0)$ est continue en ce point $(q(t), 0)$.

3.12 Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter la construction des solutions en quasi-statique du problème de propagation de fissure en présence des forces cohésives dans une plaque en acier. On étudie la nucléation et la propagation de fissure cohésive de type Dugdale en prenant en compte le champ de déplacement et de contrainte au voisinage du point où la fissure est initiée. Dans la première partie de la phase purement élastique, les équations d'équilibres sont celles déjà utilisées dans l'étude analytique par [Ferdjani *et al.*, 2007], sauf le changement au niveau de la loi de comportement de la plaque. Dans la phase purement cohésive où toute la fissure est supposée soumise seulement à des forces cohésives, sous charge statique, la fissure évolue progressivement suivant la direction de l'axe $\mathcal{O}x_1$ en mode I. Ainsi sur toute la ligne de la fissure la fonction σ_{2i} est continue. Le saut de déplacement $\llbracket u_n \rrbracket(x_2)$ atteint la valeur critique δ_c , l'évolution de la fissure est discontinue vu la présence de la taille de la zone cohésive T_{zc} . Dans la phase partiellement cohésive, deux considérations ont été prises en compte : la partie libre de toutes les forces de cohésions et la partie additionnant les forces cohésives en bout de la pointe de fissure avec la partie non-cohésive *i.e.*, partie libre. Pour les deux différents cas traités (trou circulaire + ligament) les résultats ont été présentés à partir des graphiques et comparés avec les résultats analytiques.

La méthode de calcul avec les forces cohésives reste intéressante au vu des avantages qu'elle présente. La liste des avantages étant exhaustive, nous nous limiterons à quelques uns plus connus, tels que dans ce modèle, le chemin ou la direction de la fissure est connue au préalable et la fissure est toujours définie en mode I d'ouverture.

Chapitre 4

Modélisation numérique de la plaque soumise aux efforts de tractions

Ce chapitre est utilisé dans le cadre de la théorie linéaire classique de l'élasticité et orienté vers la présentation des principes variationnels. Il nécessite un minimum de connaissances de base sur la méthode des éléments finis. Nous rappelons d'ailleurs quelques points fondamentaux de cette théorie qui seront d'usage constant dans la suite. Ces rappels ne sont nullement systématiques et sont concentrés sur la notion de formulation variationnelle. Nous avons voulu rassembler les relations et les informations jugées utiles dans le contexte de résolution des problèmes par la méthode des éléments finis, en donnant le minimum de démonstration. Les relations établis seront utilisées pour définir les caractéristiques matérielles des éléments finis de type déplacements et de type mixtes.

Sommaire

4.1	Introduction	107
4.2	Rappels sur les problèmes de plaques	108
4.2.1	Définition géométrique de la plaque	108
4.2.2	Coordonnées paramétriques de la plaque	109
4.2.3	Formulation variationnelle de l'équilibre de la plaque	111
4.2.4	Loi de comportement élastique de la plaque	113

4.2.5	Modèle variationnel en déplacements	114
4.2.6	Modèle variationnelle mixte	115
4.2.7	Modèle contraintes	117
4.2.8	Formulation variationnelle étendue au Modèle de Kirchhoff	118
4.3	Mise en œuvre numérique	120
4.3.1	Notations et préliminaires	120
4.4	Formulation de l'élément DST	121
4.5	Élément DST sous forme discrète	123
4.5.1	Approximation par l'élément DKT	123
4.5.2	Exemple d'application d'une approximation sur un côté de l'élément DST du maillage	127
4.5.3	Énergie interne de CT de la plaque	129
4.5.4	Énergie de flexion de la plaque	130
4.5.5	Relations cinématiques de CT de la plaque	131
4.5.6	Construction de la matrice de rigidité $[k]_{9 \times 9}$	132
4.6	Résultats numériques	132
4.6.1	Exemple d'une plaque carrée trouée sollicitée aux efforts de tractions	132
4.6.2	Stratégie de modification de l'intégrale J pour la modélisation numérique	135
4.6.3	Modélisation de la zone cohésive de la plaque	136
4.7	Validation des calculs de l'intégrale J_{num} modifiée	137
4.7.1	Évolution de l'intégrale J_{num} modifiée par rapport à la longueur de la fissure	137
4.7.2	Évolution de l'intégrale J_{num} modifiée en fonction de σ_∞ et σ_c . .	137
4.8	Conclusion	140

4.1 Introduction

Les plaques sont définies dans la littérature comme étant des solides dont au moins une dimension appelée épaisseur, $e_p(x_1, x_2)$ est plus petite par rapport aux autres dimensions géométriques. Dans [Batoz et Dhatt, 1990], une plaque est définie comme un solide ayant une surface de référence plane (longueur L , largeur b) et une épaisseur $e_p(x_1, x_2)$ telle que $e_p(x_1, x_2) < L, b$. Deux familles sont souvent distinguées dans la théorie des éléments finis pour la modélisation des problèmes des plaques.

La théorie des plaques épaisses de Reissner-Mindlin ou Naghdi, basée sur les hypothèses cinématiques des sections droites ou planes. Elle prend en compte les effets des déformations de Cisaillement Transverse CT. Pour plus de détails, voir dans [Naghdi, 1963], [Naghdi, 1972] et [Wempner, 1981]. Nous utilisons dans cette étude, la formulation simplifiée de [Batoz et Geoffroy, 1983] qui respectent les hypothèses de contraintes planes et de déformations de CT dans l'épaisseur. La prise en compte des effets de CT revient à supposer que les particules situées sur la normale $\vec{a}_3$ avant déformation, restent alignées au cours de la déformation [Bernadou, 1994]. Le vecteur unitaire $\vec{a}_3$ est transformé en un vecteur non unitaire $\vec{a}_3^\chi$ tel que :

$$\vec{a}_3^\chi = \vec{a}_3 + \beta_\gamma \vec{a}^\gamma \quad (4.1)$$

où β_γ sont les paramètres des composantes de rotation de la normale $\vec{a}_3$. L'hypothèse de conservation des normales unitaires entraîne une approximation de la forme :

$$\vec{a}_3 = \vec{a}_3 - \varphi_\gamma \vec{a}^\gamma \quad \text{avec} \quad \varphi_\gamma(\vec{u}) = u_{3,\gamma} + b_\gamma^\lambda u_\lambda \quad (4.2)$$

Une seconde famille est très connue de la théorie des éléments finis des plaques, elle est basée sur la notion de plaque mince de Kirchhoff ou Koiter et revient à ne pas prendre en compte les effets des déformations de Cisaillement Transverse CT, *i.e.* pour le vecteur unitaire $\vec{a}_3$, on a $\vec{a}_3^\chi \equiv \vec{a}_3$. Il est important de noter que ce modèle peut être obtenue à partir du modèle de Naghdi en négligeant les effets des déformations de CT. Ainsi, un bon modèle élément fini basé sur la théorie de Reissner-Mindlin devra donner des résultats en accord avec la théorie de Kirchhoff si l'influence de CT est faible [Batoz et Dhatt, 1990]. Les détails du modèle sont décrit dans [Koiter, 1966], [Koiter, 1970] et [Love, 1934]. La condition $\vec{a}_3^\chi \equiv \vec{a}_3$ respecte la relation des paramètres β_γ des composantes de rotation de la normale $\vec{a}_3$ écrit sous la forme :

$$\beta_\gamma = -\varphi_\gamma(\vec{u}) = u_{3,\gamma} + b_\gamma^\lambda u_\lambda \quad (4.3)$$

La théorie de ces plaques est applicable lorsque $L/e_p > 20$ avec L une dimension caractéristique dans le plan x_1x_2 . Pour déterminer la loi de comportement en cisaillement, *i.e.* les relations entre efforts tranchants et cisaillements moyens, on peut faire des calculs à partir des différentes hypothèses à caractère statique ([Bollé, 1947], [Chow, 1971], [Hinton et Owen, 1984], [Ladeveze, 1988], [Lardeur, 1990], [Mindlin, 1951], [Mindlin *et al.*,],

[Noor et Burton, 1989], [Noor *et al.*, 1989], [Owen et Figueras, 1983], [Reissner, 1945], [Reissner,], [Whitney, 1972], [Whitney, 1973] et [Whitney, 1987]). Les analyses numériques pour ces deux théories restent très proches malgré quelques différences sur les idées de bases de chacun d'eux.

La plaque Ω_P que nous modélisons numériquement est en acier et est supposée homogène isotrope. On admet pour ces plaques, les hypothèses de Mindlin si $4 \leq L/e_p \leq 20$ et celles de Kirchhoff si $L/e_p > 20$.

4.2 Rappels sur les problèmes de plaques

Nous faisons quelques rappels élémentaires de la géométrie des plaques nécessaire pour la suite de l'étude. Une description complète est à voir dans [Bernadou, 1994]. L'espace euclidien $\mathbb{E}^3$ est munie d'une base orthogonale directe $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, de norme euclidienne usuelle (notée $|\cdot|$) et équipé d'un produit scalaire habituel $(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}$ en faisant un espace vectoriel normé. Soit $\mathcal{O}$ l'origine de la base $\mathcal{B}$, un point de l'espace affine associé. Tout point de cet espace affine est repéré par ses coordonnées (x_1, x_2, x_3) .

4.2.1 Définition géométrique de la plaque

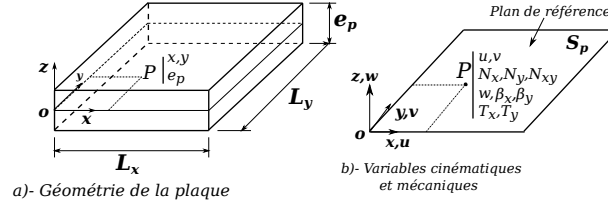


Figure 4.1: Description de la plaque

La géométrie de la plaque est décrite à l'aide de la surface moyenne $\bar{S}_p$ et de l'épaisseur $e_p(x_1, x_2)$. Nous désignons par Ω_p un domaine borné du plan euclidien $\mathbb{E}^2$ de frontière $\partial\Omega_p = \Gamma_p$. Soit x_1 et x_2 deux coordonnées qui permettent de définir la surface de plaque, nous ajoutons une troisième coordonnée, x_3 , qui est mesurée le long de la normale $\vec{a}_3$ à la surface S_p au point $\vec{\phi}_\lambda(x_1, x_2)$. La surface moyenne de la plaque $\bar{S}_p$ est l'image de l'ensemble $\bar{\Omega}_p$ (Ω_p étant le domaine de référence) par une application bijective $\vec{\phi}_\lambda$, i.e., $\vec{\phi}_\lambda(x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_p \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow \vec{\phi}_\lambda(x_1, x_2) \in \bar{S}_p = \vec{\phi}_\lambda(\bar{\Omega}_p) \subset \mathbb{E}^2$ où $\mathbb{E}^2$ est l'espace euclidien rapporté à un repère orthonormé fixe $(\mathcal{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. L'épaisseur $e_p(x_1, x_2)$ de la plaque est définie comme une application : $e_p : (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_p \subset \mathbb{E}^2 \rightarrow e_p(x_1, x_2) \in \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ qui est supposé régulier ($e_p \in C^0(\Omega_p, \mathbb{R})$). Alors la plaque P est l'ensemble fermé de $\mathbb{E}^3$ défini par :

$$P = \left\{ \begin{array}{l} M \in \mathbb{E}^3 : \overrightarrow{OM} = \vec{\phi}_\lambda(x_1, x_2) + x_3 \vec{a}_3 \quad (x_1, x_2) \in \Omega_p \\ -\frac{1}{2}e_p(x_1, x_2) \leq x_3 \leq \frac{1}{2}e_p(x_1, x_2) \end{array} \right. \quad (4.4)$$

Notons $\partial S_p = \vec{\phi}_\lambda(\Gamma_p)$, de telle sorte que $\bar{S}_p = S_p \cup \partial S_p$ avec $\vec{\phi}_\lambda$ et Γ_p suffisamment régulières. Tous les points de la surface moyenne $\bar{S}_p = \vec{\phi}_\lambda(\bar{\Omega}_p)$ sont régulier, de telles sorte que les vecteurs

$$\vec{a}_\alpha = \vec{\phi}_{p,\alpha} = \frac{\partial \vec{\phi}_p}{\partial \xi^\alpha}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (4.5)$$

sont linéairement indépendant pour tous points $x = (x_1, x_2) \in \bar{\Omega}_p$. Les vecteurs $\vec{a}_\alpha$ définissent le plan tangent à la surface $\bar{S}_p$ en tout point $\vec{\phi}_\lambda(x)$. Le vecteur normal au plan tangent est donné par :

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} \quad (4.6)$$

Le point $\vec{\phi}_\lambda(x)$ et les trois vecteurs $\vec{a}_i$ définissent une base orthogonale de l'espace euclidien $\mathbb{E}^3$, dite base covariante associée à la surface S_p au point $\vec{\phi}_\lambda(x)$. L'approximation dans le plan (cas 2D) permet d'introduire les vecteurs $\vec{a}_\alpha$ de base locale covariante et associée aux autres vecteurs $\vec{a}^\beta$ du plan tangent définis par :

$$\vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}^\beta = \delta_\alpha^\beta \quad (4.7)$$

($\delta_\alpha^\beta = 1$: si $\alpha = \beta$, $\delta_\alpha^\beta = 0$: si $\alpha \neq \beta$). On associe aux vecteurs covariantes $\vec{a}_\alpha$, les vecteurs de la base contravariante $\vec{a}^\beta$ sont reliés à $\vec{a}_\alpha$ par des expressions $\vec{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \vec{a}^\beta$

$$\vec{a}_\alpha = a_{\alpha\beta} \vec{a}^\beta; \quad \vec{a}^\alpha = a^{\alpha\beta} \vec{a}_\beta; \quad a^{\alpha\beta} = \vec{a}^\alpha \cdot \vec{a}^\beta = \vec{a}^{\beta\alpha} \quad (4.8)$$

où ($a_{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta}$) : est la première forme fondamentale de la surface moyenne $\bar{S}_p$ de la plaque, c'est un tenseur de changement de métrique qui est l'inverse du tenseur symétrique défini positif $a^{\alpha\beta} = \vec{a}_\alpha \cdot \vec{a}_\beta$.

La seconde forme fondamentale de la surface moyenne $\bar{S}_p$ de la plaque ($b_{\alpha\beta}$), est appelée tenseur de courbure, non symétrique, apparaît comme le tenseur mixte du tenseur symétrique $b_{\alpha\beta} = -\vec{a}_\alpha \vec{a}_{3,\beta} = \vec{a}_3 \vec{a}_{\alpha\beta}$

$$\vec{b}^\beta_\alpha = \vec{a}^{\beta\lambda} \vec{b}_{\lambda\alpha} \quad (4.9)$$

Une fois la géométrie définie, l'étape suivante consiste à transformer celle-ci on un modèle éléments finis.

4.2.2 Coordonnées paramétriques de la plaque

Soit S_p la surface de la plaque caractérisée par deux paramètres ξ et η . Le vecteur position d'un point $P \in S_p$ de cette surface est définie par :

$$\vec{x} = \{x\} = \{x(\xi, \eta); y(\xi, \eta); z(\xi, \eta)\}^T \quad (4.10)$$

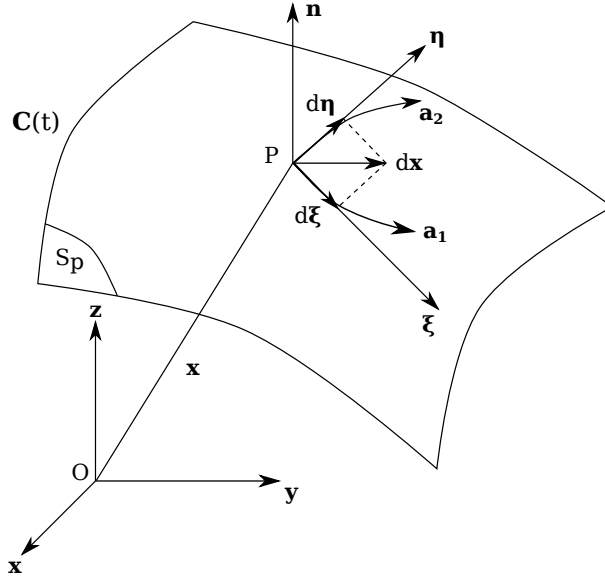


Figure 4.2: Coordonnées paramétriques de la plaque

$d\vec{x}$ est le vecteur dans le plans tangent en P , donnée par l'expression

$$d\vec{x} = \vec{a}_1 d\xi + \vec{a}_2 d\eta \quad (4.11)$$

où $\vec{a}_1$ et $\vec{a}_2$ sont deux vecteurs forment une base paramétrique et tangents à la surface S_p et aux lignes $\xi = cst$ et $\eta = cst$.

$$\langle a_1 \rangle = \langle x_{,\xi} \quad y_{,\xi} \quad z_{,\xi} \rangle; \quad \langle a_2 \rangle = \langle x_{,\eta} \quad y_{,\eta} \quad z_{,\eta} \rangle \quad (4.12)$$

Le vecteur unitaire $\vec{n}$ normal à S_p en P est :

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|} \quad (4.13)$$

L'élément de surface est orientée de sorte que

$$d\vec{S}_p = (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2) d\xi d\eta = \vec{n} dS_p \quad (4.14)$$

et la matrice de transformation $[F_0]$ de l'espace paramétrique à l'espace cartésien supposé continu dans $\vec{x} \rightarrow \vec{x}(\underline{\xi})$ s'écrit :

$$[F_0] = [\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{n}] \quad (4.15)$$

Les coordonnées paramétriques utilisés permettent de décrire la géométrie des éléments par les applications $x(\xi, \eta)$ et $y(\xi, \eta)$.

4.2.3 Formulation variationnelle de l'équilibre de la plaque

La formulation utilisée est issue du Principe des Travaux Virtuels (PTV). Le PTV constitue souvent en mécanique de solide, le support de construction du problème approché par éléments finis. Nous considérons une plaque carrée $\Omega_P = (-L, +L)^2$ en état de contrainte plane tel que $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz} = 0$. Pour la modélisation numérique, la méthode des éléments finis semble le mieux adapté pour obtenir les valeurs numériques représentatives des quantités cinématiques tels que les déplacements, les déformations et des quantités mécaniques (contraintes), tous liées à l'équilibre d'un corps solide soumis à des sollicitations statiques.

Au voisinage d'un point $P(x, y, 0)$ de la plaque en rotation dans le plan (x, y) autour de l'axe y s'écrit par l'expression :

$$\vec{\delta u}_p = \delta u(x, y) \vec{i} + \delta v(x, y) \vec{j} + \delta w(x, y) \vec{k} \quad (4.16)$$

où $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont des vecteurs unitaires suivant les axes x, y, z . Le champ de déplacement virtuels du point $q(x, y, z)$ est défini en admettant l'hypothèse des sections planes, *i.e.* :

$$\vec{\delta u}_q = \vec{\delta u} + z \vec{\delta \beta} \quad \text{avec} \quad \vec{\beta} \cdot \vec{k} = 0 \quad (4.17)$$

soit la forme

$$\begin{Bmatrix} \delta u(x, y, z) \\ \delta v(x, y, z) \\ \delta w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta u(x, y) \\ \delta v(x, y) \\ \delta w(x, y) \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \delta \beta_x(x, y) \\ \delta \beta_y(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

où les $\delta \beta_x(x, y), \delta \beta_y(x, y)$ sont des rotations et les déformations virtuelles.

$$\begin{aligned} \delta \varepsilon_x &= \delta u_{,x} + z \delta \beta_{x,x} \quad ; \quad \delta \varepsilon_y = \delta v_{,y} + z \delta \beta_{y,y} \\ \delta \varepsilon_{xy} &= \frac{1}{2}(\delta u_{,y} + \delta v_{,x} + z(\delta \beta_{x,y} + \delta \beta_{y,x})) \\ \delta \varepsilon_{xy} &= \delta \gamma_{xz} = \frac{1}{2}(\delta \beta_x + \delta w_{,x}) \quad ; \quad \delta \varepsilon_{yz} = \delta \gamma_{yz} = \frac{1}{2}(\delta \beta_y + \delta w_{,y}) \end{aligned} \quad (4.19)$$

sous forme matricielle

$$\{\delta \varepsilon\} = \{\delta e\} + z\{\delta \chi\} \quad (4.20)$$

avec $\langle \delta \varepsilon \rangle = \langle \delta \varepsilon_x \quad \delta \varepsilon_y \quad 2\delta \varepsilon_{xy} \rangle$: les déformations, $\langle \delta e \rangle = \langle \delta u_{,x} \quad \delta u_{,y} \quad \delta u_{,y} + \delta v_{,x} \rangle$: les déformations virtuelles de la plaque, $\langle \delta \chi \rangle = \langle \delta \beta_{x,x} \quad \delta \beta_{y,y} \quad \delta \beta_{x,y} + \delta \beta_{y,x} \rangle$: la courbure virtuelle, $z\langle \delta \chi \rangle$: les déformations virtuelles de flexion et $\langle \delta \gamma \rangle = \langle \delta \beta_x + \delta w_{,x} \quad \delta \beta_y + \delta w_{,y} \rangle$: les déformations virtuelles de CT.

Le PTV (voir dans [Batoz et Dhett, 1990]) s'écrit en utilisant l'équation d'équilibre et les conditions de chargement à l'infinie :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad (4.21)$$

$$W_{int} = \int_V (\langle \delta \varepsilon \rangle \{ \sigma \} + \langle \delta \gamma \rangle \{ \tau \}) dv \quad (4.22)$$

$$\text{avec } \langle \sigma \rangle = \langle \sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_{xy} \rangle \quad \text{et} \quad \langle \tau \rangle = \langle \sigma_{xz} \quad \sigma_{yz} \rangle$$

$$W_{ext} = \int_{S_p} (\langle \delta u \rangle \{ f \} + \langle \delta \beta \rangle \{ m \}) dS_p + \int_{\partial \Omega_T} (\langle \delta u \rangle \{ f_{s_p} \} + \langle \delta \beta \rangle \{ m_{s_p} \}) dS_p \quad (4.23)$$

avec $\langle f \rangle = \langle f_x \quad f_y \quad f_z \rangle$: les efforts par unité de surface moyenne, $\langle m \rangle = \langle m_x \quad m_y \rangle$: le moment surfacique, $\langle f_s \rangle = \langle F_x \quad F_y \quad F_z \rangle$, $\langle m_s \rangle = \langle M_x \quad M_y \rangle$: le moment sur le contour S_f où les efforts sont appliqués, $\langle \delta u \rangle = \langle \delta u \quad \delta v \quad \delta w \rangle$; $\langle \delta \beta \rangle = \langle \delta \beta_x \quad \delta \beta_y \rangle$. $\partial \Omega_T = S_f$: est la partie du contour de S_p où les efforts sont imposés et $\partial \Omega_u = S_u$: partie du contour de S_p où les déplacements et les rotations sont imposés, *i.e.* $\delta u = \delta \beta = 0$. En utilisant l'expression (Équation (4.20)), l'équation W devient :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall \{ \delta u \} \{ \delta \beta \} \quad (4.24)$$

avec

$$W_{ext} = \int_{S_p} (\langle \delta u \rangle \{ f \} + \langle \delta \beta \rangle \{ m \}) dS_p + \int_{\partial \Omega_T} (\langle \delta u \rangle \{ f_{s_p} \} + \langle \delta \beta \rangle \{ m_{s_p} \}) dS_p \quad (4.25)$$

et

$$W_{int} = \int_{S_p} (\langle \delta e \rangle \{ N \} + \langle \delta \chi \rangle \{ M \} + \langle \delta \gamma \rangle \{ T \}) dS_p \quad (4.26)$$

Les efforts résultants de la plaque $\{ N \}$, $\{ M \}$ et $\{ T \}$ sont définis tels que :

$$\{ N \} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} dz \quad (4.27)$$

$$\{ M \} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{Bmatrix} z dz \quad (4.28)$$

$$\{ T \} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (4.29)$$

Au sens variationnel, la relation $W = W_{int} - W_{ext}$, permette d'obtenir les réactions équivalentes le long du contour de la plaque. En tout point $P(x, y, z)$ du contour de la plaque, les efforts N_{xn}, N_{yn}, T_n s'écrivent :

$$\begin{Bmatrix} N_{xn} \\ N_{yn} \\ T_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & T_x \\ N_{xy} & N_y & T_y \\ T_x & T_y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{Bmatrix} ds \quad (4.30)$$

Après multiplication, nous obtenons :

$$\begin{aligned} N_{xy} &= N_x n_x + N_{xy} n_y \\ N_{yn} &= N_{xy} n_x + N_y n_y \\ T_n &= T_x n_x + T_y n_y \end{aligned} \quad \text{sur } S_p \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} M_{xn} &= M_x n_x + M_{xy} n_y \\ N_{yn} &= M_{xy} n_x + M_y n_y \end{aligned} \quad \text{sur } S_p \quad (4.32)$$

où n_x et n_y sont les cosinus directeurs de la normale en S_p dirigée vers l'extérieur. Sur $\partial\Omega_T = S_f$, les quantités $N_{xn}, N_{yn}, T_n, M_{xn}, M_{yn}$ représente les efforts imposés (forces linéiques sur le contour F_x, F_y, F_z) et les moments repartis sur le contour M_x, M_y . Sur $\partial\Omega_u = S_u$, les mêmes quantités représentent les réactions d'appuis. Les équations d'équilibres statique de la plaque associée à l'expression $W = W_{int} - W_{ext}$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} + f_x &= 0 \\ N_{xy,x} + N_{y,y} + f_y &= 0 \\ T_{x,x} + T_{y,y} + f_z &= 0 \end{aligned} \quad \text{sur } S_p \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x + m_x &= 0 \\ M_{xy,x} + M_{y,y} + T_y + m_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{sur } S_p \quad (4.34)$$

et doit vérifier les conditions aux limites sur le contour ∂S_p de la plaque :

$$\begin{aligned} N_{xn} &= F_x \quad \text{ou} \quad u = \bar{u} \\ N_{yn} &= F_y \quad \text{ou} \quad v = \bar{v} \\ T_n &= F_z \quad \text{ou} \quad w = \bar{w} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} M_{xn} &= M_z \quad \text{ou} \quad \beta_x = \bar{\beta}_x \\ M_{yn} &= M_y \quad \text{ou} \quad \beta_y = \bar{\beta}_y \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.2.4 Loi de comportement élastique de la plaque

La loi de comportement est écrit dans le cadre des petits déplacements entre la configuration de référence C^0 et actuelle $C(t)$. L'hypothèse de Mandrin (la section droite reste droite) nous permet de définir les composantes de déplacement du point $M^0(x^0, y^0, z^0)$ confondues avec le point M de coordonnées x, y, z .

$$\vec{u}_q = \vec{u} + z \vec{\beta} \quad \text{avec} \quad \vec{\beta} \cdot \vec{k} = 0 \quad (4.37)$$

soit

$$\{u_q\} = \{u\} + z\{\beta\} \quad (4.38)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle u_q \rangle &= \langle u(x, y, z) \quad v(x, y, z) \quad w(x, y, z) \rangle \\ \langle u \rangle &= \langle u(x, y, z) \quad v(x, y, z) \quad w(x, y, z) \rangle \\ \langle \beta \rangle &= \langle \beta_x(x, y) \quad \beta_y(x, y) \quad 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.39)$$

Le champ de déplacements réels est identique aux champs de déplacements virtuels. Les déformations $\{\varepsilon\}$ linéaires en z s'écrivent :

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z\{\chi\} \quad (4.40)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle \\ \langle e \rangle &= \langle u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x} \rangle \\ \langle \chi \rangle &= \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \\ \langle \gamma \rangle &= \langle \beta_x + w_{,x} \quad \beta_y + w_{,y} \rangle \end{aligned} \quad (4.41)$$

Les déformations de cisaillements transversales $\{\gamma\}$ sont constant sur l'épaisseur de la plaque, $\{e\}$: les déformations de la plaque, $\{\chi\}$: la courbure et $\{\varepsilon\}$: les déformations linéaires.

4.2.5 Modèle variationnel en déplacements

La formulation variationnelle W du problème d'équilibre statique de la plaque est écrite via les équations de PTV. Nous cherchons à trouver les efforts généralisés $\{N\}$, $\{M\}$, $\{T\}$ et les variables cinématiques $\{u\}$, $\{\beta\}$ telles que :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall \{\delta u\}, \{\delta \beta\} \quad (4.42)$$

avec

$$W_{int} = \int_{S_p} (\langle \delta e \rangle \{N\} + \langle \delta \chi \rangle \{M\} + \langle \delta \gamma \rangle \{T\}) dS_p \quad (4.43)$$

$$W_{ext} = \int_{S_p} (\langle \delta u \rangle \{f\} + \langle \delta \beta \rangle \{m\}) dS_p + \int_{\partial \Omega_T = S_f} (\langle \delta u \rangle \{f_{s_p}\} + \langle \delta \beta \rangle \{m_{s_p}\}) dS_p \quad (4.44)$$

On utilise aussi, l'expression $\{u_q\} = \{u\} + z\{\beta\}$ et les équations de courbure $\{\chi\}$. Au sens variationnelle, cette relation est utilisée pour obtenir les réactions équivalentes le long du contour ∂S_p de la plaque. En tout point du contour ∂S_p , les efforts résultants s'écrivent :

$$\begin{aligned}
\{N\} &= [H_m]\{e\} + [H_{mf}]\{\chi\} + [N_0] \\
\{M\} &= [H_{mf}]\{e\} + [H_f]\{\chi\} + [M_0] \\
\{T\} &= [H_c]\{\gamma\} + [T_0]
\end{aligned} \tag{4.45}$$

avec

$$\begin{aligned}
\langle e \rangle &= \langle u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x} \rangle \\
\langle \chi \rangle &= \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \\
\langle \gamma \rangle &= \langle \beta_x + w_{,x} \quad \beta_y + w_{,y} \rangle
\end{aligned} \tag{4.46}$$

4.2.5.1 Conditions aux Limites (CL)

Dans la plaque, les CL sont :

$$\begin{aligned}
\{u\} &= \{\bar{u}\}, & \{\delta u\} &= \{0\} \\
\{\beta\} &= \{\bar{\beta}\}, & \{\delta \beta\} &= \{0\}
\end{aligned} \quad \text{sur } S_u \tag{4.47}$$

Les relations (Équations (4.45)) entre les efforts résultants et les déformations étant satisfaites en tout point, nous obtenons la forme variationnelle en déplacements où :

$$\begin{aligned}
W_{int} &= \int_{S_p} (\langle \delta e \rangle ([H_m]\{e_m\} + [H_{mf}]\{\chi\}) + \langle \delta \chi \rangle ([H_{mf}]\{e\} + [H_f]\{\chi\}) \\
&\quad + \langle \delta \gamma \rangle [H_c]\{\gamma\}) dS_p + \int_{S_p} (\langle \delta e \rangle \{N_0\} + \langle \delta \chi \rangle \{M_0\} + \langle \delta \gamma \rangle \{T_0\}) dS_p
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Le cas où $[H_m] = [0]$ (pas de couplage plaque-flexion), la relation en flexion cisaillement devient :

$$\begin{aligned}
W_f &= \int_{S_p} (\langle \delta \chi \rangle [H_f]\{\chi\} + \langle \delta \gamma \rangle [H_c]\{\gamma\}) dS_p + \int_{S_p} (\langle \delta \chi \rangle \{M_0\} + \langle \delta \gamma \rangle \{T_0\}) dS_p \\
&\quad - \int_{S_p} (\langle \delta w \rangle \{f_z\} \langle \delta \beta \rangle \{m\}) dS_p - \int_{S_f} (\langle \delta w \rangle \{f_z\} + \langle \delta \beta \rangle \{m_s\}) dS_p = 0 \\
&\quad \forall \{\delta w\}, \{\delta \beta_x\}, \{\delta \beta_y\}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

avec les conditions aux limites pour l'appui simple du type Mandrin $\bar{w} = 0$; $M_n = 0$; $M_{n\zeta} = 0$ et du type Kirchhoff $\bar{w} = 0$; $M_n = 0$ et $\bar{\beta}_\zeta = 0$. Pour les bords libres on a : $F_z = T_n = 0$; $M_\zeta = M_{n\zeta} = 0$. Le modèle de déplacement est interprété comme un cas particulier du modèle mixte.

4.2.6 Modèle variationnelle mixte

La formulation mixte permet de définir des modèles éléments finis très performants. Différentes classes des modèles mixtes associés aux problèmes de plaques sont présentées dans ([Dhatt et Touzot, 1984], [Shames et Dym, 1985], [Valid, 1977], [Washizu, 1982]). La

plaque est d'écrite par un ensemble de relations aux dérivées partielles faisant intervenir les contraintes $\{\sigma\}$, les déformations $\{\varepsilon\}$ et les déplacements $\{u\}$. Avec ce modèle, nous traduisons sous forme variationnelle les équations d'équilibres et les conditions aux limites en efforts appliqués sur la partie du contour $S_f = \partial\Omega_T$ de la plaque. On construit ainsi l'équation de W issue du PTV et les déformations linéaires telles que :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall \delta u^*(x, y) \quad (4.50)$$

avec

$$W_{int} = \int_{S_p} (\langle \delta e \rangle \{N\} + \langle \delta \chi \rangle \{M\} + \langle \delta \gamma \rangle \{T\}) dS_p \quad (4.51)$$

$$W_{ext} = \int_{S_p} (\langle \delta u \rangle \{f\} + \langle \delta \beta \rangle \{m\}) dS_p + \int_{\partial\Omega_T=S_f} (\langle \delta u \rangle \{f_{s_p}\} + \langle \delta \beta \rangle \{m_{s_p}\}) dS_p \quad (4.52)$$

et les déformations par l'expression :

$$\{\varepsilon\} = \{e\} + z\{\chi\} \quad (4.53)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon \rangle &= \langle \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 2\varepsilon_{xy} \rangle \quad ; \quad \langle e \rangle = \langle u_{,x} \quad v_{,y} \quad u_{,y} + v_{,x} \rangle \\ \langle \chi \rangle &= \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \quad ; \quad \langle \gamma \rangle = \langle \beta_x + w_{,x} \quad \beta_y + w_{,y} \rangle \end{aligned} \quad (4.54)$$

Cependant les relations de comportement (relations efforts résultants-déformations) et les conditions aux limites cinématiques sont satisfaites explicitement. Pour construire la forme W , les relations (Équations (4.45)) sont écrient sous la forme inverse :

$$\begin{aligned} \{e\} - [C_m]\{N\} + [C_{mf}]\{M\} + [e_0] &= \{0\} \\ \{\chi\} - [C_{mf}]\{N\} - [C_f]\{M\} + [\chi_0] &= \{0\} \\ \{\gamma\} - [H_c]^{-1}\{T\} + [\gamma_0] &= \{0\} \end{aligned} \quad (4.55)$$

avec

$$\begin{aligned} \{e_0\} &= [C_m]\{N_0\} + [C_{mf}]\{M_0\} \\ \{\chi_0\} &= [C_{mf}]\{N_0\} + [C_f]\{M_0\} \\ \{\gamma_0\} &= [H_c]^{-1}\{T_0\} \end{aligned} \quad (4.56)$$

où $\{e\}$, $\{\chi\}$ et $\{\gamma\}$ sont définis telles que :

$$\begin{aligned} [H_m] &= \int_{-t}^t [H] dz \quad ; \quad [H_{mf}] = \int_{-t}^t [H] z dz \\ [H_f] &= \int_{-t}^t [H] z^2 dz \quad ; \quad [N_0] = \int_{-t}^t \{\sigma_0\} dz \\ \{M_0\} &= \int_{-t}^t \{\sigma_0\} z dz \quad ; \quad [T_0] = \int_{-t}^t \{\tau_0\} dz \end{aligned} \quad (4.57)$$

$$\begin{aligned}
W = & \int_{S_p} (\langle \delta e \rangle \{N\} + \langle \delta \chi \rangle \{M\} + \langle \delta \gamma \rangle \{T\} + \langle \delta N \rangle \{e\} + \langle \delta M \rangle \{\chi\} + \langle \delta T \rangle \{\gamma\} \\
& - \langle \delta N \rangle ([C_m] \{N\} + [C_{mf}] \{M\} - \{e_0\}) \\
& - \langle \delta M \rangle ([C_{mf}] \{N\} + [C_f] \{M\} - \{\chi_0\}) \\
& - \langle \delta T \rangle ([H_c]^{-1} \{T\} - \{\gamma_0\})) dS_p - \int_{S_p} (\langle \delta u \rangle \{f\} + \langle \delta \beta \rangle \{m\}) dS_p \\
& - \int_{S_f} (\langle \delta u \rangle \{f_s\} + \langle \delta \beta \rangle \{m_s\}) ds = 0 \quad \forall \{\delta u\}, \{\delta \beta\}, \{\delta N\}, \{\delta M\}, \{\delta T\}
\end{aligned} \tag{4.58}$$

La forme W générale est une expression additionnelle obtenue par addition de l'expression du PTV (équation (4.42) ou (4.50)), les relations (Équations (4.55)) sont multipliées par les champs test $\{\delta N\}$, $\{\delta M\}$, $\{\delta T\}$, en ajoutant les conditions aux limites CL de la plaque :

$$\begin{aligned}
\{u\} &= \{\bar{u}\}, & \{\delta u\} &= \{0\} \\
\{\beta\} &= \{\bar{\beta}\}, & \{\delta \beta\} &= \{0\}
\end{aligned} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega_u = S_u \tag{4.59}$$

La fonctionnelle mixte associée à l'équation W ci-dessus est telle que $\delta \Pi \equiv W$ pour les déplacements $\{u\} \equiv \{\delta u\}$, les rotations $\{\beta\} \equiv \{\delta \beta\}$ et les champs test $\{N\} \equiv \{\delta N\}$; $\{M\} \equiv \{\delta M\}$ et $\{T\} \equiv \delta T$ est la suivante :

$$\begin{aligned}
\Pi = & \int_{S_p} (\langle e \rangle \{N\} + \langle \chi \rangle \{M\} + \langle \gamma \rangle \{T\} - \frac{1}{2} \langle N \rangle [C_m] \{N\} \\
& - \langle N \rangle [C_{mf}] \{M\} - \frac{1}{2} \langle M \rangle [C_f] \{M\} - \frac{1}{2} \langle N \rangle [C_{mf}] \{M\} \\
& - \frac{1}{2} \langle T \rangle ([H_c]^{-1} \{T\} + \langle N \rangle \{e_0\} + \langle M \rangle \{\chi_0\} + \langle T \rangle \{\gamma_0\}) dS_p \\
& \int_{S_p} (\langle u \rangle \{f\} + \langle \beta \rangle \{m\}) dS_p - \int_{S_f} (\langle u \rangle \{f_s\} + \langle \beta \rangle \{m_s\}) ds
\end{aligned} \tag{4.60}$$

avec

$$\{u\} = \{\bar{u}\} \quad \text{et} \quad \{\beta\} = \{\bar{\beta}\} \quad \text{sur} \quad S_u \tag{4.61}$$

La forme W contient des inconnues mixtes qui sont des variables cinématiques $\{u\}$ et $\{\beta\}$ et des variable mécaniques $\{N\}$, $\{T\}$ et $\{M\}$. Elle fait intervenir les dérivées premières des déplacements et de rotations. Les efforts résultants apparaissent sans leurs dérivées ce qui définit un espace des fonctions admissibles de type C^0 pour $\{u\}$ et $\{\beta\}$ et C^{-1} pour $\{N\}$, $\{T\}$ et $\{M\}$.

4.2.7 Modèle contraintes

Pour ce modèle, la forme W est représentée par une fonctionnelle Π_f faible en variables cinématiques *i.e.* pas de dérivées, et forte en variables mécaniques avec la présence des dérivées premières. On intègre par partie sur les termes $\{\chi\}$, $w_{,x}$ et $w_{,y}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\Pi_f = & - \int_{S_p} (\beta_x(M_{x,x} + M_{xy,y} - T_x + m_x) + \beta_y(M_{xy,x} + M_{y,y} - T_y + m_y)) dS_p \\
& + w(T_{x,x} + T_{y,y} + f_z) + \frac{1}{2} \langle M \rangle ([H_f]^{-1} \{M\} \\
& + \frac{1}{2} \langle T \rangle ([H_c]^{-1} \{T\} - \langle T \rangle \{\gamma_0\} + \langle M \rangle \{\chi_0\} \\
& + \int_{\partial S_p} (wT_n + \beta_x M_{xn} + \beta_y M_{yn}) ds - \int_{S_f} (wF_z + \beta_x M_x + \beta_y M_y) ds
\end{aligned} \tag{4.62}$$

avec les conditions limites CL :

$$\{w\} = \{\bar{w}\} \quad ; \quad \{\beta_x\} = \{\bar{\beta}_x\} \quad ; \quad \{\beta_y\} = \{\bar{\beta}_y\} \quad \delta w = \delta \beta_x = \delta \beta_y = 0 \quad \text{sur} \quad S_u \tag{4.63}$$

Les fonctions $\{M\}$ et $\{T\}$ vérifient les équations d'équilibre sur S_p et sur le contour S_f de la plaque (Équations : (4.33), (4.34), (4.35) et (4.36)), l'expression de Π_f (Équation (4.62)) devient :

$$\begin{aligned}
\Pi_c(\{M\}, \{T\}) = & - \int_{S_p} (\frac{1}{2} \langle M \rangle [H_f]^{-1} \{M\} - \langle M \rangle \{\chi_0\} + \frac{1}{2} \langle T \rangle [H_c]^{-1} \{T\} \\
& - \langle T \rangle \{\gamma_0\}) dS_p + \int_{S_u} (T_n \bar{w} + M_{xn} \bar{\beta}_x + M_{yn} \bar{\beta}_y) ds
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Cette forme correspond à l'expression de l'énergie potentielle complémentaire d'une plaque en CT. Les conditions cinématiques sur S_u sont représentées sous forme variationnelle, par contre les conditions mécaniques sont satisfaites explicitement.

4.2.8 Formulation variationnelle étendue au Modèle de Kirchhoff

Dans son aspect théorique, le modèle de Kirchhoff pour la plaques Ω_P est basées sur les hypothèses de conservation des normales. Les déformations de Cisaillements Transversal CT sont négligeables par rapport aux autres composantes.

$$\begin{aligned}
\gamma_{xz} = w_{,x} + \beta_x = 0 \quad ; \quad \delta \gamma_{xz} = 0 \\
\gamma_{yz} = w_{,y} + \beta_y = 0 \quad ; \quad \delta \gamma_{yz} = 0 \quad \text{sur} \quad S_p
\end{aligned} \tag{4.65}$$

où les déplacements réels sur S_p sont notés $\beta_x = -w_{,x}$, $\beta_y = -w_{,y}$ et virtuels $\delta \beta_x = -\delta w_{,x}$, $\delta \beta_y = -\delta w_{,y}$. Sur la plaque, le champ de déplacement d'un point quelconque de S_p est définit :

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \\
v(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \\
w(x, y, z) &= w(x, y)
\end{aligned} \tag{4.66}$$

Comme pour les modèles précédents, le PTV s'écrit :

$$W = W_{int} - W_{ext} \quad \forall \delta w \tag{4.67}$$

avec

$$\begin{aligned}
w &= \bar{w} \quad ; \quad w_{,x} = \bar{w}_{,x} \quad ; \quad w_{,y} = \bar{w}_{,y} \\
\delta w &= 0 \quad ; \quad \delta w_{,x} = 0 \quad ; \quad \delta w_{,y} = 0 \quad \text{sur } S_u
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$W_{int} = \int_{S_p} \langle \delta \chi \rangle \{M\} dS_p = \int_{S_p} (-\delta w_{,xx} M_x - \delta w_{,yy} M_y - 2\delta w_{,xy} M_{xy}) dS_p \tag{4.69}$$

et

$$W_{ext} = \int_{S_p} (\delta w f_z - \delta w_{,x} m_x - \delta w_{,y} m_y) dS_p + \int_{S_f} (\delta w F_z - \delta w_{,x} M_x - \delta w_{,y} M_y) dS_p \tag{4.70}$$

En utilisant :

$$\begin{aligned}
\delta w_{,x} &= \delta w_{,n} n_x - \delta w_{,s} n_y \quad ; \quad \delta w_{,y} = \delta w_{,n} n_y + \delta w_{,s} n_x \\
M_n &= M_{xn} n_x + M_{yn} n_y \quad ; \quad M_{ns} = -M_{xn} n_y + M_{yn} n_x
\end{aligned} \tag{4.71}$$

on a :

$$W_{S_p} = \int_{S_p} (\delta w T_n - \delta w_{,x} M_{xn} - \delta w_{,y} M_{yn}) dS_p = \int_{S_p} (\delta w T_n - \delta w_{,s} M_{ns} - \delta w_{,n} M_n) dS_p \tag{4.72}$$

L'intégration par partie de $\delta w_{,s} M_{ns}$ conduit à l'écriture variationnelle suivante :

$$W_{S_p} = \int_{S_p} (\delta w V_n - \delta w_{,n} M_n) dS_p - \sum_{coins} \delta w \llbracket M_{ns} \rrbracket \tag{4.73}$$

avec $V_n = V_n(s) = T_n + M_{ns,s}$, l'effort tranchant effectif et $M_{ns} = M_{ns}^+ - M_{ns}^-$, la réaction en un point de discontinuité du contour de la plaque.

L'expression du travail virtuel externe s'écrit :

$$W_{ext} = \int_{S_p} (\delta w f_z - \delta w_{,x} m_x - \delta w_{,y} m_y) dS_p + \int_{S_f} (\delta w \bar{V}_n - \delta w_{,n} M_n) dS_p + \sum_{coins} \delta w \bar{R} \tag{4.74}$$

avec $V_n = F_z + M_{s,s}$ et $\bar{R} = \llbracket M_{ns} \rrbracket = M_{ns}^+ - M_{ns}^-$, une force concentrée en un point de discontinuité du contour de la plaque. Deux intégrations parties sur la plaque S_p permet d'obtenir l'équation d'équilibre associée à W .

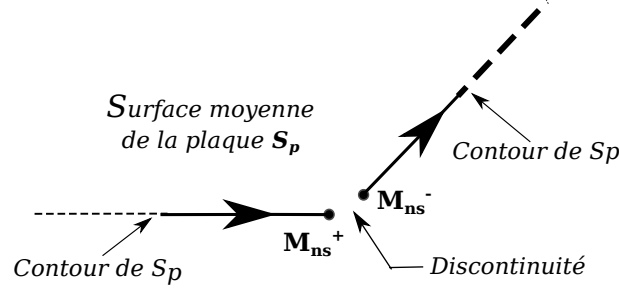


Figure 4.3: Points de discontinuité sur le contour extérieur de la plaque

4.3 Mise en œuvre numérique

4.3.1 Notations et préliminaires

Pour les matrices $[H_f]$ et $[H_c]$, on définit une plaque constituée d'un matériau isotrope tels que :

$$[H_c] = Gkh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

4.3.1.1 Contrainte plane - Matériau isotrope

En contrainte plane, pour un matériau isotrope, on a par définition la matrice d'élasticité $[H_f]$ sous la forme :

$$[H_f] = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu^2}{2} \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

où E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson. $[H_f]$ et $[H_c]$ relient les déformations aux efforts résultants :

$$\begin{aligned} [N] &= [H_m]\{e\} + \{N_0\} \\ [M] &= [H_f]\{\chi\} + \{M_0\} \\ [T] &= [H_c]\{\gamma\} + \{T_0\} \end{aligned} \quad (4.77)$$

Les efforts $\{N_0\}$, $\{M_0\}$ et $\{T_0\}$ sont définis tels que : $\{N_0\} = \int_{-t}^t [\sigma_0] dz$, $[M_0] = \int_{-t}^t [\sigma_0] z dz$ et $[T_0] = \int_{-t}^t [\tau_0] dz$. La matrice de cisaillement $[H_c]$ tient compte des composantes de $[H_\tau]$ et des coefficients $k = \frac{5}{6}$, dits facteurs de correction de Cisaillement Transverse CT. Les matrices $[H_m]$, $[H_{mf}]$ et $[H_f]$ sont définies respectivement :

$$[H_m] = \sum_{i=1} h_i [H]_i \quad ; \quad [H_{mf}] = \sum_{i=1} h_i \eta_i [H]_i \quad ; \quad [H_f] = \sum_{i=1} \frac{1}{3} (z_{i+1}^3 - z_i^3) [H]_i \quad (4.78)$$

$$h_i = z_{i+1} - z_i \quad \text{et} \quad \eta_i = \frac{1}{2}(z_{i+1} - z_i) \quad (4.79)$$

avec $[H]$, la matrice définissant l'état de la plaque. La symétrie matérielle par rapport au plan $z = 0$ implique $[H_m] = 0$. L'homogénéité et l'isotropie de la plaque permet d'écrire les efforts résultants tels que :

$$\begin{aligned} [N] &= h[H]\{e\} + \{N_0\} \\ [M] &= \frac{h^3}{12}[H]\{\chi\} + \{M_0\} \\ [T] &= khG\{\gamma\} + \{T_0\} \quad \text{avec} \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{et} \quad [H] = [H_f] \end{aligned} \quad (4.80)$$

Explicitement on a :

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(u_{,x} + \nu u_{,y}) + N_{0x} \\ N_y &= \frac{Eh}{1-\nu^2}(\nu u_{,x} + v_{,y}) + N_{0y} \\ N_{xy} &= \frac{Eh}{2(1-\nu)}(u_{,y} + v_{,x}) + N_{0xy} \\ M_x &= D(\beta_{x,x} + \nu \beta_{y,y}) + M_{0x} \\ M_y &= D(\nu \beta_{x,x} + \beta_{y,y}) + M_{0y} \\ M_{xy} &= \frac{D}{2}(1-\nu)(\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) + M_{0xy} \\ T_x &= \frac{5}{6}Gh(w_{,x} + \beta_x) + T_{0x} \\ T_y &= \frac{5}{6}Gh(w_{,y} + \beta_y) + T_{0y} \quad \text{avec} \quad D = \frac{Eh^3}{12(1+\nu^2)} \end{aligned} \quad (4.81)$$

4.4 Formulation de l'élément DST

On s'intéresse ici à la formulation de l'élément triangulaire DST (Discrete Shear Triangle) à côtés droits utilisé pour le maillage. Cet élément généralise des plaques minces en prenant en compte les effets de CT.

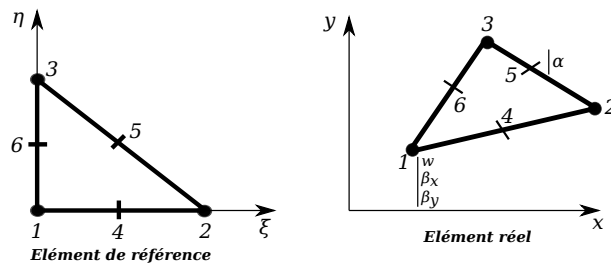


Figure 4.4: Éléments triangulaires à côtés droits

Les énergies internes de déformation de flexion et de cisaillement sont définies par la fonctionnelle :

$$\prod_{int}^e = U_f^e + U_c^e \quad (4.82)$$

avec

$$U_f^e = \frac{1}{2} \int_{S_p} (\langle \chi \rangle [H_f] \{ \chi \}) dS_p \quad (4.83)$$

$$\langle \chi \rangle = \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \quad (4.84)$$

$$U_c^e = \frac{1}{2} \int_{S_p} (\langle \bar{\gamma} \rangle [H_c] \{ \bar{\gamma} \}) dS_p \quad \text{avec} \quad \langle \bar{\gamma} \rangle = \langle \bar{\gamma}_{xz} \quad \bar{\gamma}_{yz} \rangle \quad (4.85)$$

Ainsi $\bar{\gamma}_{xz}$ et $\bar{\gamma}_{yz}$ sont des déformations définies ici en fonction de β_x et β_y par l'intermédiaire de deux équations d'équilibre et de la loi de comportement en flexion.

$\bar{\gamma}_{xz} \equiv \gamma_{xz}$ et $\bar{\gamma}_{yz} \equiv \gamma_{yz}$ avec $\gamma_{xz} = w_{,x} + \beta_x$ et $\gamma_{yz} = w_{,y} + \beta_y$. Pour l'énergie interne de cisaillement transverse CT, nous considérons pour l'élément DST.

$$U_c^e = \frac{1}{2} \int_{S_p^e} \langle \bar{\gamma} \rangle [H_c] \{ \bar{\gamma} \} dS_p = \frac{1}{2} \int_{S_p^e} \langle T \rangle [H_c]^{-1} \{ T \} dS_p \quad (4.86)$$

avec

$$\langle \bar{\gamma} \rangle = \langle \bar{\gamma}_{xz} \quad \bar{\gamma}_{yz} \rangle \quad ; \quad \langle T \rangle = \langle T_x \quad T_y \rangle \quad ; \quad \{ T \} = [H_c] \{ \bar{\gamma}_c \} \quad (4.87)$$

Les efforts tranchants sont obtenus en utilisant les équations d'équilibres T_x et T_y .

$$T_x = M_{x,x} + M_{xy,y} \quad ; \quad T_y = M_{xy,x} + M_{y,y} \quad (4.88)$$

A partir des variables nodales $\{u_n\}$, nous pouvons calculer les moments $\{M\}$ et les contraintes planes :

$$\{M\} = [H_f] \{ \chi \} \quad ; \quad \{ \chi \} = [\mathcal{B}] \{ u_n \} \quad \text{et} \quad \{ \sigma(\xi, \eta, z = \pm \frac{h}{2}) \} = z[H] \{ \chi \} \quad (4.89)$$

Sur chaque côté de l'élément, les relations de contraintes de cisaillement transverse CT sont prise en compte sous la forme :

$$\int_0^{L_k} (\gamma_\zeta - \bar{\gamma}_\zeta) d\zeta = 0 \quad \text{avec} \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.90)$$

avec

$$\gamma_s = w_{,\zeta} + \beta_\zeta = C_k \gamma_{xz} + S_k \gamma_{yz} \quad (4.91)$$

$$\bar{\gamma}_\zeta = \bar{\gamma}_\zeta(\beta_x, \beta_y) = \langle C_k \quad S_k \rangle [H]^{-1} \{ T(\beta_x, \beta_y) \}$$

L'expression $\bar{\gamma}_\zeta$ fait intervenir les variables nodales de rotation de tous les côtés. La prise en compte des effets de CT se fait par l'expression :

$$w_j - w_i = \int_0^{L_k} (\bar{\gamma}_\zeta(\beta_x, \beta_y) - \beta_\zeta) d\zeta \quad (4.92)$$

avec C_k et S_k les cosinus directeurs du côté ζ de nœuds i et j du triangle défini tels que :

$$l_k C_k = x_{ij} \quad ; \quad L_k S_k = y_{ij} \quad ; \quad L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.93)$$

4.5 Élément DST sous forme discrète

Pour obtenir les solutions numériques des plaques minces, plusieurs éléments finis de plaques ont été proposés ([Dhatt, 1969], [Stricklin *et al.*, 1969], [Wempner *et al.*, 1968]). Ces éléments ont les caractéristiques de posséder une énergie interne de flexion proche de celle de Reissner-Mindlin, l'énergie de CT est négligée $U_c^e = 0$ et les hypothèses de Kirchhoff sont introduite sous forme particulière sur le contour, ou éventuellement à l'intérieure de l'élément [Batoz et Dhatt, 1990]. La continuité C^0 de β_x et β_y est en générale maintenue après l'introduction des relations de Kirchhoff sous forme discrète.

4.5.1 Approximation par l'élément DKT

L'élément triangulaire DST (Discrete Shear Triangle) ([Batoz et Lardeur, 1989], [Lardeur et Batoz, 1990]) possède 3 nœuds et 3 degrés de libertés (*ddl*) par nœud. Il généralise les éléments de plaques minces connus sous le nom DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) en prenant en compte les effets de CT ([Batoz *et al.*, 1980], [Batoz et Dhatt, 1981], [Batoz, 1982], [Batoz et Dhatt, 1988], [Dhatt, 1969], [Dhatt, 1970], [Stricklin *et al.*, 1969]). Les approximations C^0 de rotations $\beta_x(\xi, \eta)$ et $\beta_y(\xi, \eta)$ sont telles que la rotation β_ζ dans le plan (ζz) est quadratique en ζ et la rotation β_n dans le plan ($n z$) est linéaire en ζ : avec ζ la coordonnée le long des côtés et n la normale dirigée vers l'extérieure de l'élément.

$$\beta_x = \langle N \rangle \{ \beta_{xn} \} + \langle P_x \rangle \{ \alpha \} \quad ; \quad \beta_y = \langle N \rangle \{ \beta_{yn} \} + \langle P_y \rangle \{ \alpha \} \quad (4.94)$$

avec

$$\langle N \rangle = \langle N_i \quad i = 1, n \rangle \quad ; \quad \langle \alpha \rangle = \langle \alpha_k \quad k = n + 1, 2n \rangle \quad (4.95)$$

$$\langle \beta_{xn} \rangle = \langle \beta_{xi} \quad i = 1, n \rangle \quad ; \quad \langle \beta_{yn} \rangle = \langle \beta_{yi} \quad i = 1, n \rangle$$

et

$$\langle P_x \rangle = \langle (P_k C_k) \quad k = n + 1, 2n \rangle \quad ; \quad \langle P_y \rangle = \langle (P_k S_k) \quad k = n + 1, 2n \rangle \quad (4.96)$$

avec C_k et S_k les cosinus directeurs des côtés k de nœuds i et j du triangle défini tels que :

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k} = \frac{x_j - x_i}{L_k} \quad ; \quad S_k = \frac{y_{ij}}{L_k} = \frac{y_j - y_i}{L_k} \quad ; \quad L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.97)$$

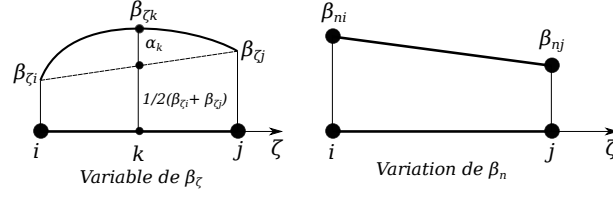


Figure 4.6: Variation quadratique de β_ζ sur les côtés

Les rotations β_ζ et β_n où les directions ζ et n sont relatives au côté k sont reliées à β_x et β_y telles que :

$$\begin{Bmatrix} \beta_\zeta \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ S_k & -C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.100)$$

D'autres techniques peuvent être utilisées pour obtenir les expressions de $\beta_x(\xi, \eta)$ et $\beta_y(\xi, \eta)$ en fonction des variables nodales $\{u_n\}$ et pour obtenir la matrice de rigidité, voir ([Batoz et Dhett, 1981], [Batoz et Dhett, 1988]). On introduit les hypothèses de Kirchhoff sous forme intégrale sur le contour ou sur les côtés ij de l'élément tels que :

$$\int_i^j \gamma_{\zeta z} d\zeta = \int_i^j (w_{,\zeta} + \beta_\zeta) d\zeta = 0 \quad (4.101)$$

avec $\gamma_\zeta = w_{,\zeta} + \beta_\zeta = C_k \gamma_{xz} + S_k \gamma_{yz}$. En utilisant les expressions (Équations (4.98) et (4.100)), on obtient :

$$w_j - w_i + \frac{L_k}{2} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi} + C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) + \frac{2}{3} L_k \alpha_k = 0 \quad (4.102)$$

d'où l'on peut calculer l'expression α_k en fonction des variables nodales des nœuds i et j :

$$\alpha_k = \frac{3}{2L_k} (w_j - w_i) - \frac{3}{4} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi} + C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) \quad k = n+1, 2n \quad (4.103)$$

La substitution de la relation α_k dans les équations de rotation (Équations (4.94)) définies plus haut, nous donne les rotations explicites β_x et β_y en fonctions des variables nodales $\{u_n\}$ pour tout $i = 1, n$, on a :

Table 4.2: Indices i, k, ψ pour DKT

Nœud sommet i	Côté k ($i - j$)	Côté ψ ($i - j$)
1	4 (1-2)	6 (3-1)
2	5 (2-3)	4 (1-2)
3	6 (3-1)	5 (2-3)

$$\begin{aligned}
N_{i1}^x &= \frac{3}{2L_k} P_k C_k - \frac{3}{2L_\psi} P_\psi C_\psi \\
N_{i2}^x &= N_i - \frac{3}{4} P_k C_k^2 - \frac{3}{4} P_\psi C_\psi^2 \\
N_{i3}^x &= -\frac{3}{4} P_k S_k C_k - \frac{3}{4} P_\psi C_\psi S_\psi \\
N_{i1}^y &= \frac{3}{2L_k} P_k S_k - \frac{3}{2L_\psi} P_\psi S_\psi \\
N_{i2}^y &= -\frac{3}{4} P_k S_k C_k - \frac{3}{4} P_\psi S_\psi C_\psi \\
N_{i3}^y &= N_i - \frac{3}{4} P_k S_k^2 - \frac{3}{4} P_\psi S_\psi^2
\end{aligned} \tag{4.104}$$

Les fonctions N_i , P_k et P_ψ sont données dans le tableaux 4.1. La matrice des rotations devient :

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i1}^x & N_{i2}^x & N_{i3}^x \\ N_{i1}^y & N_{i2}^y & N_{i3}^y \end{bmatrix} \{u_n\} \tag{4.105}$$

Dans le tableau 4.2 , on a les indices de k et de ψ relatifs aux deux côtés ayant le sommet i comme point commun.

L'énergie interne de déformation de flexion de l'élément DKT s'exprime par l'expression :

$$U_f^e = \frac{1}{2} \int_{S_p} (\langle \chi \rangle [H_f] \{ \chi \}) dS_p = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k] \{ u_n \} \tag{4.106}$$

avec

$$\langle \chi \rangle = \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \quad ; \quad \{ \chi \} = [B] \{ u_n \} \tag{4.107}$$

$$[B] = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} J_{22} \langle N_{,\xi}^x \rangle - J_{12} \langle N_{,\eta}^x \rangle \\ - J_{21} \langle N_{,\xi}^y \rangle + J_{11} \langle N_{,\eta}^y \rangle \\ - J_{21} \langle N_{,\xi}^x \rangle + J_{11} \langle N_{,\xi}^y \rangle + J_{22} \langle N_{,\xi}^y \rangle + J_{12} \langle N_{,\eta}^y \rangle \end{bmatrix} \tag{4.108}$$

Les J_{ij} sont les termes du jacobien de la transformation géométrique définie par des expressions :

$$x = \sum_{i=1,n} N_i x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1,n} N_i y_i \quad (4.109)$$

Les termes de $[J]$ et $J = \det[J] = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21}$. La matrice de rigidité $[k]$ est de la forme :

$$[k] = \int_{S_p} [\mathcal{B}]^T [H] [\mathcal{B}]_j d\xi d\eta \quad (4.110)$$

La matrice $[k]$ est obtenue avec 3 points d'intégration de Hammer [Batoz et Dhatt, 1995] pour les $[H]$ constantes, puisque la matrice $[\mathcal{B}]$ est linéaire en ξ et η ou peut également être définie explicitement [Batoz, 1982]. Connaissions les variables nodales $\{u_n\}$, il est possible d'évaluer les courbures $\{\chi\}$, les moments $\{M\}$ et les contraintes planes $\{\sigma(\xi, \eta, z)\}$ par des expressions :

$$\{M\} = [H_f]\{\chi\} \quad ; \quad \{\chi\} = [\mathcal{B}]\{u_n\} \quad ; \quad \{\sigma(\xi, \eta, z = \pm \frac{1}{2})\} = [H]\{\chi\} \quad (4.111)$$

Les efforts tranchants sont obtenus à partir des équations d'équilibre T_x et T_y (valeurs supposées constantes pour l'élément DKT).

$$T_x = M_{x,x} + M_{xy,y} \quad ; \quad T_y = M_{xy,x} + M_{y,y} \quad (4.112)$$

A partir des variables nodales $\{u_n\}$, nous pouvons calculer les contraintes planes :

$$\sigma_{xz} = - \int_t^z (\sigma_{x,x} + \sigma_{xy,y}) dz \quad ; \quad \sigma_{yz} = - \int_t^z (\sigma_{xy,x} + \sigma_{y,y}) dz \quad (4.113)$$

La matrice $[k]$ est de rang 6, en ayant négligé l'énergie interne de déformation de CT et ayant introduit les hypothèses de Kirchhoff sur le contour de la plaque, la solution de la plaque converge vers celle de la théorie continue de Kirchhoff. Les paramètres α_k étant éliminés uniquement en fonction des variables nodales du côté k , ce qui laisse maintenir la continuité C^0 de β_ζ

4.5.2 Exemple d'application d'une approximation sur un côté de l'élément DST du maillage

On considère les approximations $\beta_x(\xi, \eta)$ et $\beta_y(\xi, \eta)$ du triangle DST à côté droit.

La forme $\prod_{int}^e$ permet de choisir les approximations quadratiques de type C^0 pour $\beta_x(\xi, \eta)$ et $\beta_y(\xi, \eta)$. On a sur le côté 1-2 :

$$\beta_x(\xi, \eta) = \langle N \rangle \{\beta_{xn}\} + \langle P_x \rangle \{\alpha\} \quad ; \quad \beta_y(\xi, \eta) = \langle N \rangle \{\beta_{yn}\} + \langle P_y \rangle \{\alpha\} \quad (4.114)$$

avec

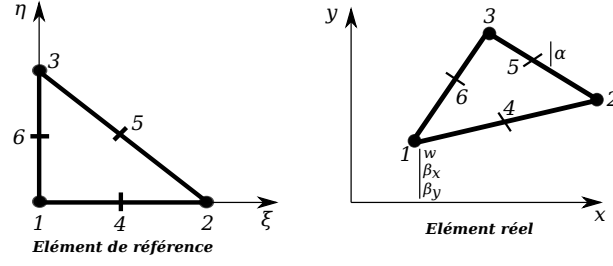


Figure 4.7: Éléments triangulaires à cotés droits

$$\langle N \rangle = \langle 1 - \xi - \eta \quad \xi \quad \eta \rangle \quad ; \quad \langle \alpha \rangle = \langle \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \rangle \quad (4.115)$$

$$\langle \beta_{xn} \rangle = \langle \beta_{x1} \quad \beta_{x2} \quad \beta_{x3} \rangle \quad ; \quad \langle \beta_{yn} \rangle = \langle \beta_{y1} \quad \beta_{y2} \quad \beta_{y3} \rangle$$

et

$$\langle P_x \rangle = \langle (P_k C_k) \quad k = 4, 6 \rangle \quad ; \quad \langle P_y \rangle = \langle (P_k S_k) \quad k = 4, 6 \rangle \quad (4.116)$$

$$P_4 = 4\xi(1 - \xi - \eta) \quad ; \quad P_5 = 4\xi\eta \quad ; \quad P_6 = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

Les variables nodales $\langle u_n \rangle = \langle w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \rangle$ ($i = 1, n \quad n = 3$) pour le triangle DST. Dans le tableau 4.1, on trouve les valeurs des fonctions N_i et P_k .

avec C_k et S_k les cosinus directeurs du côtés k de nœuds i et j du triangle défini tels que :

$$C_k = \frac{x_{ij}}{L_k} = \frac{x_j - x_i}{L_k} \quad ; \quad S_k = \frac{y_{ij}}{L_k} = \frac{y_j - y_i}{L_k} \quad ; \quad L_k = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.117)$$

α_1, α_2 et α_3 , sont des variables associées à la représentation quadratique de $\beta_x(\xi, \eta)$ et $\beta_y(\xi, \eta)$ sur chacun des côtés de l'élément de triangle. On définit cette représentation quadratique sous la forme :

$$\beta_x|_{1-2} = (1 - \xi)\beta_{x1} + \xi\beta_{x2} + 4\xi(1 - \xi)C_4\alpha_4 \quad (4.118)$$

$$\beta_y|_{1-2} = (1 - \xi)\beta_{y1} + \xi\beta_{y2} + 4\xi(1 - \xi)S_4\alpha_4$$

Les rotations β_ζ et β_n sont reliées à $\beta_x(\xi, \eta)$ et $\beta_y(\xi, \eta)$ telles que :

$$\begin{Bmatrix} \beta_\zeta \\ \beta_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & S \\ S & -C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.119)$$

la matrice de rotation est quadratiques pour β_ζ et linéaires pour β_n :

$$\beta_\zeta = (1 - \tilde{\zeta})\beta_{\zeta 1} + \tilde{\zeta}\beta_{\zeta 2} + 4\tilde{\zeta}(1 - \tilde{\zeta})\alpha_4 \quad (4.120)$$

$$\beta_n = (1 - \tilde{s})\beta_{n1} + \tilde{s}\beta_{n2}$$

où $0 \leq \tilde{\zeta} = \frac{\zeta}{L_k} \leq 1$ est la variable sur le côté droit du triangles. On a la formulation approchée des quadriques :

$$\beta_{\zeta k} = \beta_{\zeta k}(\tilde{\zeta}) = \frac{1}{2}(\beta_{\zeta i} + \beta_{\zeta j})\beta_{\zeta 1} + \alpha_k \quad \text{avec} \quad \tilde{\zeta} = \frac{1}{2} \quad (4.121)$$

4.5.3 Énergie interne de CT de la plaque

Soit $[H_f]$ une matrice complète, les relations (Équations (4.112)) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{c} T_x \\ T_y \end{array} \right\} = [\overline{H}_f] \{\beta_{,xx}\} \quad (4.122)$$

avec

$$[\overline{H}_f]_{2 \times 6} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{33} & 2H_{13} & H_{13} & H_{23} & H_{12} + H_{33} \\ H_{13} & H_{23} & H_{12} + H_{33} & H_{33} & H_{22} & 2H_{23} \end{bmatrix} \quad (4.123)$$

et

$$\langle \beta_{,xx} \rangle = \langle \beta_{x,xx} \quad \beta_{x,yy} \quad \beta_{x,xy} \quad \beta_{y,xx} \quad \beta_{y,yy} \quad \beta_{y,xy} \rangle \quad (4.124)$$

où $[H_{ij}]$ sont les termes de $[H_f]$. Pour les triangles, la matrice jacobienne $[j]$ est constante, on a :

$$\{\beta_{,xx}\} = [T_2]\{\beta_{,\xi\xi}\} \quad ; \quad \{\beta_{,\xi\xi}\} = [T_\alpha]\{\alpha\} \quad (4.125)$$

$$\langle \beta_{,\xi\xi} \rangle = \langle \beta_{x,\xi\xi} \quad \beta_{x,\eta\eta} \quad \beta_{x,\xi\eta} \quad \beta_{y,\xi\xi} \quad \beta_{y,\eta\eta} \quad \beta_{y,\xi\eta} \rangle$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} [\tilde{t}_2] & [0] \\ [0] & [\tilde{t}_2] \end{bmatrix} \quad (4.126)$$

$[\tilde{t}_2]$ est une matrices carrée de la forme :

$$[\tilde{t}_2] = \begin{bmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{11}j_{22} + j_{12}j_{21} \end{bmatrix} \quad (4.127)$$

Il suffit donc de calculer les matrices $[\tilde{t}_2]$ sur chaque triangle et d'en déduire la matrice $[T_\alpha]$ par assemblage. $[T_\alpha]$ est une matrice rectangulaire d'ordre 6×3 ordonnée par l'expression :

$$[T_\alpha]_{6 \times 3} = \begin{bmatrix} -8C_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8C_6 \\ -4C_4 & -4C_5 & -4C_6 \\ -8S_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8S_6 \\ -4S_4 & -4S_5 & -4S_6 \end{bmatrix} \quad (4.128)$$

Les expressions (Équation (4.122)) et (Équation (4.125)) donnent :

$$\{T(\beta_x, \beta_y)\} = [\mathcal{B}_{c\alpha}]\{\alpha\} \quad \text{avec} \quad [\mathcal{B}_{c\alpha}] = [\overline{H}_f][T_2][T_\alpha] \quad (4.129)$$

L'expression de l'énergie U_c^e permet de définir la matrice rigidité de CT $[k_{c\alpha}]$ sous la forme :

$$U_c^e = \frac{1}{2} \langle \alpha \rangle [k_{c\alpha}] \{\alpha\} \quad (4.130)$$

$$[k_{c\alpha}] = \mathcal{A}[\mathcal{B}_{c\alpha}]^T [H_c]^{-1} [\mathcal{B}_{c\alpha}] \quad (4.131)$$

Dans cette dernière expression, la matrice $[\mathcal{B}_{c\alpha}]$ reliant les déformations de CT aux variables nodales reste constante.

4.5.4 Énergie de flexion de la plaque

A partir des relations (Équations : (4.84), (4.89) et (4.94)) :

$$\{\chi\} = [\beta_f]\{u_n : \alpha\}^T \quad ; \quad [\mathcal{B}_f] = [\mathcal{B}_{f\beta} : \mathcal{B}_{f\alpha}] \quad (4.132)$$

avec $\langle u_n \rangle = \langle \dots w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \dots \rangle \quad i = 1, 2, 3$ et $\langle \alpha \rangle = \langle \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \beta_6 \rangle$
et la matrice $[\mathcal{B}_{f\beta}]$ sous la forme :

$$[\mathcal{B}_{f\beta}] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -(j_{11} + j_{12}) & 0 & 0 & j_{11} & 0 \\ 0 & 0 & -(j_{21} + j_{22}) & 0 & 0 & j_{21} \\ 0 & -(j_{21} + j_{22}) & -(j_{11} + j_{12}) & 0 & j_{21} & j_{11} \end{array} \middle| \begin{array}{ccc} 0 & j_{12} & 0 \\ 0 & 0 & j_{22} \\ 0 & j_{22} & j_{12} \end{array} \right] \quad (4.133)$$

$$j_{11} = \frac{1}{2A} y_{31} \quad ; \quad j_{12} = -\frac{1}{2A} y_{21} \quad ; \quad j_{21} = -\frac{1}{2A} y_{31} \quad (4.134)$$

$$j_{22} = \frac{1}{2A} x_{21} \quad ; \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{2} (x_{21} y_{31} - x_{31} y_{21})$$

$$[\mathcal{B}_{f\alpha}] = \left[\begin{array}{ccc} j_{11} P_{xk,\xi} + j_{12} P_{xk,\eta} & & \\ \dots & j_{11} P_{xk,\xi} + j_{12} P_{xk,\eta} & \dots \\ (j_{21} P_{xk,\xi} + j_{22} P_{xk,\eta} + j_{11} P_{yk,\xi} + j_{12} P_{yk,\eta}) & & \end{array} \right] \quad k = 4, 5, 6 \quad (4.135)$$

$$\langle P_{x,\xi} \rangle = 4 \langle C_4(1 - 2\xi - \eta) \quad C_5\xi \quad -C_6\eta \rangle$$

$$\langle P_{x,\eta} \rangle = 4 \langle -C_4\xi \quad C_5\eta \quad C_6(1 - \xi - 2\eta) \rangle$$

$$\langle P_{y,\xi} \rangle = 4 \langle S_4(1 - 2\xi - \eta) \quad S_5\xi \quad -S_6\eta \rangle$$

$$\langle P_{Y,\eta} \rangle = 4 \langle -S_4\xi \quad S_5\eta \quad S_6(1 - \xi - 2\eta) \rangle \quad (4.136)$$

La relation (Équations (4.84)) U_f^e s'écrit :

$$U_f^e = \frac{1}{2} \langle u_n : \alpha \rangle [k_{f\alpha}] \{u_n : \alpha\}^T \quad (4.137)$$

avec

$$[k_{f\alpha}] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{12}]^T & [k_{22}] \end{bmatrix} = \int_{S_p} [\mathcal{B}_f]^T [H_f] [\mathcal{B}_f] dS_p \quad (4.138)$$

4.5.5 Relations cinématiques de CT de la plaque

Élimination des variables $\{\alpha\}$ associées aux variations quadratiques de β_x et β_y pour l'élément triangulaire DST. Sur chaque côté de l'élément on a :

$$\bar{\gamma}_{\zeta k}(\beta_x, \beta_y) = \langle C_k \quad S_k \rangle [H_c]^{-1} [\mathcal{B}_{c\alpha}] \{\alpha\} \quad (4.139)$$

Dans cette expression, $[\mathcal{B}_{c\alpha}] \{\alpha\}$ remplace les $\{T(\beta_x, \beta_y)\}$ définis précédemment. Pour chaque côtés $i - j$ de l'élément, les relations (Équations (4.92), (4.98) et (4.100)) donnent pour α_k .

$$L_k \bar{\gamma}_{\zeta k} = w_j - w_i + \frac{L_k}{2} (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi} + C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) + \frac{2}{3} L_k \alpha_k \quad (4.140)$$

Soit, sous forme matricielle :

$$[\mathcal{A}_\alpha] \{\alpha\} = [\mathcal{A}_w] \{u_n\} \quad (4.141)$$

avec

$$[\mathcal{A}_\alpha] = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} L_4 & 0 & 0 \\ 0 & L_5 & 0 \\ 0 & 0 & L_6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L_4 C_4 & L_4 S_4 \\ L_5 C_5 & L_5 S_5 \\ L_6 C_6 & L_6 S_6 \end{bmatrix} [H_c]^{-1} [\mathcal{B}_{c\alpha}] \quad (4.142)$$

soient $L_k C_k = x_j - x_i = x_{ji}$, $L_k S_k = y_j - y_i = y_{ji}$ et $L_k^2 = x_{ji}^2 - y_{ji}^2$, on a :

$$[\mathcal{A}_w] = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & L_4 C_4 & L_4 S_4 & 2 & L_4 C_4 & L_4 S_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & L_5 C_5 & L_5 S_5 & 2 & L_5 C_5 & L_5 S_5 \\ 2 & L_6 C_6 & L_6 S_6 & 0 & 0 & 0 & -2 & L_6 C_6 & L_6 S_6 \end{bmatrix} \quad (4.143)$$

La relation (Équation (4.141)) conduit à :

$$\{\alpha\} = [\mathcal{A}_n] \{u_n\} \quad \text{avec} \quad [\mathcal{A}_n]_{3 \times 9} = [\mathcal{A}_\alpha]^{-1} [\mathcal{A}_w] \quad (4.144)$$

4.5.6 Construction de la matrice de rigidité $[k]_{9 \times 9}$

La matrice de rigidité est la somme de matrices obtenue en flexion-cisaillement CT de la plaque. Il suffit donc de calculer les matrices U_f^e et U_c^e en flexion et en cisaillement CT sur chaque élément de triangle DST et d'en déduire la matrice par assemblage de U^e par l'expression :

$$U^e = U_f^e + U_c^e = \frac{1}{2} \langle u_n : \alpha \rangle \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}]k_{12} > k_{12} \\ {}^T [k_{22}] + k_{c\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ \alpha \end{Bmatrix} \quad (4.145)$$

En remplace $\{\alpha\}$ en fonction de $\{u_n\}$, on obtient la matrice de rigidité $[k]$:

$$U^e = U_f^e + U_c^e = \frac{1}{2} \langle u_n \rangle [k] \{u_n\} \quad (4.146)$$

avec

$$[k] = [k_{11}] + [\mathcal{A}_n]^T ([k_{22}] + [k_{c\alpha}]) [\mathcal{A}_n] + [k_{12}] [\mathcal{A}_n] + [\mathcal{A}_n]^T [k_{12}]^T \quad (4.147)$$

$[k]$ est une matrice de rang 6.

4.6 Résultats numériques

4.6.1 Exemple d'une plaque carrée trouée sollicitée aux efforts de tractions

Pour simplifier la résolution numérique, nous avons choisis le cas d'une plaque carrée $\Omega_P = (-L, +L)^2$ symétrique, sollicitée en traction. La plaque est divisée en quatre parties égales, la résolution se fait sur une partie dont le volume $V_p = ABCDEA$ ne représente que le quart de la plaque. En chaque point de la frontière S_p , le vecteur contrainte $T_i(P, n_j)$ représente soit les forces imposées $\vec{f}_{si}$, soit les réactions associées aux liaisons où les déplacements sont imposés. $\partial\Omega_T = S_f$, la partie du contour où les forces sont imposés et $\partial\Omega_u = S_u$, celle où les déplacements sont imposés.

$$\partial\Omega_P = \partial\Omega_T \cup \partial\Omega_U \quad (4.148)$$

f_{sx}, f_{sy}, f_{sz} sont des sollicitations surfaciques suivant x, y, z . Ainsi sur $\partial\Omega_T$.

$$T_i(P, n_j) = \sigma_{ij} n_j \quad (4.149)$$

Les conditions aux limites sur le contour S_p pour les contraintes sont :

Sur AB (frontière $\partial\Omega_T = S_f$) : agisse la force $f_y = f_y(x, y)$ suivant y uniforme en projection horizontale avec la normale $\langle n \rangle = \langle n_x \quad n_y \rangle$ et $f_x = f_z = 0$:

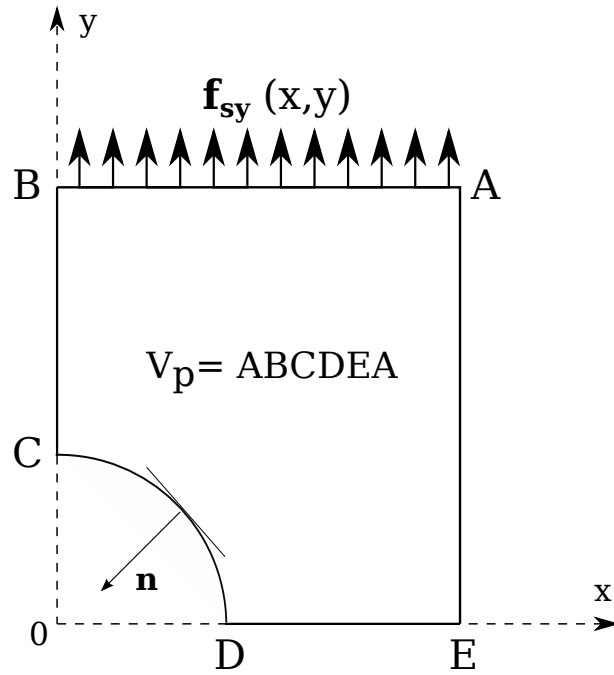


Figure 4.8: Contour d'un quart de plaque après prise en compte des symétries

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xy} = 0; \quad \sigma_{yn} = \sigma_{yy} = f_{sy}(x, y)$$

Sur AE (frontière $\partial\Omega_T = S_f$) : bord libre le long de AE, le vecteur force est nul, *i.e.* $f_x = f_y = f_z = 0$

$$\sigma_{xn} = \sigma_{xx} = 0; \quad \sigma_{yn} = \sigma_{xy} = 0$$

Sur CD (frontière $\partial\Omega_T = S_f$) : le vecteur normal $\langle n \rangle = \langle n_x \ n_y \rangle$ de cosinus directeur n_x et n_y et la force nulle le long de CD telle que, $f_x = f_y = f_z = 0$ on a :

$$\sigma_{yn} = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = 0; \quad \sigma_{yn} = \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y = 0$$

Sur CB (frontière $\partial\Omega_U = S_u$) : la plaque est simplement appuyée le long de CB, $\langle n \rangle = \langle -1 \ 0 \rangle$

$$\sigma_{yn} = -\sigma_{xy} = 0$$

Sur DE (frontière $\partial\Omega_U = S_u$) : la plaque est simplement appuyée le long de DE, $\langle n \rangle = \langle 0 \ -1 \rangle$

$$\sigma_{xn} = -\sigma_{xy} = 0$$

La forme variationnelle W incluant les réactions sur le contour $\partial\Omega_U = S_u$ où les déplacements sont imposés s'écrit :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall \delta u^*(x, y) \quad (4.150)$$

Le contour complet AB, BC, CD, DE, EA est décrit par la frontière $\partial\Omega = S$. $\partial\Omega_T = S_f$ est la partie du contour de la plaque où les forces sont imposées et $\partial\Omega_U = S_u$ celle où les déplacements sont imposés. Sur les faces BC et DE de la frontière $\partial\Omega_U$, les déplacements $u = 0$ sont nuls suivant x et $v = 0$, suivant l'axe des y . La forme forte W associée aux conditions d'équilibre est :

$$W = - \int_V (\delta u^*(\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y}) + \delta v^*(\sigma_{xy,x} + \sigma_{yy,y})) dv = 0 \quad (4.151)$$

avec les conditions aux limites $T_i(P, n_j) = [\sigma_{ij}]\{n_j\}$. où $[\sigma_{ij}]$ est le tenseur des contraintes de Cauchy au point P de la plaque et $\{n\} = \{n_x, n_y, n_z\}^T$, le vecteur normale des cosinus directeurs n_x, n_y, n_z . Après intégration par partie et en admettant δu^* et δv^* continues, nous obtenons :

$$W = - \int_V (\delta u_{,x}^* \sigma_{xx} + \delta v_{,y}^* \sigma_{yy} + (\delta u_{,x}^* + \delta v_{,y}^*) \sigma_{xx}) dv - \int_S (\delta u^* \sigma_{xn} + \delta v^* \sigma_{yn}) ds = 0 \quad (4.152)$$

L'introduction des conditions aux limites sous forme variationnelle donne la forme faible :

$$W = W_{int} - W_{ext} = 0 \quad \forall \delta u^*(x, y) \quad (4.153)$$

Associée aux conditions d'équilibre, cette équation revient sous la forme, $\forall \delta u^*(x, y)$ et $\forall \delta v^*(x, y)$:

$$W = - \int_V \langle D^* \rangle \{ \sigma_{ij} \} dv - \int_B^A \langle \delta u^* \rangle \{ f_s \} dx - \int_C^B \delta u^* \sigma_{xn} dy - \int_D^E \delta v^* \sigma_{yn} dx = 0 \quad (4.154)$$

avec

$$\begin{aligned} \langle D^* \rangle &= \langle \delta u_{,x}^* \quad \delta v_{,y}^* \quad \delta u_{,y}^* + \delta v_{,x}^* \rangle \\ \langle \sigma_{ij} \rangle &= \langle \sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy} \rangle \\ \langle \delta u^* \rangle &= \langle \delta u^* \quad \delta v^* \rangle \\ \langle f_s \rangle &= \langle 0 \quad f_y \rangle \quad \text{sur (AB)}; \quad \langle \delta u^* \rangle = \langle \delta u^*(x, y_B) \quad \delta v^*(x, y_B) \rangle \quad \text{sur (AB)} \\ \sigma_{xn} &= -\sigma_{xx} \quad \text{sur (CB)} \quad \langle n \rangle = \langle -1 \quad 0 \rangle \\ \sigma_{yn} &= -\sigma_{yy} \quad \text{sur (DE)} \quad \langle n \rangle = \langle 0 \quad -1 \rangle \end{aligned} \quad (4.155)$$

En considérant un champ virtuel cinématiquement admissible tels que $\delta u^* = 0$ sur (CB) et $\delta v^* = 0$ sur (DE) , la forme faible revient à écrire :

$$W = - \int_V \langle D^* \rangle \{ \sigma_{ij} \} dV - \int_B^A \langle \delta u^* \rangle \{ f_s \} dx = 0 \quad \forall \delta u^* \quad \text{et} \quad \delta v^*(x, y) \quad (4.156)$$

avec $\delta u^* = 0$ sur (CB) et $\delta v^* = 0$ sur (DE)

Les déplacements virtuels $\delta u^*(x_1, x_2)$ et $\delta v^*(x_1, x_2)$, représentent les fonctions de pondération ou fonction tests.

4.6.2 Stratégie de modification de l'intégrale J pour la modélisation numérique

Le problème résolu en premier est celui de la modification de l'intégrale J de Rice appelée ici, intégrale numérique et noté J_{num} . Un programme de calcul Cast3M bidimensionnel par éléments finis a été mise en place. Ce programme, utilise l'intégrale numérique, les conditions aux limites et les éléments triangulaires DST sur toute la plaque. Le taux d'énergie restituée ne dépend pas de la contrainte cohésive. Le maillage ainsi défini est plus serré dans la zone fissurée. On montre tout d'abord que la discrétisation par la méthode des éléments finis est correcte et pour être en accord avec les résultats analytiques, une comparaison est faite afin de valider le modèle numérique.

4.6.2.1 Exemple de résolution de la zone sans forces cohésives $\sigma_c = 0$

La résolution du problème pour la zone sans force cohésives s'effectue selon le programme Cast3M mise en place. On applique sur la plaque une charge de traction variable à l'infinie σ_∞ et on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas la présence des forces cohésives, *i.e.* $\sigma_c = 0$ sur toute la longueur de la fissure l_f . L'estimation numérique de cette intégrale (J_{num}) modifiée exige de calculer pour les éléments non cohésifs, les déplacements u_0 et les contraintes σ_0 .

4.6.2.2 Exemple de résolution de la zone avec forces cohésives $\sigma_c \neq 0$

En présence des forces cohésives, l'expression de l'énergie totale restituée et le facteur d'intensité des contraintes décrient dans la partie analytique par la formule de Rice est ici restreinte aux déformations planes en mode I par :

$$J_{ana}(\sigma_\infty, \sigma_c, l_c) = 2 \frac{(1 - \nu^2)}{E} K_I^2 \quad (4.157)$$

avec

$$K_I = \sigma_\infty \sqrt{\pi l} - 2\sigma_c \sqrt{\frac{l}{\pi}} \text{Arccos} \frac{d}{l} \quad (4.158)$$

Comme dans la zone non cohésive, cette expression est modifiée dans le programme Cast3M sous la forme de l'intégrale J_{num} . Cette intégrale J_{num} modifiée est déterminée en faisant l'hypothèse que les forces cohésives restent constante ($\sigma_c = cste$) sur toute la longueur de la fissure. Le programme Cast3M prend en compte la contrainte σ_c et la contrainte σ_∞ . Faire la même opération pour la partie cohésive en multipliant les déplacements u_1 par un coefficient λ_1 tels que $\lambda_1 u_1$. La superposition de ces deux zones de déplacements s'écrit sous la forme additionnelle :

$$u_T = \lambda_0 \cdot u_0 + \lambda_1 \cdot u_1 \quad (4.159)$$

avec λ_0 et λ_1 : les coefficients multiplicateurs des déplacements dans le cas de la rupture non cohésive et cohésive respectivement.

4.6.3 Modélisation de la zone cohésive de la plaque

La technique de modélisation de la zone cohésive est identique à celle développée par [Laverne, 2004]. La fissure est subdivisée en trois zones (voir figure ci-dessous) : une zone libre de contrainte (sans cohésion), notée L_{zl} ; une seconde zone, appelée zone cohésive, notée L_{zc} : les forces cohésives sont non nulles, et en fin une troisième zone saine, appelée aussi zone continue où la contrainte d'amorçage n'a pas été atteinte.

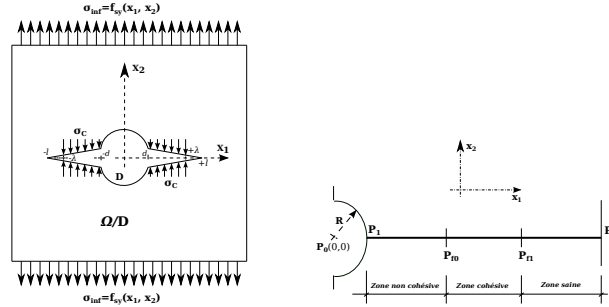


Figure 4.9: Longueur de fissure : répartition des différentes zones

La superposition de ces deux premières zones donne la longueur totale de la fissure, notée L_0 . Celle-ci dans la zone cohésive et non cohésive varie de telle sorte que la somme peu s'écrire sous la forme :

$$L_0 = L_{zl} + L_{zc} \quad (4.160)$$

Toute fois, l'estimation de la taille de la zone cohésive T_{zc} est décrit dans [Laverne, 2004], [Pham, 2016], [Pham *et al.*, 2016] et [Rice, 1980] pour une fissure dans un matériau élastique sous l'expression :

$$T_{zc} = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{G_c}{\sigma_c^2} \quad (4.161)$$

avec E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson du matériau, σ_c la contrainte critique d'amorçage et G_c le taux de restitution d'énergie critique.

4.7 Validation des calculs de l'intégrale J_{num} modifiée

Afin de valider les résultats de l'intégrale J_{num} modifiée, plusieurs tests numériques ont été effectués, notamment sur la variation de la longueur de fissure l_f , la variation de la contrainte normale K_N de la plaque et la variation du rayon R de trou existant dans la plaque.

4.7.1 Évolution de l'intégrale J_{num} modifiée par rapport à la longueur de la fissure

Pour tester le programme éléments finis Cast3M et valider le calcul numérique de l'intégrale modifiée, une analyse sur l'évolution de l'intégrale J_{num} par rapport à la longueur de la fissure a été étudiée. La technique consiste à faire varier la longueur de la zone cohésive L_{zc} en même temps que la longueur de la zone non cohésive L_{zl} , de sorte que la superposition de deux zones donne la longueur totale de la fissure L_0 .

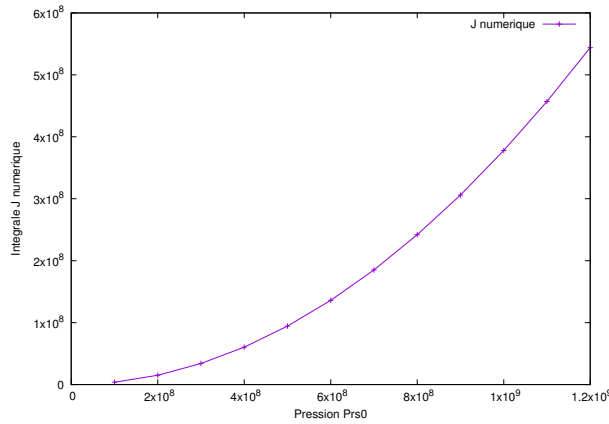


Figure 4.10: Courbe de l'intégrale J analytique J_{ana} et numérique J_{num} : Pression $Prs0$ variable

4.7.2 Évolution de l'intégrale J_{num} modifiée en fonction de σ_∞ et σ_c

Dans le but de construire la courbe d'évolution de l'intégrale J_{num} modifiée. Les calculs sont effectués dans les conditions où la force de traction σ_∞ à l'infinie est supposée variable de $1.10^8 Nm^{-2}$ à $12.10^8 Nm^{-2}$. Dans la zone fissurée elle est maintenue constante sur toute la longueur de la fissure $\sigma_c = 1.10^8 Nm^{-2}$.

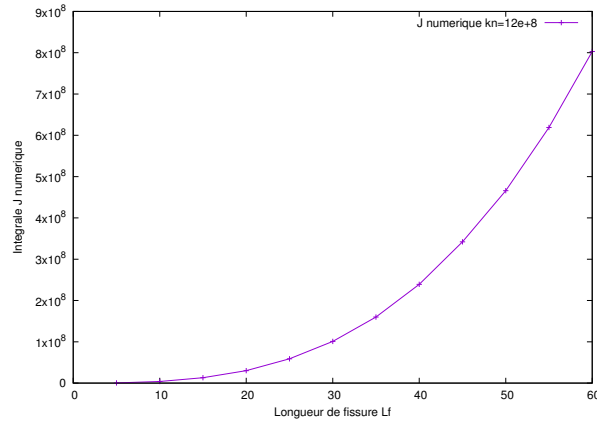


Figure 4.11: Courbe de l'intégrale J_{num} en fonction de la longueur de la fissure l_f et de la pression $Prs0$

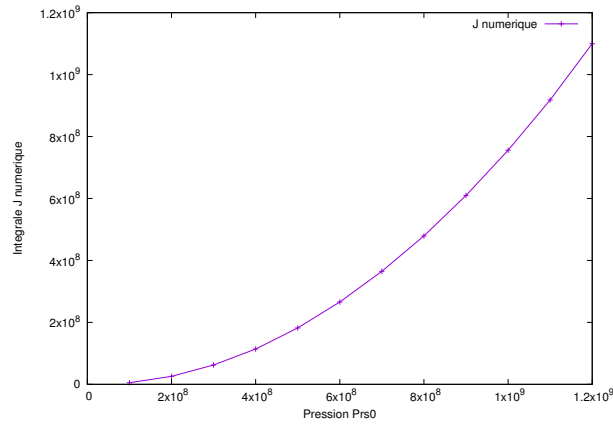


Figure 4.12: Courbe de l'intégrale J_{num} en fonction la pression $Prs0$. comparaison entre numérique cohésive et numérique non-cohésive

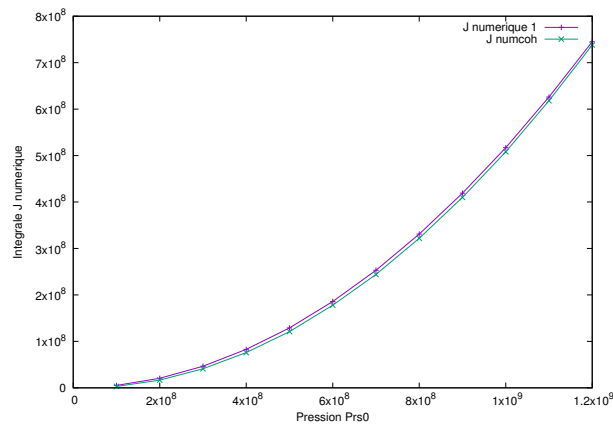


Figure 4.13: Courbe de comparaison de l'intégrale J numérique J_{num} non-cohésive et analytique J_{ana} en fonction la pression $Prs0$.

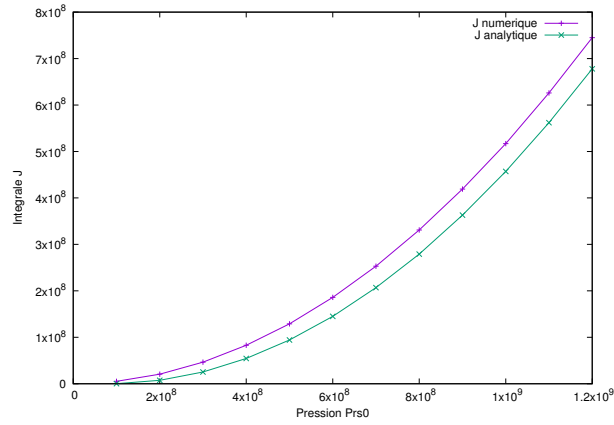


Figure 4.14: Courbe de comparaison de l'intégrale J numérique J_{num} cohésive et analytique J_{ana} en fonction la pression $Prs0$.

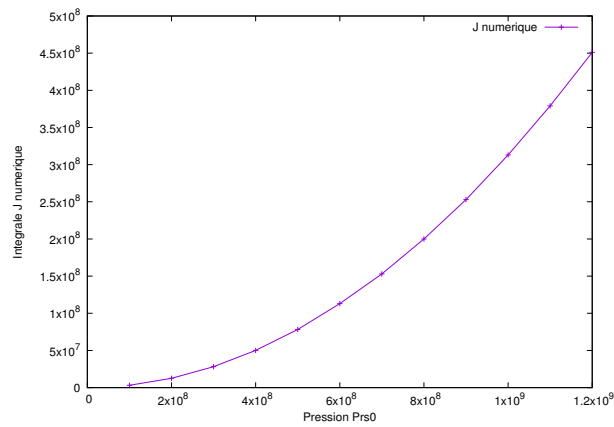


Figure 4.15: Courbe de comparaison de l'intégrale J numérique J_{num} non-cohésive et analytique J_{ana} en fonction la pression $Prs0$. Cas d'un ligament

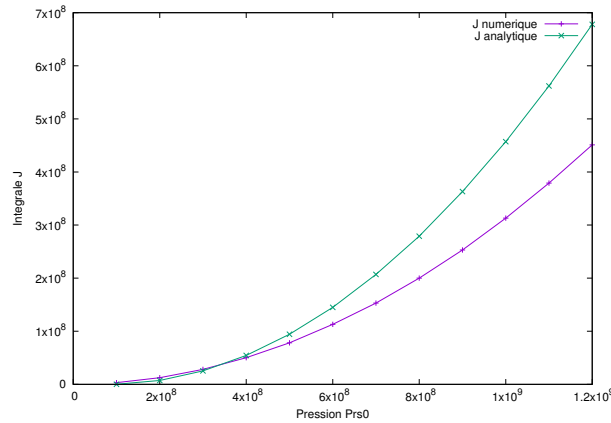


Figure 4.16: Courbe de comparaison de l'intégrale J numérique J_{num} cohésive et analytique J_{ana} en fonction la pression $Prs0$. Cas d'un ligament

La solution numérique obtenue par la méthode de l'intégrale modifiée est comparée à la solution analytique. On à présenter les résultats de simulations numériques utilisant le modèle de zone cohésive pour les problèmes d'évolutions de fissures dans une plaque carrée. Les résultats obtenus sont très proches de ceux analytiques, dans certains cas trouvé, la présence des forces cohésives ne sont pas très significative. Pour la discrétisation de la ligne de fissure, on utilise le même élément fini entre la zone cohésive et non-cohésive, ce qui est un avantage.

4.8 Conclusion

Le chapitre IV est l'œuvre de la modélisation numérique de la plaque Ω_P carrée avec trou circulaire par éléments finis. Après quelques rappels bibliographiques sur les problèmes des plaques, nous avons pour le calcul de la plaque considérée la symétrie. La plaque a été divisée en quatre parties égales. Tous les calculs ont été effectués sur un quart du solide. Une application numérique avec conditions aux limites est pris en compte. La résolution numérique est basée par une formulation faible du problème. En admettant une discrétisation parfaite de la plaque par l'utilisation des éléments triangulaires, le calcul de l'intégrale J à été introduit dans le programme numérique via le code de calcul Cast3M en 2D.

Des difficultés ont été rencontrées dans l'établissement du programme, des difficultés liées à la programmation proprement dite et la difficulté d'utilisation du code Cast3M.

L'estimation de la formulation faible $W = W_{int} - W_{ext} = 0$ est vérifiée, les valeur de l'intégrale numérique J_{num} modifiée ont été comparée avec les résultats analytiques de [Ferdjani *et al.*, 2007]. La comparaison des résultats numérique et analytique est correct, les courbes des valeurs numériques sont très proche de celles analytiques. Le bon accord des

résultats avec la partie analytique, permet de valider le modèle numérique et le programme Cast3m 2D.

Conclusion générale et perspectives

Ce mémoire a porté sur la modélisation de la rupture d'une plaque contenant une cavité circulaire au centre et sur la modélisation par des forces cohésives.

A l'exception des quelques études effectuées sur les problèmes des forces cohésives ([Dugdale, 1960a], [Pham, 2016], [Labbens, 1980], [Pham, 2016], [Ferdjani *et al.*, 2007] et [Dang, 2013]), l'étude bibliographique sur la propagation des fissures en présence des forces de cohésion suscite beaucoup d'enthousiasme. Dans nos travaux, plusieurs parties ont été abordées pour enfin présenter un modèle numérique basé sur l'utilisation des éléments finis, l'introduction des forces cohésives et la formulation variationnelle. Le modèle numérique présenté, étudie le mode de propagation de fissure et définit le champ de contraintes σ_{ij} et de déplacement u_i . Ensuite, des simulations numériques sont exécutées pour analyser la propagation de la fissure sous la loi de Dugdale.

Dans le chapitre I, à caractère bibliographique, nous avons mis l'action sur les différents modes d'ouvertures des fissures, le critère de rupture fragile, l'analyse asymptotique en mode I et II, ainsi que la théorie énergétique de la rupture fragile laquelle utilise l'approche de Griffith et d'Irwin ont été pris en compte. L'intégrale de contour et les différents modèles sur les forces cohésives ont été cités. La partie bibliographique termine par un exemple d'application de type essai cantilever sur poutre nommée DCB.

Dans une évolution en quasi-statique, la propagation d'une fissure en mode I est simulée grâce aux calculs numériques. La mise en œuvre de cette méthode numérique est illustrée par des exemples simples de plaque mince avec cavité circulaire au centre. Les modèles simples étudiés sont constitués par la propagation de fissure en mode I et l'introduction des forces cohésives en pointe de fissure. La modélisation numérique est réalisée par la mise en œuvre d'un programme de calcul par élément finis (Cast3M).

La notion de force cohésive en tête d'une ligne de fissure est introduite en modifiant l'intégrale de contour de Rice. Le modèle de propagation de fissure est choisi en adoptant une loi de propagation appropriée selon le type de chargement et le matériau fragile (plaque). En accord avec le calcul analytique, montre que le mode de propagation est celui d'ouverture de fissure *i.e.*, le mode I.

Dans la seconde partie (chapitre II), nous avons présentés le problème de référence

ainsi que les différentes phases études analytique. Ce chapitre à servit de modèle et d'orientation pour la suite de l'étude. Les équations d'équilibres et les conditions aux limites utilisées dans la partie numérique (chapitre II et IV) sont identique avec celles utilisée dans l'étude analytique, seule la loi de comportement et les conditions de symétries qui sont différentes. L'étude de la phase élastique et de la phase de rupture on demeurée inchangées. L'étude de rupture dans la phase de rupture a été divisée en deux phases à savoir : la phase libre sans force de cohésion et la phase purement cohésive qui se subdivise en partie libre et en partie partiellement cohésive, le tout sous une charge de traction uniforme. Deux cas de figure ont été pris en compte, le cas d'une plaque avec trou circulaire et le cas d'un ligament. Les conditions de chargement et les conditions aux limites pour ces deux cas sont identique. Les courbes des contraintes sur longueur la longueur de fissure obtenue ont données des résultats satisfaisant, mais n'ont pas été comparées avec les courbes analytiques.

Le cas partiellement cohésif dans l'objectif était d'introduire les forces de cohésions seulement sur une partie située en pointe de la fissure, et laissée la fissure libre sur une autre partie. Les courbes ont été tracées en fonction de la partie cohésive et la partie libre. Les valeurs obtenues n'ont pas été comparées, mais l'allure semble correcte. Ainsi plusieurs cas ont été testé, dans le cas de la plaque avec trou circulaire.

D'autre part, lors de la modélisation numérique avec le logiciel Cast3M, nous avons calculer l'énergie de fissuration à partir de l'intégrale J . Un recours à la modification de l'intégrale à eu lieu. Dans la ligne de fissure l_f on à introduit dans la zone libre la longueur notée L_{zl} et dans la zone cohésive la longueur L_{zc} de telle sorte que la somme des deux donne la longueur totale L_0 ou l_f . Avec une charge de traction variable ou constante, nous avons également effectués des comparaisons entre l'étude numérique et analytique. Les résultats sont on accord avec ceux obtenus à l'étude analytique par [Ferdjani *et al.*, 2007]. La bonne concordance des ces résultats s'explique par le bon programme de calcul éléments finis effectué et le bon choix des paramètres de modélisation géométrique et mécanique de la plaque. Dans cette confrontation des résultats entre les intégrales numériques et analytiques, les courbes obtenues numériquement à montrées une bonne concordance quelque soit le chargement. Cette étude sur la modélisation de la rupture par des forces cohésives à permis de dégager plusieurs résultats : d'abord sur le choix de type de plaque ainsi que la loi de comportement.

Il sera utile de poursuivre cette étude pour les applications aux problèmes réels (fissures planes avec configurations arbitraires). L'étude devrait être complété par la programmation d'un code pour simulation numérique de propagation de la fissure en présence des forces cohésives en liaison avec les calculs analytiques. Il serais intéressant également d'étudier le problème dans le cas de plusieurs fissures (simultanées ou parallèles).

Bibliographie

- [Barenblatt, 1959] BARENBLATT, G. I. (1959). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. .
- [Barenblatt, 1962] BARENBLATT, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. *Advances in applied Mechanics, Academic Press N. Y.*, **7**.
- [Batoz, 1982] BATOZ, J. L. (1982). An explicit formulation for an effecient triangular plate element. *IJNME*, **18**:1077–1089.
- [Batoz et al., 1980] BATOZ, J. L., BATHE, K. J. et HO, L. W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. *IJNME.*, **15**:1771–1812.
- [Batoz et Dhatt, 1981] BATOZ, J. L. et DHATT, G. (1981). An evaluation of two simple and effective triangular and quadrilateral plate bending elements, new and future developments in commercial finite element method. *Proc. of the Int. Conf. held at los Angeles*, :352–368.
- [Batoz et Dhatt, 1988] BATOZ, J. L. et DHATT, G. (1988). Revue et bilan des éléments de plaque de type kirchhoff discret, calcul des structures et la. *Eds Pluralis*, **2 Fouet et al.**:137–160.
- [Batoz et Dhatt, 1990] BATOZ, J.-L. et DHATT, G. (1990). *Modélisation des structures par éléments finis*. Volume 2 Poutres et plaques. Hermes, 34, rue Eugène Flachat 75017 Paris.
- [Batoz et Dhatt, 1995] BATOZ, J.-L. et DHATT, G. (1995). *Modélisation des structures par éléments finis*. Volume 1 Solides élastiques. Hermès, 14, rue Lantinièz 75017 Paris.
- [Batoz et Geoffroy, 1983] BATOZ, J. L. et GEOFFROY, P. (1983). Evaluation d'un élément finis triangulaire pour l'analyse non linéaire statique de coques minces, contrat utc/dret, no 81/032,. *Division modèles numériques en mécanique Université Technologique de Compiègne* ., :-.
- [Batoz et Lardeur, 1989] BATOZ, J. L. et LARDEUR, P. (1989). A discrete shear triangular nine dof element for the analysis of thick to very thin plates. *IJNME.*, **28**:533–560.
- [Bazant et Cedolin, 1991] BAZANT, Z. P. et CEDOLIN, L. (1991). *Stability of structures : Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*. Dover Publications, Inc.
- [Bernadou, 1994] BERNADOU, M. (1994). *Méthodes d'éléments finis pour les problèmes de coques minces*. Recherches en Mathématiques Appliquées RMA. Masson, 120, bvd Saint Germain 75280 Paris Cedex 06.

- [Bilby *et al.*, 1963] BILBY, B. A., COTTRELL, A. H. et SWINDEN, K. H. (1963). *Proc. Roy. Society, Serie A*:272–304.
- [Bollé, 1947] BOLLÉ, E. (1947). Contribution au problème linéaire de flexion d'une plaque élastique. *Bulletin Technique de la Suisse Romande.*, **73**:281–285 and 293–298.
- [Bonnet et Frangi, 2007] BONNET, M. et FRANGI, A. (2007). *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. Hermes Sciences, 91128 Palaiseau Cedex.
- [Bouchard, 2000] BOUCHARD, P. O. (2000). *Contribution à la modélisation numérique en mécanique de la rupture et structures multimatériaux*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.
- [Bui, 1978] BUI, H. D. (1978). *Mécanique de la rupture fragile*. Paris.
- [Burdekin et Stone, 1966] BURDEKIN, F. M. et STONE, D. E. W. (1966). The crack opening displacement approach to fracture mechanics of yielding materials. *Journal of strain analysis I-2.*, :145–153.
- [Chow, 1971] CHOW, W. T. S. (1971). On the propagation of flexural waves in an orthotropic laminated plate and its response to an impulsive load. *J. Comp. Mat.*, **5**:306–319.
- [Ciarlet, 1986] CIARLET, P. G. (1986). *Elasticité tridimensionnelle*. Collection Recherches en Mathématiques Appliquées, 120, bvd Saint Germain 75280 Paris Cedex 06.
- [Dang, 2013] DANG, T. B. T. (2013). *Calcul multi-échelle de singularités et applications en mécanique de la rupture*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- [Destuynder et Djaoua, 1981] DESTUYNDER, P. et DJAOUA, M. (1981). Sur une interprétation mathématique de l'intégrale de Rice en théorie de la rupture fragile. *Math. Meth. in Appl. Sci. London*, **3**:70–87.
- [Destuynder *et al.*, 1983] DESTUYNDER, P., DJAOUA, M. et LESCURE, S. (1983). Quelques remarques sur la mécanique de la rupture élastique. *Journal de Mécanique Théorique et Appliquée.*, **2**, No 1:113–135.
- [Dhatt, 1969] DHATT, G. (1969). Numerical analysis of thin shells by curved triangular elements based on discrete Kirchhoff hypothesis. *Proc. ASCE Symp. On applications of FEM in Civil engineering, Vanderbilt Univ. Nashville, Tenn.*, :255–278.
- [Dhatt, 1970] DHATT, G. (1970). An efficient triangular shell element. *AIAA*, **8**, No 11:2100–2102.
- [Dhatt et Touzot, 1984] DHATT, G. S. et TOUZOT, G. (1984). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. 2^e édition.
- [Dugdale, 1960a] DUGDALE, D. S. (1960a). Yielding of steel sheets containing slits. *J. Mech. Phys. Solids*, **8**:100–108.
- [Dugdale, 1960b] DUGDALE, D. S. (1960b). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of Mechanical Physics of Solids*, **8**:100–104.
- [Duvaut et Lions, 1972] DUVAUT, G. et LIONS, J.-L. (1972). *Les inéquations en mécanique et en physique*. Paris.

- [Erdogan et Sih, 1963] ERDOGAN, F. et SIH, G. C. (1963). On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Journal of Basic Engineering*, **Déc.**:519–527.
- [Ferdjani et al., 2007] FERDJANI, H., ABDELMOULA, R. et MARIGO, J.-J. (2007). Intensity to small defects of the rupture of materials governed by the dugdale model. *Continuum Mech. Thermodyn.*, **19**:191–210.
- [Goodier, 1975] GOODIER, J. N. (1975). Mathematical theory of equilibrium cracks. *Dans Fracture, édité par H. Liebowitz, Tome II. Academic Press.*
- [Green et Sneddon, 1950] GREEN, A. E. et SNEDDON, I. N. (1950). The distribution of stress in the neighbourhood of a flat elliptical crack in an elastic solid. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, :p–159.
- [Griffith, 1920] GRIFFITH, A. A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **A. 221**:163–198.
- [Gurtin, 1981] GURTIN, M. E. (1981). An introduction to continuum mechanics. *of Mathématiques in Science and Engineering, Academic, London*, **158**.
- [Hayes et Turner, 1974] HAYES, D. S. et TURNER, C. E. (1974). Application of finite element technics to post yield analysis of proposed standard three point bend fracture test pieces. *International Journal of Fracture*, **10**:17–32.
- [Hinton et Owen, 1984] HINTON, E. et OWEN, D. R. J. (1984). *Finite element software for plates and shells*.
- [Irwin, 1956] IRWIN, G. R. (1956). Relation of stresses near a crack to the crack extension force. *International Congress an Applied Mechanics, Bruxelles* :p–245.
- [Irwin, 1957] IRWIN, G. R. (1957). Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate. *Journal of Applied Mechanics Trans. ASME*, **Sept.** :p–361.
- [Irwin, 1958] IRWIN, G. R. (1958). Fracture in handbuch. *Physik, Springer*, **6**:551–590.
- [Irwin, 1962] IRWIN, G. R. (1962). Crack extension force for a part-through crack in a plate. *Journal of Applied Mechanics*, **Déc.**:p–651.
- [Jaubert, 2006] JAUBERT, A. (2006). *Approche variationnelle de la fatigue*. Thèse de doctorat, Université Paris XIII.
- [Kassir et Riedel, 1981] KASSIR, G. et RIEDEL, H. (1981). A comparative study on different methods to measure the crack opening displacement. *Journal of Applied Mechanics*, **Vol. 5**:2547–2554.
- [Kassir et Sih, 1966] KASSIR, M. K. et SIH, G. C. (1966). Three-dimensional around an elliptical crack under arbitrary loadings. *Journal of Applied Mechanics*, **Sept.**:p–601.
- [Koiter, 1966] KOITER, W. T. (1966). On the nonlinear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. B 69*, **28**:1–54.
- [Koiter, 1970] KOITER, W. T. (1970). On the foundation of the linear theory of thin elastic shells. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. B 73.*, **28**:169–195.
- [Kolosoov et Muskhelishvili, 1915] KOLOSOV, G. V. et MUSKHELISHVILI, N. I. (1915). On the equilibrium of elastic circular disc. **29 XII**:39–55.

- [Labbens, 1980] LABBENS, R. (1980). *Introduction à la mécanique de la rupture*.
- [Ladeveze, 1988] LADEVEZE, P. (1988). Les modèles classiques et leurs extensions pour le calcul des plaques, calculs des structures et ia. *Fouet et al. Edision Pluralis*, **2**:99–118.
- [Lardeur, 1990] LARDEUR, P. (1990). *Développements et évaluation de deux nouveaux éléments finis de plaques et de coques composites avec influence du cisaillement transversal*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Compiègne UTC.
- [Lardeur et Batoz, 1989] LARDEUR, P. et BATOZ, J. L. (1989). Composite plate analysis using a new discrete shear triangular finite element. *IJNME.*, **27**, No **2**:343–360.
- [Laverne, 2004] LAVERNE, J. (2004). *Formulation énergétique de la rupture par des modèles de forces cohésives : Considérations théoriques et implantation numériques*. Thèse de doctorat, Université Paris XIII.
- [Lawn, 1993] LAWN, B. (1993). Fracture of brittle solids-second edition. *Cambrige Solide State Science Series. Cambrige University Press, Cambridge.*, .
- [Leblond, 2003] LEBLOND, J.-B. (2003). *Mécanique de la rupture fragile et ductile*. Hermes Sciences, 11, rue Lavoisier 75008 Paris.
- [Love, 1934] LOVE, A. E. H. (1934). The mathematical theory of elasticity. *Cambridge University Press*, .
- [Mandel, 1966] MANDEL, J. (1966). *Mécanique des milieux continus*. Tomes I and II.
- [Marigo, 2010] MARIGO, J.-J. (2010). Plasticité et rupture. *Presse de l'École Polytechnique, Palaiseau, France*, :1–218.
- [Marsden et Hughes, 1983] MARSDEN, J. E. et HUGHES, T. J. R. (1983). Mathematical foundations of elasticity. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs*, .
- [Mindlin, 1951] MINDLIN, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions isotropic elastic plates. *JAM*, **23**:31–38.
- [Mindlin et al.,] MINDLIN, R. D., SCHACKNOW, A. et DERESIEWICZ, H. Flexural vibrations motions of rectangular plates. *JAM*, **23**, No **78**:431–436.
- [Muskhelishvili, 1954] MUSKHELISHVILI, N. I. (1954). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. Fundamental equations plane theory of elastycity torsion and bending*. Translated from the Russian by J. R. M. RADOK. Noordhoff International Publishing Leyden.
- [Muskhelishvili, 1963] MUSKHELISHVILI, N. I. (1963). Some basic problems of mathematical theory of elasticity. *P. Noordhoff Ltd, Groningen*, **2nd edition**,.
- [Naghdi, 1963] NAGHDI, P. M. (1963). Foundation of elastic shell theory. *in Progress in solid mechanics*, **4**, North-Holland, Amsterdam:1–90.
- [Naghdi, 1972] NAGHDI, P. M. (1972). The théorie of shells and plates, in hanbuch der physik. *Springer-Verlag, Berlin*, **VIa.2**:425–640.
- [Needleman, 1987] NEEDLEMAN, A. (1987). A continuum model for void nucleation by inclusion debonding. *Journal Applied Mechanics*, **54**:525–531.

- [Noor et Burton, 1989] NOOR, A. K. et BURTON, W. S. (1989). Assessment of deformation théories for multiayered composte plates. *ASME, Applied Mechanics Review*, **42**, No 1:1–13.
- [Noor et al., 1989] NOOR, A. K., BURTON, W. S. et PETERS, J. M. (1989). Assessment of computational models for multilayered composite cylinders, in analytical and computational models of shells. *Noor et al. Eds, ASME, CED*, **3**:419–442.
- [Owen et Figueras, 1983] OWEN, D. R. J. et FIGUERAS, J. A. (1983). Anisotropic elatoplastic finite element analysis of thick and thin plates and shells. *IJNME*, **19**:541–566.
- [Parton et Perline, 1977] PARTON, V. et PERLINE, P. (1977). *Méthode de la théorie mathématique de l'élasticité*. Tome 1 and 2.
- [Pham, 2016] PHAM, T. H. (2016). *Modélisation analytique et simulation numérique de la nucléation et la propagation de la fissure cohésive couplée avec la plasticité*. Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique.
- [Pham et al., 2016] PHAM, T. H., LAVERNE, J. et MARIGO, J. J. (2016). Stress gradient effects on the nucleation and propagation of cohesive cracks. *Discrete and Continuous Dynamical Systeme Series S*, **9**, No 2, April:557–584.
- [Pluvinage, 1989] PLUVINAGE, G. (1989). *Mécanique élastostatique de la rupture (Critères d'amorçage)*. Collection Nabla, 111, rue Nicolas-Vauquelin 31100 Toulouse (France).
- [Reissner,] REISSNER, E. A consistent treatment of transverse shear deformations in laminated anisotropic plates. *AIAAJ*, **10** No 5:716–718.
- [Reissner, 1945] REISSNER, E. (1945). The effect of transverse shear déformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics JAM*, **12**:A69–A77.
- [Rice, 1980] RICE, J. (1980). The mechanics of eartquake rupture. *Physics of the earth's interior*, :555–649.
- [Rice, 1968] RICE, J. R. (1968). A path independant integral and the apporoximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics JAM*, **35**:379–386.
- [Rice et Wang, 1989] RICE, J. R. et WANG, J.-S. (1989). Embrittlement of interfaces by solute segregation. *Materials Science and Engineering*, **A. 107**:23–40.
- [Shames et Dym, 1985] SHAMES, I. H. et DYM, C. L. (1985). *Energy and finite element in structural mechanics*.
- [Shih, 1981] SHIH, F. C. (1981). Relationship between the j integral and the crack opening displacement for stationary and extending cracks. *Journal of Mechanics Physic of solids*, **Vol. 29**, No 4:305–326.
- [Sih, 1974] SIH, G. C. (1974). Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, **10** No 3:305–322.
- [Sih et al., 1966] SIH, G. C., WILLIAMS, M. L. et SWEDLOW, J. L. (1966). Three dimensional distribution near a sharp crack in a plate of finite thickness. *Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base*, **Report No AFML-TR:66–242**.

- [Sneddon, 1946] SNEDDON, I. N. (1946). The distribution of stress in the neighbourhood of a crack in elastic solid. *Proc. of the Royal Society of London*, **Vol. 187**:p.–229.
- [Stricklin *et al.*, 1969] STRICKLIN, J. A., HAISLER, W. E., TISDALE, P. R. et GUNDERSON, R. (1969). A rapidly converging triangular plate element. *AIAAJ*, **7 No 1**:180–181.
- [Temam, 1983] TEMAM, R. (1983). *Problèmes mathématiques en plasticité*. 12. Collection Méthodes Mathématiques de l'Informatique sous la direction de J.-L. Lions.
- [Tracey, 1976] TRACEY, D. M. (1976). Trans asme. *Journal of engineering materials and technology*, **98**:p.–146.
- [Valid, 1977] VALID, R. (1977). *La mécanique des milieux continus et le calcul des structures*.
- [Vitviski et Leonov, 1960] VITVISKI, P. M. et LEONOV, M. Y. (1960). Vses. int ; nouchn ,tekhn in form. *Akad Nauk SSSR*, **pt 1 (14)**.
- [Washizu, 1982] WASHIZU, K. (1982). *Variational methods in elasticity and plasticity*. 3rd edition. *Pergamon Press*.
- [Wells, 1963] WELLS, A. A. (1963). Application of fracture mechanics at and beyond general yielding. *British welding journal*, **10-11**:563–570.
- [Wempner, 1981] WEMPNER, G. R. (1981). Mechanics of solids with applications to thin bodies. *Sijthoff et Noordhoff, Alphen aan den Rijn.*, :–.
- [Wempner *et al.*, 1968] WEMPNER, G. R., ODEN, J. T. et KROSS, D. A. (1968). Finite element analysis thin shells. *J. Engrg. Mech. Div. ASCE*, **94, EM6**:1273–1294.
- [Westergaard, 1939] WESTERGAARD, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, **Juin**:p.–49.
- [Whitney, 1972] WHITNEY, J. M. (1972). Stress analysis of thick laminated composite and sandwich plates. *J. Comp. Mat.*, **6**:426–440.
- [Whitney, 1973] WHITNEY, J. M. (1973). Shear correction factors for orthotropic laminates under static loading. *Journal of Applied Mechanics JAM*, **40**:302–304.
- [Whitney, 1987] WHITNEY, J. M. (1987). *Structural analysis of laminated anisotropic plates*. Technomic Publishing Compagny.
- [Willis, 1975a] WILLIS, J. (1975a). *J. Mech. Phys. Solids*, **15**:p.–151.
- [Willis, 1975b] WILLIS, J. (1975b). *Int. J. Fracture*, **11**:p.–489.

Résumé :

Dans le contexte industriel actuel, l'utilisation du modèle de forces cohésives en milieu solide revêt d'une importance capitale dans des nombreux domaines d'applications dont en particulier le domaine du transport, du nucléaire ou du génie-civil. En conséquence, la présente étude propose une modélisation numérique de la rupture fragile d'une plaque en acier en présence des forces cohésives. Le logiciel Cast3M est utilisé pour la mise en œuvre numérique. Le modèle de type Dugdale est utilisé et permet de calculer dans le cas d'une plaque élasto-plastique la distribution de contraintes à la pointe de fissure. Le modèle suppose, qu'à la pointe de fissure sur une longueur cohésive L_{zc} , les contraintes cohésives $\sigma_c(x_1)$, suivant l'axe $\mathcal{O}x_1$ restent constante avec une amplitude égale à σ_c . Le domaine de rupture élastique et le domaine de ruine plastique a été pris en compte. L'approche peut être considérée comme une extension de la mécanique linéaire de la rupture dans laquelle est introduite la notion de contrainte critique, ce qui permet en particulier de mieux rendre compte des effets d'échelle. A partir du principe de superposition des contraintes en mode I de rupture, les calculs dans la configuration déformée de la plaque fissurée a été étendue à d'autres géométries plus simples : une plaque avec fissure sans force cohésive, mais avec charge extérieure appliquée, une plaque avec une fissure purement cohésive et une plaque avec une fissure partiellement cohésive et sans charge extérieure. Ces différentes formes géométriques ont été prises en compte dans la modélisation numérique ainsi que la création de la fissure et le démarrage de la propagation. Le paramètre énergétique calculé selon la formule de l'intégrale J de [Rice, 1968] est également pris en compte et est comparé avec les résultats analytiques de [Ferdjani *et al.*, 2007].

Mots clés : Forces cohésives, rupture fragile, méthode variationnelle, éléments finis, propagation de fissure, modèle de Dugdale, théorie des plaques.

Abstract :

In the context of industrial applications, the linear fracture mechanics theory is not sufficient to account for various aspects of the crack propagation and it becomes necessary to use more sophisticated models like cohesive force models. The goal of the present thesis is to develop such a model in order to account for all the process of the crack propagation, from the nucleation in a sound structure to the final failure of that structure. Specifically, we use Dugdale model which contains both the concept of critical stress and of internal length. The presence of a critical stress allows us to account for the nucleation of a crack even if the body is initially sound, in contrast with Griffith theory which requires the existence of preexisting cracks. The presence of an internal length allows us to account for pertinent scale effects, once again in contrast with Griffith theory in which the predicted scale effects are only correct for large specimen, not for small specimen. This approach is used to describe the full process of cracking in several cases, either by purely analytical methods when the geometry is simple enough, or by the finite element method with the code Cast3M in the case of complex geometry.

Keywords : Cohesive forces, brittle fracture, variational method, finite element method, crack propagation, Dugdale model, plate theory